ONDERWIJSPORTFOLIO
BASISKWALIFICATIE ONDERWIJS

SILJA RENOOIJ

31 OKTOBER 2003

Inhoudsopgave

1 **Inleiding** ***5***
2 **Onderwijs (gerelateerde) CV** ***7***
2.1 *Een chronologisch overzicht 7*
2.2 *Onderwijs activiteiten 9*
2.3 *Overleg en management 10*
2.4 *Cursussen 10*
3 **Relatie opgedane ervaringen tot BKO criteria** ***11***
3.1 *Vakinhoudelijke bekwaamheden 11*
3.2 *Didactische bekwaamheden 11*
3.3 *Organisatorische bekwaamheden 15*
3.4 *Algemene bekwaamheden 16*
4 **Reflectie** ***17***
A **Onderwijsmateriaal Probabilistisch Redeneren** ***21***
B **Onderwijsmateriaal Besliskunde** ***69***
C **Afstudeerverslagen** ***121***

Hoofdstuk 1

Inleiding

Voor u ligt mijn onderwijsportfolio zoals samengesteld ten behoeve van het verkrijgen van een BasisKwalificatie Onderwijs (BKO).

Bij mijn aanstelling als junior onderzoeker (Postdoc) in januari 2001 heb ik met mijn werkleider prof. dr. ir. L.C. (Linda) van der Gaag afgesproken dat ik 25–30% van mijn tijd aan onderwijs zou besteden. Redenen hiervoor waren onder andere dat het mij leuk leek om wat onderwijs te geven, en dat ik op die manier de mogelijkheid had om op den duur een BKO te halen.

Bij de verdeling van de onderwijstaken is steeds rekening gehouden met het feit dat ik om een BKO te kunnen halen aan een aantal criteria moet voldoen. Daarnaast heb ik ook de mogelijkheid gekregen om de benodigde cursussen te volgen en heb ik een onderwijsportfolio aangelegd. Formeel ben ik nooit op een BKO-traject ingestapt met als gevolg dat er geen startportfolio en individueel opleidingsplan zijn opgesteld en dat de duur van de opleiding niet van tevoren is vastgesteld. Linda van der Gaag heeft wel vanaf het begin de taak van *tutor* op zich genomen, hoewel ook dit geen formele status had.

In dit portfolio vindt u allereerst in Hoofdstuk 2 een overzicht van mijn CV voor zover dat betrekking heeft op onderwijs en onderwijsgerelateerde zaken. Hoofdstuk 3 beschrijft hoe de door mij uitgevoerde werkzaamheden en de daarbij opgedane ervaringen zich verhouden tot de criteria zoals gesteld in de facultaire Regeling Basiskwalificatie Onderwijs (BKO) van januari 1996, waarna in Hoofdstuk 4 een reflectie hierop volgt. Een deel van het vervaardigd onderwijsmateriaal is in de vorm van bijlagen toegevoegd.

Hoofdstuk 2

Onderwijs (gerelateerde) CV

In dit hoofdstuk volgt een overzicht van alle onderwijsactiviteiten waar ik bij betrokken ben geweest. Tevens is het cursusaanbod waarvan ik zelf gebruik gemaakt heb weergegeven, voor zover relevant. De onderwijsactiviteiten beslaan de periode tussen september 1992 en juli 1996 waarin ik Studentassistent was, de periode van januari 1997 tot januari 2001 waarin ik Assistent in Opleiding was en tenslotte de periode van januari 2001 tot en met nu. Allereerst volgt een chronologisch overzicht dat vervolgens uitgesplitst wordt naar de verschillende onderwijstaken zoals die in de Regeling BKO staan en die in de volgende tabel zijn samengevat.

Onderwijs activiteiten

onderwijs taken:	basiscollege met werkcollege/practicum specialisatiecollege college met andere doelgroep/onderwijsvorm begeleiden project/stage/afstudeerscriptie aspecten onderwijsmanagement
onderwijs overleg	

Ondersteunend cursusaanbod

tenminste:	facultaire introductie training 'hoorcollege geven' training 'onderwijs ontwikkelen'

2.1 Een chronologisch overzicht

2.1.1 Studentassistentschappen

In de tijd dat ik Informatica studeerde aan de Universiteit Utrecht heb ik in totaal 9 studentassistentschappen gehad; een assistenschap stond voor een tijdsinvestering van een halve dag in de week gedurende een semester. Ik heb onder andere werkcollege gegeven aan eerstejaars Informatica (Inleiding Programmeren, Beschrijven en Bewijzen, Algoritmen en Datastructuren I), tweedejaars Informatica (Algoritmen en Datastructuren II) en derdejaars Cognitieve Kunstmatige Intelligentie (CKI) (Databases). Tevens heb ik practica begeleid van Databases en Grammatica's en Ontleden wat destijds, als ik het me goed herinner, respectievelijk derde- en eerstejaars vakken waren. Bij Grammatica's en Ontleden en Beschrijven en Bewijzen bestond de taak van de studentassistent naast begeleiden ook uit het nakijken van practicumopdrachten of inleveropgaven. De werkcollegegroepen waren vrij klein, zo tussen de 10 en 20 studenten; practica waren niet ingeroosterd, maar de assistenten hielden 'spreekuur' voor de hele lichting deelnemers. Indirect was ik bij de opleiding betrokken als lid van de Overleggroep Informatica; daarnaast heb ik een keer geassisteerd bij een Themadag.

2.1.2 Onderwijstaken als AiO

Het overzicht in Tabel 2.1 geeft weer welke onderwijstaken ik vervuld heb gedurende de semesters/blokken dat ik AiO was. Tevens is weergegeven voor welke groep (studierichting[1] en jaar) studenten het onderwijs verzorgd werd en wat de groepsgrootte bij aanvang ongeveer was.

Periode	Vak	Groep		grootte
96/97, semester 2	Algoritmen en Datastructuren I, werkcollege	MTI,	jr 1	20
97/98, semester 1	Beschrijven en Bewijzen, werkcollege	MTI,	jr 1	20
		ALG,	jr 1	20
97/98, semester 2	Algoritmen en Datastructuren I, werkcollege	MTI,	jr 1	20
98/99, semester 1	Beschrijven en Bewijzen, werkcollege	ALG,	jr 1	30
98/99, semester 1	Caleidoscoop TKI, 2 gastcolleges	TKI,	jr 1	7
98/99, semester 1	Derde beoordelaar afstudeerstudent	CKI		
98/99, semester 2	Expert Systemen, werkcollege en practicum	INF,	jr 2	30
99/00, blok 1	Beschrijven en Bewijzen, werkcollege	ALG,	jr 1	30
99/00, blok 2	Expert Systemen, werkcollege en practicum	INF,	jr 2	30
99/00, blok 2	Inleiding TKI, 2 gastcolleges	TKI,	jr 1	15

Tabel 2.1: Onderwijstaken als AiO; januari 1996 – december 1999

In bovenstaande periode ben ik tevens indirect bij de opleiding betrokken geweest door regelmatig te helpen bij voorlichtingsdagen en 'meisjesdagen'.

2.1.3 Recentere onderwijstaken

Het overzicht in Tabel 2.2 geeft weer welke onderwijstaken ik vervuld heb sinds 1 januari 2001. Wederom is weergegeven voor welke groep studenten het onderwijs verzorgd werd en wat de groepsgrootte bij aanvang ongeveer was.

Periode	Vak	Groep		grootte
2001	Eerste begeleider afstudeerstudent	CKI		
00/01, blok 3-5	Leeronderzoek CKI-20	CKI,	jr 2/3	5
00/01, blok 5	Probabilistisch Redeneren, hoorcollege	INF,	jr 3	20
01/02, blok 1	Beschrijven en Bewijzen, werkcollege	MTI/I&M,	jr 1	10
01/02, blok 2	Inleiding TKI, gastcollege	TKI,	jr 1	15
01/02, blok 3	Databases, combisessies	CKI,	jr 2	20
01/02, blok 4/5	Leeronderzoek CKI-20	CKI,	jr 2	3
01/02, blok 5	Probabilistisch Redeneren, hoorcollege + werkcollege	INF,	jr 3	20
02/03, blok 1	Probabilistisch Redeneren, hoorcollege	INF,	Master 1	30
02/03, blok 1/2	Derde begeleider afstudeerder	CKI		
02/03, blok 1-5	Eerste begeleider afstudeerder	INF		
02/03, blok 3	Besliskunde, hoorcollege	INF,	jr 3 + Master 1	30
02/03, blok 4	Externe beoordelaar afstudeerder			
02/03, blok 5	Databases, werkcollege + practicum	IKU,	jr 2	20
03/04, periode 1	Probabilistisch Redeneren, hoorcollege	INF,	Master 1	30

Tabel 2.2: Recentere onderwijstaken; januari 2001 – heden

1. Informatica (INF); de varianten Algemene Informatica (ALG), Medisch Technische Informatica (MTI), Technische Kunstmatige Intelligentie (TKI) en Informatica & Management (I&M); Informatiekunde (IKU) en Cognitieve Kunstmatige Intelligentie (CKI).

2.2 Onderwijs activiteiten

De Regeling BKO vereist dat minimaal vier verschillende vormen van onderwijs verzorgd worden, te weten: een basiscollege met werkcollege/practicum, een specialisatiecollege, een college met een andere doelgroep of onderwijsvorm, en begeleiding van een project/stage/afstudeerscriptie. Bovenstaande tabellen geven per onderwijstaak de bijbehorende vorm weer; hieronder worden nog eens de verschillende taken per onderwijsvorm gegeven.

2.2.1 Basiscollege met werkcollege/practicum

In de basisdoctoraal zoals die bestond voor de invoering van het Bachelor/Master systeem heb ik door de jaren heen werkcolleges en practica van verschillende vakken begeleid (zie voorgaande tabellen). Groepsgrootte van werkcolleges variëerde van 10 tot 30 studenten; bij practica waren er meestal zo'n 30 studenten verspreid over verschillende zalen. Drie jaar achtereen heb ik gastcolleges voor eerstejaars TKI gegeven (voor het oriëntatie deel van het vak Inleiding/Caleidoscoop TKI); de eerste twee keer samen met Cilia Witteman, de laatste keer alleen.

2.2.2 Specialisatiecollege

De specialisatiecolleges die ik heb gegeven zijn colleges voor de vakken Probabilistisch Redeneren en Besliskunde.

Probabilistisch Redeneren Het vak Probabilistisch Redeneren bestaat al enige jaren en was een derdejaars specialisatievak in de vierjarige opleiding; het zou een vierdejaars specialisatievak worden voor studenten die de vijfjarige opleiding volgen, ware het niet dat op dat moment het BaMa-stelsel werd ingevoerd. Het vak wordt momenteel aangeboden voor eerstejaars studenten van de AS (Algorithmic Systems) en ACI (Agents and Computational Intelligence) masterprogramma's. Naast Informatica studenten volgen ook veel CKI studenten het vak. Ik geef het vak Probabilistisch Redeneren nu voor de vierde keer. De eerste twee keer voor zo'n 20 studenten, de laatste twee keer voor zo'n 30 studenten. Tot dit jaar was er bij het vak ook een apart werkcollege; dit werkcollege is tweemaal door Michael Egmont-Petersen begeleid en eenmaal door mijzelf. Dit jaar, met de overstap op het vier-periode systeem, heb ik de werkcolleges geïntegreerd met de hoorcolleges.

Besliskunde Het vak Besliskunde is in het voorjaar van 2003 voor het eerst gegeven, aan ruim 30 studenten. Een deel van de populatie bestond uit derdejaars MTI en TKI die het vak ter vervanging van Medische Besliskunde moesten volgen, de overigen waren studenten die de masterprogramma's AS of ACI volgen en een enkele CKI-er. Er waren bij het vak twee docenten betrokken, Linda van der Gaag en ikzelf, en twee werkcollege begeleiders, Danielle Sent en een studentassistent. Linda en ik hebben ieder de helft van de colleges gegeven.

2.2.3 Andere doelgroep of onderwijsvorm

Zoals blijkt uit de tabellen 2.1 en 2.2 heb ik onderwijs gegeven aan verschillende groepen studenten: studenten uit verschillende jaren, zowel Informatica- als Informatiekunde- en CKI-studenten, en binnen de Informatica opleiding aan studenten van verschillende varianten. Naast de standaard onderwijsvormen als hoorcollege, werkcollege of practicum, heb ik tevens ervaring met zogenaamde 'combisessies' van werkcollege en practicum en met het begeleiden van kleine groepjes studenten in een leeronderzoek (CKI-20).

2.2.4 Begeleiding van project/stage/scriptie

Het vak CKI-20 is een leeronderzoek van twee studiepunten voor tweedejaars CKI. Het idee is dat studenten in een klein groepje een onderzoekje opzetten en uitvoeren, daar een verslag over schrijven en een presentatie over geven. In het kader van dit vak heb ik twee keer met Cilia Witteman een project begeleid; de eerste keer hadden we een groep van vijf studenten, de tweede keer van drie studenten.

Bij de afstudeerprojecten van twee CKI studenten ben ik nauw betrokken geweest. Beide studenten hebben een project gedaan dat wat onderwerp betreft dicht bij mijn promotieonderzoek ligt. Ik ben eerste begeleider geweest van Pauline Pardieck; bij dit project was Linda van der Gaag als tutor ook regelmatig betrokken. Linda en ik hebben samen Janneke Bolt begeleid, waarbij ik formeel de derde beoordelaar was.Zijdelings ben ik als derde beoordelaar ook betrokken geweest bij het afstudeerproject van Michiel Tas (CKI). Tevens ben ik in het voorjaar van 2003 'external examiner' geweest van een MSc-thesis van een student aan de Universiteit van Melbourne. Tenslotte heb ik samen met Eveline Helsper een Informatica student (Frank van Kouwen) begeleid, die een afstudeerstage bij het RIVM heeft gedaan. Zijn project had betrekking op kwalitatieve modellen voor advies met betrekking tot milieubeleid.

2.3 Overleg en management

Naast overleg met de betrokkenen van de vakken waarvoor ik zelf onderwijs verzorgd heb, hebben we als leerstoelgroep regelmatig groepsbijeenkomsten waar ook onderwijszaken aan bod komen. Eens in de zoveel tijd hebben we met een deel van de groep een apart onderwijsoverleg. Ook neem ik eigenlijk altijd deel aan het docentenoverleg. Indirect ben ik sinds maart 2002 bij de opleiding betrokken als lid van de OpleidingsCommissie (OC) Informatica, waardoor ik steeds redelijk op de hoogte ben van recente, voor het onderwijs relevante, regelingen.

2.4 Cursussen

In de BKO regeling wordt als ondersteunend cursusaanbod genoemd tenminste de facultaire introductie, een training 'hoorcollege geven', en een training 'onderwijs ontwikkelen'. In april/mei van 2002 heb ik bij het IVLOS de training 'hoorcollege geven' gevolgd van vijf dagdelen. De IVLOS cursus 'het maken van onderwijs' van vier dagdelen heb ik in mei 2003 gedaan.

Hoofdstuk 3

Relatie opgedane ervaringen tot BKO criteria

Naast betrokkenheid bij de verschillende aspecten van het onderwijs, stelt de Regeling Basiskwalificatie Onderwijs ook een aantal criteria waaraan voldaan moet zijn. Deze criteria hebben betrekking op:

- vakinhoudelijke bekwaamheden
- didactische bekwaamheden
  - ontwerpen onderwijs
  - structureren zelfstudie student
  - geven van onderwijs
  - individuele werkbegeleiding van studenten
  - toetsing en evaluatie
- organisatorische bekwaamheden
- algemene bekwaamheden

en zullen in dit hoofdstuk globaal besproken worden. Verdere details volgen uit het voorgaande onderwijs CV en de reflectie in het volgende hoofdstuk.

3.1 Vakinhoudelijke bekwaamheden

Met een Informatica-opleiding als achtergrond ben ik op de hoogte van het globale vakgebied waarin ik onderwijs geef. De vakken waarvoor ik hoorcolleges geef vallen in het algemeen onder het gebied dat zich bezighoudt met 'redeneren met onzekerheid' waartoe ik ook mijn promotieonderzoek en huidige onderzoek kan rekenen. In mijn colleges probeer ik waar mogelijk verbanden te leggen met andere vakken uit de opleiding. Ook probeer ik zowel theoretische als praktische kennis en ervaringen uit het onderzoek en het dagelijks leven in te brengen in de colleges.

3.2 Didactische bekwaamheden

3.2.1 Ontwerpen van onderwijs

Probabilistisch Redeneren Het doel van het vak Probabilistisch Redeneren is dat de studenten verschillende aspecten leren kennen van een probabilistisch netwerk als formalisme voor het redeneren onder onzekerheid. De studenten worden na afloop geacht te weten wat de onderliggende betekenis van een probabilistisch netwerk is, hoe zulke netwerken geconstrueerd en gebruikt kunnen worden, en ze moeten een algoritme voor het redeneren met een probabilistisch netwerk begrijpen en kunnen toepassen. Al deze aspecten worden tijdens het college behandeld en komen terug in de beschikbare opgaven.

Het eerste deel van het vak is vrij theoretisch van aard: hierin worden allerlei concepten geïntroduceerd die nodig zijn om uiteindelijk te kunnen begrijpen wat een probabilistisch netwerk precies is; ook wordt in dit deel uitgebreid een algoritme voor het redeneren met een probabilistisch netwerk behandeld. Het tweede deel gaat over de constructie van probabilistische netwerken voor echte toepassingen. Dit deel bestaat uit verschillende losse onderwerpen die minder diep uitgewerkt zijn dan de onderwerpen in het

eerste deel van het vak. Dit laatste komt doordat er veel aspecten zijn die een rol spelen bij de constructie, en omdat dit nog een relatief jong vakgebied is waarin nog veel onderzoek gedaan wordt. Om toch te allen tijde zicht te houden op waar we mee bezig zijn, heb ik een transparant gemaakt met daarop de verschillende onderwerpen en hoe ze samenhangen; deze transparant laat ik aan het begin en eind van de meeste colleges even zien.

De eerste keer dat ik Probabilistisch Redeneren gaf (studiejaar 2000/2001) heb ik gebruik gemaakt van het materiaal van Linda van der Gaag, die het vak de jaren ervoor verzorgde. Dit materiaal bestond uit een webpagina, een dictaat met leerstof en opgaven, handgeschreven transparanten, en oude tentamens. Dit eerste jaar heb ik het onderwerp *sensitiviteitsanalyse* met een paar transparanten uitgebreid, gebaseerd op nieuwe inzichten die we vlak voor aanvang van het vak hadden verkregen.

De tweede keer dat ik Probabilistisch Redeneren gaf (studiejaar 2001/2002) had ik de transparanten allemaal ingetikt. Dit maakt het eenvoudiger om transparanten aan te passen en toe te voegen. Het hoofdstuk in het dictaat over het gebruik van probabilistische netwerken in de praktijk had ik met twee onderwerpen uitgebreid: het gebruik van *Brier*-scores om de praktische waarde van een netwerk te evalueren, en hoe een probabilistisch netwerk in een bestaand 'drempelwaardenmodel voor het nemen van beslissingen' kan worden toegepast. Bij deze nieuwe onderwerpen heb ik ook transparanten ontwikkeld. Omdat het dictaat vrij beknopt van aard is heb ik een 'handout' geschreven waarin de intuïtie achter het zogenaamde 'algoritme van Pearl' nog eens expliciet gegeven wordt.

Geïnspireerd door de cursus 'het maken van onderwijs' heb ik voor het jaar 2003/2004 een studiewijzer bij het vak geschreven. Hierin staat voor elk hoofdstuk uit het dictaat aangegeven wat relevante opgaven zijn en van 'reken'opgaven zijn de antwoorden gegeven (geen uitwerkingen). Tevens staat er voor elk hoofdstuk een serie korte vragen in die bedoeld zijn om de studenten te stimuleren echt over de stof na te denken. De studiewijzer is in het engels geschreven; de bovengenoemde 'handout' is er in opgenomen, maar die is nog wel in het nederlands.

De bestaande webpagina heb ik in de loop der tijd steeds verder aangepast. Ik heb steeds een overzicht opgenomen dat per college en/of werkcollege aangeeft welke stof er zal worden behandeld of daadwerkelijk is behandeld. Ik heb links toegevoegd naar allerlei handige online tools die ter

Materiaal	**Beschikbaar bij/in**
Webpagina's	
2000-2001	S. Renooij
2001-2002	S. Renooij
2002-2003	S. Renooij
2003-2004	Bijlage A
Transparanten	
sensitiviteitsanalyse (5 stuks)	Bijlage A
de Brier score (9 stuks)	Bijlage A
het drempelwaardenmodel (7 stuks)	Bijlage A
Dictaat	
hoofdstuk uitbreiding met stof uit artikelen[2]	S. Renooij
Handout (4 pagina's)	Studiewijzer
Studiewijzer (22 pagina's)	Bijlage A

Tabel 3.1: Onderwijsmateriaal ontwikkeld voor Probabilistisch Redeneren

2.

– L.C. van der Gaag, S. Renooij (2001). Evaluation scores for probabilistic networks. In: B. Kröse, M. de Rijke, G. Schreiber and M. van Someren (editors), *Proceedings of the Thirteenth Belgium-Netherlands Conference on Artificial Intelligence*, pp. 109-116.

– L.C. van der Gaag, V.M.H. Coupé (2000). Sensitivity analysis for threshold decision making with Bayesian belief networks. In: E. Lamma, P. Mello (editors). *AI*IA 99: Advances in Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag, Berlin, pp. 37 - 48.

ondersteuning van de leerstof gebruikt kunnen worden. De transparanten die ik gebruik en de studiewijzer worden ook via de webpagina beschikbaar gesteld. De webpagina is inmiddels in het engels; alleen de transparanten zijn momenteel nog niet vertaald naar het engels.

Tabel 3.1 geeft een overzicht van het onderwijsmateriaal dat door mij is toegevoegd aan het bestaande vak Probabilistisch Redeneren; tevens is aangegeven waar dit materiaal is in te zien.

Besliskunde Besliskunde was in 2003 een nieuw vak dat ik samen met Linda van der Gaag opgezet en gegeven heb. Bij het opzetten van het vak heb ik na moeten denken over de te behandelen onderwerpen, de structuur van de colleges, hoe ik de stof zou brengen en waar er precies voorbeelden moesten komen om de stof te verduidelijken. Van tevoren hebben we uitgebreid overleg gehad over de keuze van een boek, de onderwerpen en wie wat zou doen. In een later stadium hebben we gekeken of er nog afstemming van ons materiaal moest plaatsvinden.

Het vak gaat nu over het analyseren, representeren en vervolgens oplossen van beslisproblemen. Twee belangrijke parameters hierin zijn: *speelt onzekerheid wel of geen rol?* en *wil ik één of meer (strijdige) doelen bereiken?*. In het vak komen methoden aan bod die geschikt zijn voor elk van de vier mogelijke combinaties van deze parameters. Met name wordt veel aandacht besteed aan beslisbomen en de multi-attribuut utiliteiten theorie. In de colleges wordt theorie zoveel mogelijk afgewisseld met voorbeelden om verschillende concepten duidelijk te maken. We wilden het vak vrij wiskundig van aard hebben, maar konden geen leesbaar boek vinden dat daar ook aan voldeed. We hebben daarom voor een wat informeler boek gekozen en de transparanten als essentiële aanvulling op het boek beschouwd.

De helft van de colleges van het vak zijn door mij gegeven; voor deze colleges heb ik ook de transparanten gemaakt en werkcollegeopgaven verzameld. De werkcollegeopgaven bestaan voornamelijk uit uitbreidingen van opgaven die ik in verschillende boeken gevonden heb. Voor de (student)assistenten heb ik uitwerkingen van de opgaven gemaakt. Globaal gesproken is de stof uit het eerste deel van het vak getoetst door middel van een taak die door Linda en mij is opgesteld. De rest van de stof is met een tentamen getoetst dat Linda en ik ieder voor de helft hebben bedacht en nagekeken. Ik heb een webpagina voor het vak opgezet met daarop alle relevante informatie over het vak. Informatie over de organisatie, roostering, de behandelde onderwerpen, de relevante opgaven, de transparanten, de taak, deadlines, en links naar software en andere relevante websites zijn daar allemaal op te vinden. Al het ontwikkelde materiaal, op de taak na, is in het engels.

Tabel 3.2 geeft een overzicht van het onderwijsmateriaal dat door mij is ontwikkeld voor het vak Besliskunde; tevens is aangegeven waar dit materiaal is te vinden.

Materiaal	**Beschikbaar bij/in**
Webpagina's	
2002-2003	Bijlage B
Transparanten	
assessing utilities (12 stuks)	Bijlage B
risk attitudes (18 stuks)	Bijlage B
multi-attribute utility theory (77 stuks)	Bijlage B
the Analytic Hierarchy Process (22 stuks)	Bijlage B
Opgaven en uitwerkingen	
werkcollege 3 met uitwerkingen	Bijlage B
werkcollege 4 met uitwerkingen	S. Renooij
deel werkcollege 5 met uitwerkingen	S. Renooij
Taak opgesteld met mede-docente	S. Renooij[3]

Tabel 3.2: Onderwijsmateriaal ontwikkeld voor Besliskunde

3. De taak is tevens te vinden via `http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/bk/taak.pdf`

Gastcolleges Bij de gastcolleges voor eerstejaars TKI die ik samen met Cilia Witteman gegeven heb, hebben we de studenten wat verteld over ons onderzoek naar een geschikte methode voor het schatten van kansen door domeinexperts. De colleges zijn gegeven aan de hand van enkele handgeschreven transparanten. De studenten kregen na afloop een kleine opdracht waarin ze zelf wat schattingsmethoden moesten uitproberen en daarover een kort verslag moesten schrijven. In het gastcollege voor studiejaar 01/02 heb ik studenten een idee proberen te geven van wat probabilistische netwerken globaal zijn en wat je ermee kan (transparanten zijn bij mij in te zien, of via
`http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/itki/probabilistic_networks.pdf`). Aan de hand van het college en de gebruikte transparanten moesten de studenten een essay van een A4tje schrijven; als opdracht heb ik ze gevraagd een probleem te beschrijven waarvan zij dachten dat het geschikt zou zijn om met een probabilistisch netwerk op te lossen.

Statistiek Het vak Statistiek wordt als voorkennis voor onder andere Probabilistisch Redeneren en Besliskunde beschouwd. Om aansluiting met deze vakken te bevorderen heb ik, op indirect verzoek van de docent van het vak, een aantal opgaven gemaakt voor het vak Statistiek welke nu zijn opgenomen in het dictaat; deze opgaven heb ik als extra herhalingsoefening ook in de studiewijzer van Probabilistisch Redeneren opgenomen.

3.2.2 Structureren zelfstudie student

Bij Probabilistisch Redeneren en Besliskunde bevat het onderwijsmateriaal, inclusief de website, in principe voldoende referenties naar artikelen, boeken, webpagina's en software om een student die meer informatie over of oefening met een bepaald onderwerp wil van dienst te zijn. Als een student bepaald materiaal niet kan vinden of meer zou willen weten over een zijdelings relevant onderwerp, dan kan ik daar altijd bij helpen. Afstudeerders voorzie ik van basismateriaal van waaruit ze, eventueel met hulp, verder kunnen zoeken.

3.2.3 Geven van onderwijs

Tijdens hoorcolleges probeer ik meer en meer interactie met de studenten te bewerkstelligen door ze te vragen naar het hoe en waarom van dingen voordat ik dat zelf uitleg. Ik probeer ook altijd zoveel mogelijk verbanden te leggen met voorgaande colleges, met andere vakken en met de werkcolleges. Mijn verhaal voorzie ik van zoveel mogelijk 'wegwijzers' om duidelijk te maken waar we zijn geweest, waar we nu zijn, en waar we heen gaan. Ik vind het belangrijker dat wat ik vertel overkomt dan dat ik een bepaalde hoeveelheid stof behandel.

Probabilistisch Redeneren, bijvoorbeeld, wordt over het algemeen als een lastig vak gezien en bij het eerste tentamen zakt ook ongeveer de helft. Een deel van deze studenten komt het gemaakte tentamen wel inzien om te kijken wat ze fout hebben gedaan. In plaats van alleen op de specifieke fouten in te gaan probeer ik ze ook globaal aan te geven wat de reden zou kunnen zijn waarom ze bepaalde fouten maken en waar ze dus nog eens goed naar zouden moeten kijken.

Bij werkcolleges zie ik het als mijn taak om de studenten te helpen met de opgaven die door de docent van een vak zijn opgegeven. Ik probeer studenten daarbij zoveel mogelijk het nut van de opgaven in te laten zien en ze tevens door het geven van hints zelf tot een oplossing te laten komen. Als ik eenzelfde probleem bij meedere studenten constateer dan zeg ik er klassikaal iets over. Bij eerstejaars vakken zet ik aan het begin van een werkcollege op het bord ook vaak een aantal belangrijke punten of definities die in het college behandeld zijn en terugkomen in de werkcollegeopgaven. Problemen die ik veelvuldig constateer koppel ik terug naar de docent van het vak en daarbij geef ik meestal ook aan welke opgaven de studenten wel en niet gemaakt hebben.

Bij practica is het, naar mijn mening, mijn taak om te helpen bij problemen die studenten hebben en die gerelateerd zijn aan de in het vak behandelde stof. Helaas houdt het begeleiden van practica echter voornamelijk helpen met debuggen in.

3.2.4 Individuele werkbegeleiding van studenten

Individuele studenten heb ik begeleid bij hun afstudeeronderzoek en bijbehorende scriptie. Tevens sta ik altijd klaar voor studenten die bij me komen met vragen gerelateerd aan de stof van een vak, met vragen die gaan over opgaven of over het tentamen.

Bij (afstudeer)projecten zie ik het als de taak van de begeleider(s) om in eerste instantie een probleem aan te dragen, of een student te helpen bij het zoeken van een leuk probleem. Daarnaast is het belangrijk om relevant materiaal aan te leveren zodat de student(en) voldoende vertrouwd kan raken met het probleem. Indien vereist, is het van belang erop toe te zien dat er een goede onderzoeksopzet wordt gemaakt en uitgevoerd. Tot slot is het van belang dat resultaten op een correct manier geanalyseerd worden, stellingen correct bewezen worden, en dat keuzes goed onderbouwd worden en iedereen zijn/haar steentje bijdraagt.

3.2.5 Toetsing en Evaluatie

De vakken Probabilistisch Redeneren en Besliskunde hebben beide een open-boek tentamen. De reden hiervoor is dat we begrip willen toetsen en niet kennis. Een nadeel van een open-boek tentamen is wel dat de studenten minder tijd in de voorbereiding van een tentamen steken omdat ze denken dat ze alles ter plekke wel op kunnen zoeken. De tentamens probeer ik altijd zo in te richten dat iemand die de stof begrepen heeft het tentamen moet kunnen halen, ook zonder de echte inzichtsvragen helemaal correct te beantwoorden; iemand die zonder begrip alleen maar dingen uit een boek, een dictaat of de transparanten overschrijft of toepast zou geen voldoende moeten kunnen halen. Bij het vak Besliskunde was naast het tentamen ook het doen van een taak een verplicht onderdeel. De verslagen die de studenten hiervan moesten maken zijn in overleg met de mede-docente beoordeeld. Bij aanvang van het vak was de cijferregeling die aangaf wat de weging was van taak en tentamen in het eindcijfer bekend.

Tegen het einde van een blok roep ik de studenten meermaals op om een evaluatieformulier voor het vak in te vullen, of mij desnoods persoonlijk te laten weten wat ze van het vak vonden.

Tabel 3.3 bevat voor de vakken Probabilistisch Redeneren en Besliskunde een overzicht van de tentamens, uitslagen en evaluaties die te vinden zijn in de Bijlagen A en B. Bij de tentamenopgaven is aangegeven welke opgaven door mijzelf gemaakt zijn; de overige zijn (oude) opgaven van Linda van der Gaag. Bij de uitslagen zijn het tentamen en hertentamen van een jaar samengevoegd; ook punten per tentamenonderdeel zijn vaak opgenomen.

3.3 Organisatorische bekwaamheden

De mate waarin ik overleg met docenten of (student)assistenten betrokken bij een vak laat ik afhangen van de ervaring van de verschillende betrokkenen met het vak, de problemen die ik constateer bij hoor- en werkcolleges of practica, en hoe lang het vak al meegaat. Ter illustratie twee voorbeelden. In studiejaar 2000/2001 gaf ik voor het eerst Probabilistisch Redeneren en verzorgde Michael Egmont-Petersen het werkcollege. Aangezien hij weinig ervaren was met het geven van werkcolleges en ook met de bij het vak behandelde stof hebben we daar regelmatig overleg over gehad. Ik ben ook ieder werkcollege even een kijkje gaan nemen om te zien hoe het ging en waar de studenten problemen mee hadden. In 2003 was Danielle Sent werkcollegeleider bij het vak Besliskunde; zij had al enige ervaring met een deel van de stof doordat ze meer dan eens bij Medische Besliskunde betrokken was geweest. Danielle zorgde ervoor dat alles rond het werkcollege, zoals onder andere het vermenigvuldigen van de opgaven en de communicatie met de studentassistent, in orde kwam. Ik zorgde ervoor dat Danielle op tijd wist welke opgaven op het werkcollege aan de orde moesten komen en dat ze over uitwerkingen beschikte om de opgaven goed voor te kunnen bereiden.

Het is altijd prettig als alles rond een vak voor aanvang geregeld is, zodat niet gedurende een blok of periode nog materiaal ontwikkeld of aangepast moet worden. Dit geldt zowel voor mezelf, voor de studenten die een vak volgen, als voor overige betrokkenen bij een vak. Voor assistenten bij een werkcollege is het bijvoorbeeld prettig als de opgaven niet op het laatste moment aangeleverd worden. Ik probeer er

Tentamens en hertentamens:
PR, 2 juli 2001: Opgaven 1, 2, 3bc
PR, 24 augustus 2001: Opgaven 1, 2c, 3bc
PR, 3 juli 2002; Opgaven 1, 2, 3
PR, 21 augustus 2002: Opgaven 1, 2b
PR, 25 oktober 2002: Opgaven 1ab, 2b, 3a
PR, 2 januari 2003: Opgaven 1, 2
BK, 27 maart 2003: Opgaven 3, 4
BK, 7 mei 2003: Opgaven 3, 4
Uitslagen:
PR, 2000-2001
PR, 2001-2002
PR, 2002-2003
BK, 2002-2003
Studenten evaluaties:
PR, 2000-2001
PR, 2001-2002
PR, 2002-2003
BK, 2002-2003

Tabel 3.3: Tentamens, uitslagen en evaluaties van Probabilistisch Redeneren (PR) en Besliskunde (BK) (zie Bijlagen A en B)

dan ook voor te zorgen dat alles ruim op tijd geregeld is. Aan het eind van een vak hou ik de dagen direct na een tentamen zoveel mogelijk vrij om na te kijken.

3.4 Algemene bekwaamheden

Het is lastig om hier iets in algemene termen over te zeggen. Ik zal hier bij de reflectie nader op ingaan.

Hoofdstuk 4

Reflectie

Tell me, and I forget
Teach me, and I may remember
Involve me, and I learn

Benjamin Franklin

Vakinhoudelijk

Zoals eerder aangegeven denk ik dat ik voldoende achtergrond heb om mij de verschillende vakken binnen de (basis)opleiding eigen te kunnen maken. Het vak Probabilistisch Redeneren beslaat onderwerpen die alle een rol spelen binnen het gebied waarin ik mij ook als onderzoeker begeef. Dit geldt in veel mindere mate voor de onderwerpen die in het vak Besliskunde aan de orde komen, maar het is voor mij geen probleem om de informatie die ik ter invulling van het vak nodig denk te hebben daadwerkelijk te vinden. Tijdens mijn promotieonderzoek heb ik wat uitstapjes gemaakt naar de Experimentele Psychologie, wat mij geleerd heeft dat het heel leuk, leerzaam en interessant kan zijn om ook buiten je eigen vakgebied te kijken.

Didactisch

Op het moment dat ik de cursus 'Het maken van onderwijs' volgde, had ik al ervaring met het opzetten van het vak Besliskunde. De cursus ging veel meer over wat er allemaal moet gebeuren voor je een vak kan geven en waar verschillende onderdelen aan moeten voldoen, dan over hoe je daadwerkelijk te werk moet of kan gaan. Je moet bijvoorbeeld leerdoelen formuleren, er moet literatuur zijn, er moeten opgaven zijn, en elk van deze dingen moet aan een lijstje eigenschappen voldoen. Je moet rekening houden met voorkennis van de studenten, met het niveau, de inhoud van een vak moet een mooi afgebakend en gebalanceerd geheel zijn, etc. Het is erg handig om allemaal van die lijstjes met punten te hebben en als er eenmaal een vak ligt dan is het ook niet zo'n probleem om te kijken of er aan alle vereisten is voldaan, maar de vraag blijft hoe je een vak zo ontwikkelt dat aan alle eisen is voldaan. Dat blijft waarschijnlijk een kwestie van ervaring. Een van de dingen die ik goed onthouden heb van deze cursus is dat je ervoor moet zorgen dat studenten altijd weten wat van ze verwacht wordt, hoe dingen beoordeeld worden, en dat het handig is als ze tijdens het bestuderen van de stof geprikkeld worden om de stof niet alleen op te nemen maar ook te verwerken. Om deze reden heb ik voor Probabilistisch Redeneren een studiehandleiding geschreven waarin per hoofdstuk van het dictaat een lijstje korte vragen staat. Deze vragen zijn bedoeld om aan te geven waar ik verwacht dat studenten in ieder geval over nadenken als ze de stof bestuderen. Ook ben ik van plan om bij de taak van Besliskunde een beoordelingsformulier te maken zodat niet alleen duidelijk is welke eisen er aan de taak gesteld worden, maar ook hoe die beoordeeld zullen worden. Kortom, de effecten van de cursus zijn al direct zichtbaar in mijn onderwijs.

De onderwerpen voor het vak Besliskunde waren grotendeels nieuw voor mij. Het heeft me dan ook erg veel tijd gekost om me in te lezen, de stof te doorgronden en te bedenken hoe de stof over te brengen.

Eenmaal uitgedacht hoe de colleges in elkaar zouden moeten zitten was het intikken van de transparanten niet eens zo heel tijdrovend meer. Tussen het ontwikkelen en het geven van het vak ben ik een maand weggeweest en heeft alles een beetje kunnen bezinken. Het gevolg was wel dat ik bij terugkomst over een deel van de transparanten niet zo tevreden meer was en die heb ik, gedurende de eerste weken dat het vak liep en Linda de colleges verzorgde, alsnog aangepast. Gegeven het feit dat ik alles bij elkaar maar een college of zes ontwikkeld heb is de hoeveelheid tijd die het me gekost heeft wel erg tegengevallen. Dit wordt ook mede veroorzaakt door het feit dat de bronnen waar je je materiaal uithaalt niet altijd even duidelijk zijn en ik wil dan toch precies weten hoe iets in elkaar zit. Misschien is het helemaal niet nodig om bepaalde zaken tot de bodem toe uit te zoeken en zal geen student het in de gaten hebben als je je er een beetje doorheen bluft, maar het lijkt me geen prettig idee om voor een zaal te staan terwijl je zelf niet helemaal begrijpt wat je aan het vertellen bent. Ik weet nu in ieder geval dat als ik nog eens een compleet vak moet ontwikkelen dat ik daar heel ruim de tijd voor moet nemen.

Het lastige van het vak Besliskunde is dat het momenteel nog voor verschillende doelgroepen wordt gegeven: doctoraalstudenten MTI en masterstudenten. Dit heeft tot gevolg dat delen van de stof te moeilijk zijn voor de ene groep en te makkelijk voor de andere groep. Omdat het vak toch in de eerste plaats ontwikkeld is als mastervak zijn de MTI studenten daar wellicht het meest slachtoffer van. Wel hebben we geprobeerd niet alleen economisch getinte voorbeelden te gebruiken, maar ook medische voorbeelden. Ik heb echter begrepen dat dit laatste niet zo gewaardeerd werd: de niet MTI-ers willen over het algemeen geen medische voorbeelden en de wel MTI-ers zijn ze inmiddels ook een beetje zat. Dit is niet iets wat blijkt uit de evaluaties van het vak, maar dit heb ik persoonlijk van enkele studenten vernomen. Het was wel jammer dat zo weinig studenten de evaluatie ingevuld hadden, want we wilden echt graag weten wat ze van het vak vonden. Gelukkig zaten drie van de studenten die het vak gevolgd hebben ook in de OC en ik heb hen nog gevraagd of ze wat feedback konden geven. Hieruit bleek dat de MTI studenten de wat meer wiskundige onderdelen van het vak niet zo leuk vonden, maar dat hadden we ook wel verwacht. De masterstudenten hadden graag wat meer uitgedaagd willen worden. Het is wel de bedoeling dat de komende jaren, zeker als de laatste lichting MTI studenten is verdwenen, het vak en de tentamens wat moeilijker zullen worden. Vooralsnog denk ik dat het vak wel goed in elkaar zit, maar ik moet wel in de gaten houden dat de lijn van het vak op ieder moment goed zichtbaar is voor de studenten. Gegeven de verlenging van de onderwijsperiode is er ook wel ruimte om hier wat meer tijd aan te besteden, bijvoorbeeld door het toevoegen van een specifiek beslisprobleem waarin alle aspecten uit het hele vak in aan bod komen.

De cursus 'Hoorcollege geven' heb ik gevolgd vlak voor het moment dat ik zelf voor de tweede keer het vak Probabilistisch Redeneren zou geven. Het was prettig om aan die cursus te beginnen met niet alleen de ervaring van zelf colleges volgen, maar ze ook eens zelf gegeven te hebben. Op deze manier ben je zelf actiever bij de cursus betrokken omdat je weet waar je zelf tegenaan gelopen bent. De cursus gaf niet echt antwoord op de vragen die ik had, voornamelijk omdat er geen eenduidige antwoorden te geven zijn; alles hangt af van de situatie waarin je zit, je eigen persoonlijkheid en die van de mensen met wie je te maken hebt. In de cursus leer je op zich ook niet iets echt nieuws, behalve over jezelf doordat je twee minicolleges moet geven die op video worden opgenomen en die door de andere cursisten becommentariëerd worden. Het is wel heel handig om alle *tips & tricks* en *do's & don'ts* eens op een rijtje te hebben.

De eerste keer dat ik Probabilistisch Redeneren gaf (voorjaar 2001), heb ik dat gedaan op basis van de transparanten van Linda van der Gaag. Met hulp van Linda heb ik de stof over de verschillende colleges verdeeld en heb ik me 'het verhaal bij de transparanten' eigen gemaakt. Het feit dat ik het vak ooit zelf gevolgd heb was hierbij ook heel handig. Het is aan de ene kant wel fijn om materiaal van iemand over te nemen, want dan hoef je het zelf niet te maken; aan de andere kant is het ook wel lastig dat de transparanten niet je eigen verhaal vertellen, met name als het aantal transparanten per college niet erg groot is. Die eerste reeks colleges was ik dan ook erg bezig met het afdraaien van een min of meer ingestudeerd verhaal in plaats van het proberen over te brengen van de stof. Dit is overigens niet terug te zien in de evaluaties van het vak, hoewel dit misschien ook komt omdat ik de studenten verteld had dat ik nooit eerder college had gegeven en wellicht hebben ze me ontzien.

Van de cursus 'Hoorcollege geven' heb ik geleerd dat een hoorcollege alleen maar zin heeft als je studenten steeds bij je verhaal betrekt. Dit probeer ik door steeds aan te geven waarom ik bepaalde stof

behandel en hoe het in het grotere geheel past. Daarnaast probeer ik steeds meer om studenten tijdens het hoorcollege zelf aan het werk te zetten, niet alleen door ze steeds dingen te vragen maar ook door ze kleine opgaven te laten maken. In Besliskunde had ik al in een paar colleges een kleine opgave zitten, en nu er geen werkcollege meer is bij Probabilistisch Redeneren maar het aantal colleges is toegenomen heb ik een groot deel van de werkcollege opgaven geïntegreerd met de colleges. Ik vind dit erg prettig werken aangezien de studenten onmiddellijk zien dat ze dachten mijn verhaal te begrijpen maar niet kunnen reproduceren wat ik zojuist voorgedaan heb. Ze lijken hierdoor beter op te letten en zijn misschien ook eerder geneigd thuis nog eens naar de stof en de opgaven te kijken.

Ik vind het belangrijk dat ik de colleges niet voor niets sta te geven, daarom sta ik altijd open voor suggesties ter verbetering van zowel de colleges als andere onderdelen van een vak. Als ik ideeën ter verbetering krijg uit evaluaties, van studenten persoonlijk, van de tutor, uit cursussen of uit de wandelgangen, dan probeer ik die een volgende keer mee te nemen. Interactie vind ik daarom ook erg belangrijk, omdat je dan zelf ook ziet of de stof wel of niet overkomt. Ik merk dat Informatica studenten niet erg gewend zijn aan interactieve hoorcolleges, zeker als de groep wat groter is. Het went echter wel: als ik in eerste instantie mijn mond lang genoeg dicht hou dan komt er wel iemand met een antwoord en daarna gaat dat alleen maar makkelijker. Ook probeer ik de sfeer wat informeel te houden in de hoop dat dit de interactie bevordert. Als studenten mijn vragen verkeerd beantwoorden dan probeer ik daar, indien mogelijk, toch nog een goede draai aan te geven; hele slimme vragen of antwoorden probeer ik niet te nadrukkelijk te belonen en vragen waarvan het antwoord niet relevant is voor de rest van de groep bewaar ik tot na het college. Als er een vraag komt waarop ik het antwoord niet weet, dan vind ik het geen probleem om dat toe te geven en er een volgende keer op terug te komen. Ik kan me echter wel voorstellen dat dit laatste moeilijker is als je voor een groep eerste- of tweedejaars studenten staat.

Het prettigst vind ik het om college te geven in de 'platte' collegezaaltjes, omdat iedereen dan op gelijke hoogte zit, de studenten dichter bij elkaar en bij jou zitten en je ook tussen de studenten door kan lopen tijdens het college. In de 'oplopende' collegezalen zitten de studenten wat verder van je af, zeker als het er niet zoveel zijn en ze ook nog eens achter in de zaal gaan zitten. Bij Besliskunde heb ik een paar keer in zo'n zaal college gegeven en ik merk dat dat wel ten koste van de aandacht en interactie gaat. Ik heb veel meer moeite om met mijn stem de hele zaal te bereiken en mensen gaan achterin eerder zitten praten.

Kortom, ik kan ongetwijfeld nog veel leren over het geven van hoorcolleges, maar het lukt steeds beter, ik vind het leuk om te doen en volgens mij vinden de meeste studenten mijn colleges over het algemeen ook best leuk om te volgen. Het begeleiden van werkcolleges vind ik ook erg leuk, met name als de studenten graag met een hint op weg geholpen willen worden in plaats van alleen maar uit zijn op antwoorden en uitwerkingen. Het begeleiden van practica is niet mijn grootste hobby, omdat de studenten dan meestal alleen van je verwachten dat je in een oogopslag een foutje haalt uit een hele berg code; zodra het meer gaat over hoe een inhoudelijk probleem aan te pakken vind ik het leuker. De 'combisessies' waarin werkcollege en practicum gecombineerd worden zijn op zich een goed idee, maar werken in de praktijk slecht: bijna iedereen werkt dan aan het practicum en aan de werkcollegeopgaven komt men niet toe. De zalen zijn meestal ook te klein om ervoor te kiezen eerst een uur opgaven te maken en daarna een uur aan het practicum te werken, bovendien vind ik dat de studenten zelf die keuze moeten maken.

Het begeleiden van kleine groepjes of individuele studenten bij een project vind ik best moeilijk. Ik voel me erg verantwoordelijk voor de uitkomst van het project en moet er op letten niet te veel te sturen of over te nemen. Het is lastig om een balans te vinden tussen het geven van vrijheid aan een student en het afdwingen van bepaalde dingen. Als je vraagt of een student iets begrijpt en het antwoord is "ja", moet je dat dan nog eens controleren? Als je vraagt of een student iets gedaan heeft en het antwoord is "ja", moet je hem/haar dan vragen dat toch te laten zien? Ik was erg geneigd om te vertrouwen op wat mij gezegd wordt, maar inmiddels heb ik gemerkt dat je soms het gewenste antwoord krijgt in plaats van een eerlijk antwoord. Ook weet ik inmiddels dat studenten soms te zelfstandig kunnen zijn en zonder overleg al allerlei dingen gedaan hebben die eigenlijk niet meer terug te draaien zijn. Als er begeleiders op verschillende lokaties zijn dan is dat hierbij ook nog een complicerende factor. Tenslotte vind ik het lastig om in te schatten hoeveel werk je van iemand mag verwachten in bijvoorbeeld een half jaar. Bij het begeleiden van kleine groepjes studenten spelen er ook nog interessante groepsprocessen die je moet

proberen te doorgronden of zelfs doorbreken. Individuele begeleiding is dus zeker iets waar ik nog veel van kan en moet leren en waarover ik nog regelmatig mensen zal raadplegen.

Organisatorisch

Van nature ben ik goed georganiseerd, graag op tijd, redelijk precies en ik kan eigenlijk altijd alles wat ik nodig heb vinden. Ik denk dat deze eigenschappen mij goed van pas komen in de organisatie van mijn onderwijs.

Algemeen

In de manier waarop ik onderwijs geef en in de relatie tot studenten spelen een aantal persoonlijke dingen een rol. Zo wil de onderzoeker in mij altijd precies weten hoe dingen in elkaar steken en de vragen die ik mijzelf stel probeer ik ook de studenten te stellen. Hoewel ik ook eigenwijs ben en graag gelijk heb, ben ik de eerste om toe te geven dat ik er ook wel eens naast zit.

De docent in mij vindt het leuk om mensen iets te leren, en helemaal als ze er daarna blijk van geven het te kunnen of het begrepen te hebben. Het is frustrerend als iets niet overkomt, maar heel fijn als ineens bij iemand het kwartje valt.

Dan is er nog de oud-student in mij. Ik weet nog wat ik lastig vond in mijn eigen opleiding en hoe trouw(?) ik zelf mijn vakken volgde. Ik vind het geen probleem als iemand colleges overslaat of niet goed oplet, maar diegene moet dan maar zijn medestudenten raadplegen over welke stof precies gemist is. Globaal staat er overigens altijd op de website van een vak wat ik per college behandeld heb.

Tenslotte ben ik me bewust van het feit dat ik over het algemeen als een aardig iemand word gezien. Ik denk dat dit de drempel tussen mij en de studenten vrij laag houdt, alhoewel niet geheel afwezig. De sfeer bij mijn colleges en werkcolleges is altijd informeel, hoewel ik merk dat de nu in de masteropleiding instromende HBO studenten mij aanspreken met 'u' en 'mevrouw'. Ik ben hier, geloof ik, niet geheel blij mee, maar ik heb er ook niets van gezegd.

Tenslotte

Op deze plaats wil ik graag nog aangeven dat ik me realiseer dat ik een BKO aanvraag zonder het voorgeschreven traject te hebben doorlopen. Ik denk echter dat ik inmiddels wel aan de gestelde eisen heb voldaan. Door het niet formeel instappen op een BKO-traject heb ik natuurlijk het voordeel gehad dat ik niet binnen een bepaalde termijn aan de gestelde eisen heb hoeven voldoen. Echter, een nadeel is geweest dat de tijd die ik aan opleidingsactiviteiten heb besteed buiten het zelf verzorgen van onderwijs, is gekomen bovenop mijn aandeel van 30% in plaats van dat het inbegrepen was bij dit percentage; ditzelfde geldt voor de tijd die mijn tutor aan zeer waardevolle begeleiding gespendeerd heeft.

Bijlage A

Onderwijsmateriaal **Probabilistisch Redeneren**

Deze bijlage bevat een deel van het onderwijsmateriaal dat door mij is toegevoegd aan het bestaande vak Probabilistisch Redeneren. Tevens bevat deze bijlage tentamenuitslagen en de evaluaties van het vak.

Webpagina

- webpagina 2003-2004.

Transparanten

- *sensitiviteits-analyse* (uitbreiding van bestaand onderwerp; 0.5 college-uur);
- *de brier score* (1 college-uur);
- *het threshold model* (1 college-uur).

Overig studiemateriaal

- studiewijzer.

Tentamens en hertentamens

Bijgesloten tentamens bestaan steeds uit eigen opgaven en (deels) hergebruikte opgaven van hele oude tentamens.

- 2 juli 2001;
- 24 augustus 2001;
- 3 juli 2002;
- 21 augustus 2002;
- 25 oktober 2002;
- 2 januari 2003.

Uitslagen

Bij de uitslagen heb ik het tentamen en hertentamen van een jaar samengevoegd.

- uitslagen 2000-2001;
- uitslagen 2001-2002;
- uitslagen 2002-2003.

Studenten evaluaties

- evaluatie 2000-2001;
- evaluatie 2001-2002;
- evaluatie 2002-2003.

Universiteit Utrecht

Institute of Information & Computing Sciences

Course: Probabilistic Reasoning (Probabilistisch Redeneren)

CENTER FOR ALGORITHMIC SYSTEMS
MSc Programme ‘‘Algorithmic Systems" 2003-2004

CENTER FOR AGENTS AND COMPUTATIONAL INTELLIGENCE
CI track of the MSc Programme ‘‘Agents and Computational Intelligence" 2003-2004

Announcements:

Check this page regularly, for the overview of subjects may be updated during the course.

Contents

Goal
Schedule and Instructor
Subject overview
Grading
Literature
Applications
Software
Course evaluation
Other links

Goal

To gain insight in the use of probability theory for reasoning under uncertainty in knowledge-based systems. A more detailed course description can be found on the official course page.

Schedule and Instructors:

This course is given in Period 1: weeks 36 - 44 (2003); the final exam is in week 46, which leaves you one week to study the subjects from the last classes. Those who fail the final exam can have another go at it in week 52.

Lectures are given twice a week, on tuesday (13-15) and thursday (13-15).
For further details, see the official schedule.

Lecturer:
dr. Silja Renooij: CGN, office C008b (e-mail).

The following table lists the topics for each lecture together with the corresponding chapters and transparancies.

Week	Subject	Syllabus	Transp.
36-1 = 02-09	Introduction	Ch. 1	Ch1
36-2 = 04-09	Probability and independence	Ch. 2, § 3.1	Ch2
37-1 = 09-09	Independence relations and undirected graphical models	§ 3.1, § 3.2.1	Ch3
37-2 = 11-09	Directed graphical models	§ 3.2.2-3	"
38-1 = 16-09	Independence exercises + Introduction to Ch. 4.		Ch4-1
38-2 = 18-09	Belief network formalism	§ 4.1	"
39-1 = 23-09	Inference in trees	§ 4.2.1	Ch4-2
39-2 = 25-09	Exercise tree inference; Inference in singly connected graphs	§ 4.2.2	Ch4-3
40-1 = 30-09	Inference in singly connected graphs (exercises)		
40-2 = 02-10	Inference in multiply connected graphs	§ 4.2.3	"
41-1 = 07-10	Exercises Loop cutset conditioning; Construction of graph (by hand)	§5.1 + §5.2.1	Ch5-1
41-2 = 09-10	Automated construction	§ 5.2.2	"
42-1 = 14-10	Automated construction + exercise; Probability assessment	§ 5.3.1	"
42-2 = **16/10**	**No class!**		
43-1 = 21-10	Noisy-or gate	§ 5.3.2	Ch5-2
43-2 = 23-10	Expert assessment, Sensitivity Analysis	§ 5.3.3 § 5.3.4	"
44-1 = 28-10	Evaluation, Decision Support with PNs	§ 6.1, § 6.2	Ch6
44-2 = 30-10	Decision Support with PNs, Questions?	§ 6.2	"
45	**Self study**		
46: 12 nov.	**Exam**		

To gain more insight in inference and the effects of loop cutset conditioning use one of the free software packages available (here, or here), or, for example, using Java Bayes or Bayes Applet.

Grading

The course will be graded based on a written exam (open book): you can bring the syllabus and any supplementary reading material, the transparancies, and your notes. I strongly advise that you bring a calculator and you're, of course, also allowed to bring a dictionary.

As of this year (2003/2004), this course will be awarded 7.5 ECTS (approx. 210 hrs) instead of 4 sp (approx. 160 hrs). As a result of this increase in course load, I will expect a more in-depth understanding of and insight in the subjects treated. The final exam can therefore be expected to be more difficult than in previous years and will be more strictly graded.

Two examples of previous exams (in dutch!) are available (exam1, exam2); the first example is a few years old, the second is of July 2002.

Literature

Study manual: the study manual can help guide your self study.

Syllabus: Linda van der Gaag: Probabilistic Reasoning (version of 2002), available from the studentadministation in the BBL building.

Transparancies: the transparancies are considered supplementary material: although the syllabus covers all subjects, some are discussed in more detail on the transparancies (which are still in dutch!). Download all transparancies (no coloured text, for better printing) at once, or per chapter in colour (above).

Further reading:

For those seeking additional material, I recommend the following book:

J. Pearl
Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference
Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
(correspondence between book and course material)

Also, the following lecture notes (including some exercises) may be of interest:

L.C. van der Gaag, *Building Bayesian Networks, 2003.*

Software and Applications

No homework or lab assignments are required for the *Probabilistic Reasoning* (*Probabilistisch Redeneren)* course. The software listed below, however, may help you to gain more insight in the notion of independence (Chapter 3), and in inference in (Chapter 4) and the construction of (Chapter 5) probabilistic networks.

The following page contains an applet allowing you to test whether or not a node X is d-separated from a node Y given a set of nodes Z:

- d-separation tester

Numerous software packages have been developed for constructing and reasoning with probabilistic networks:

- overview of software for probabilistic networks;

- another overview.

A number of online tools (applets) have been developed that allow the same, but only for small networks:

- Java Bayes;
- A Bayes network editor;
- Bayes Applet;
- Bayesian Network Tools in Java;
- BATMAN, (only with SunSoft's HotJAva(TM) 1.0.4+ browsers (and SWING 1.0.3)).

Applications

Applications of Probabilistic Networks exist for several different problem domains. The following list of references point to an overview of deployed networks, a collection of well-known networks in different formats (some are toy-examples!), and a technical report about the network for oesophageal (slokdarm) cancer:

deployed applications;
network collection;
the oesophagus network;

Course evaluation

To guard the quality of our educational programme, each year every course is evaluated by the students that registered for the course. The student-evaluation helps instructors to evaluate and if necessary adapt their courses and allows the Institute to evaluate its teachers. For the evaluations to be useful it is necessary to get respons from a large number of participants.

My intention is that you find the course on probabilistic reasoning interesting, motivating, perhaps a bit difficult now and again but doable, challenging and enjoyable, and last but not least I hope that you feel that you have learnt many useful things. If for some reason the course wasn't what you'd expected and/or if you have any (reasonable) suggestions to improve the course and everything that comes with it, please fill out the evaluation form. Suggestions from the evaluations have for example resulted in online and numbered transparancies. If you're completely satisfied then I'd also like to know that and filling out the evaluation form would be a way of telling me this.

For those who are interested, I provide links to the **evaluations of previous years**. Note that these can be viewed internally only. For each evaluation I list the number of *registrants* (union of OSIRIS subscribers and participants), the number of *participants* (distinct students that participated in and submitted an exam in that year), and the number of *respondents (*students that filled out the evaluation form).

Previous lecturer:

- 1999/2000 (page 37) (respondents: 9)

Current lecturer:

- 2000/2001 (33 registrants, 24 participants, 5 respondents)
- 2001/2002 (30 registrants, 22 participants, 7 respondents)
- 2002/2003 (40 registrants, 33 participants, 16 respondents)
- not yet available: 2003/2004 (30 registrants, ?? participants, ?? respondents)

Other links

- The Center for Algorithmic Systems.
- The MSc programme 'Algorithmic Systems'.
- The MSc programme 'Agents and Computational Intelligence'.

Silja Renooij 22 October, 2003.

Sensitiviteitsanalyse: One-way

Wanneer in een sensitiviteits analyse van een probabilistisch netwerk de kansschattingen afzonderlijk gevariëerd worden, spreekt met van een 1-weg (one-way) sensitiviteitsanalyse.

- Welke kansschattingen $\gamma_{V_j}(c_{V_j} \mid c_{\rho(V_j)})$ moeten er gevariëerd worden?

  voorheen: alle schattingen voor alle variabelen in het netwerk;

  nu: alleen de schattingen voor variabelen in de sensitiviteits set van de uitkomst variabele V_i waar je in geïntereseerd bent. (apriori alleen $\rho^*(V_i)$)

- Hoe worden de kansschattingen gevariëerd?

  voorheen: in stapjes, bijvoorbeeld van 0.1;

  nu: gebruik maken van het feit dat de kans op c_{V_i} een functie is van de gevariëerde parameter: stel $x = \gamma_{V_j}(c_{V_j} \mid c_{\rho(V_j)})$ en $f(x) = \Pr(c_{V_i})$ dan

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

Selectie van gevoelige kansschattingen

Een sensitiviteitsanalyse van een probabilistisch netwerk levert een enorme hoeveelheid data op.

Voorbeeld:

In het oesofagus netwerk zijn er apriori 206 kansschattingen die de kansen op de waarden voor *Stagering* kunnen beïnvloeden; we vinden dus 1236 $(6 \cdot 206)$ sensitiviteits functies.

Gegeven observaties voor de verschillende patienten (156) kan het aantal invloedrijke kansschattingen oplopen tot 826. ■

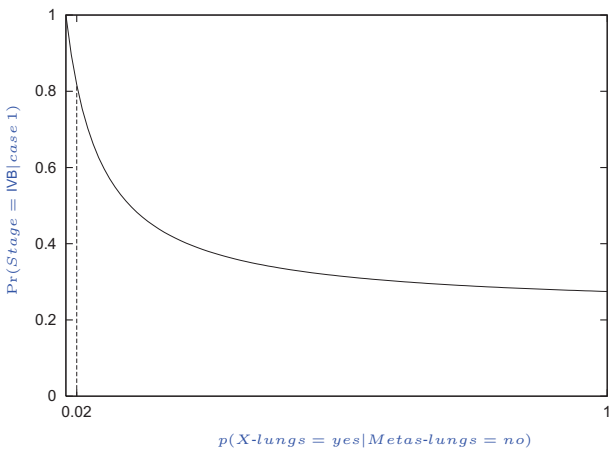
Selectiecriteria:

De kansschattingen die interessant zijn om nader te bekijken, kunnen geselecteerd worden op basis van

- de afgeleide van de sensitiviteits functie;
- de afstand van de oorspronkelijke kansschatting tot de *schouder* van de functie;
- de toegestane afwijking waarbij de meest waarschijnlijke waarde van de variabele die je bekijkt omslaat.

De afgeleide als selectiecriterium

De afgeleide van de sensitiviteitsfunctie $f(x)$ in het punt $(p, f(p))$ geeft aan hoe groot de verschuiving in de kans waarin je geïnteresseerd bent zal zijn als je kansschatting p varieert.

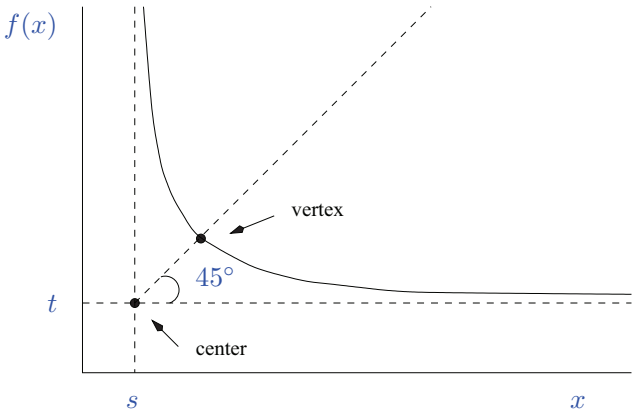


$$f'(0.02) = 6.97$$

Probleem: de afgeleide is alleen een goede benadering van de functie voor $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$. De afgeleide is dus niet altijd een goed selectiecriterium.

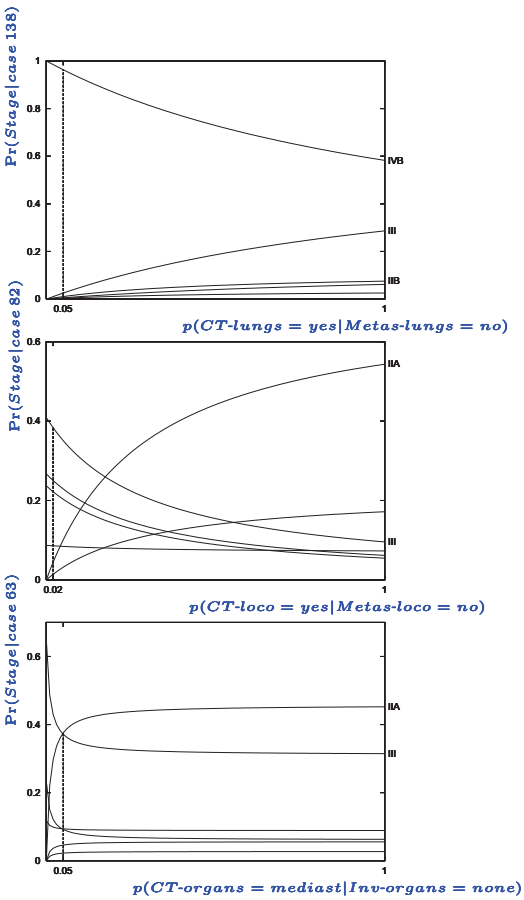
De *schouder* van de sensitiviteits functie

In de buurt van de schouder van een sensitiviteits functie kan de afgeleide klein zijn, terwijl een kleine verschuiving toch een groot effect kan hebben.



Oplossing: kansschattingen in de buurt van x_{vertex} selecteren ongeacht de waarde van de afgeleide.

De toegestane afwijking



Evaluatie van Probabilistische netwerken

Een evaluatie van de praktische waarde van een probabilistisch netwerk bestaat uit de volgende stappen:

- selecteer de te evalueren cases (bijv. uit data);
- selecteer de uitkomst variabele(n) waarin je geïnteresseerd bent;
- kies een validiteits standaard;
- bereken met het netwerk de uitkomst voor elke casus;
- vergelijk deze uitkomst met je validiteits standaard.

Evaluatie van probabilistische netwerken: een voorbeeld

Veronderstel dat we de praktische waarde van het oesofagus netwerk willen evalueren.

- we beschikken over de symptomen en testresultaten van 156 patiënten (gemiddeld: 14.8 van de 25, per patiënt);
- we zijn geïnteresseerd in de *Stagering* van de tumor: I, IIA, IIB, III, IVA, IVB;
- als validiteits standaard gebruiken we de inschatting van de stagering, gegeven door de artsen.

We berekenen nu mbv het oesofagus netwerk voor elk van de 156 patiënten de stagering.

Een patiënt

Passage:	kan nog gepureerd voedsel innemen
Gewichtsverlies:	geen
Biopten:	plaveiselcel
Bronchoscopie:	×
CT:	×
(lever, locoregio, longen, organen, truncus)	
Echo-hals:	×
Echoendoscopie:	×
(locoregio, mediastinum, truncus, wandlagen)	
Gastroscopie	
circumf:	circulair
lengte:	7 cm
lokatie:	proximaal
necrose:	afwezig
vorm:	polypoid
Laparascopie:	×
(lever, middenrif, truncus)	
Lich. onderzoek:	gezwollen lymfklieren hals
Slikfoto:	×
X-longen:	uitzaaïngen

Diagnose: stagering = I / IIA / IIB / III / IVA / (IVB)

Het percentage correct

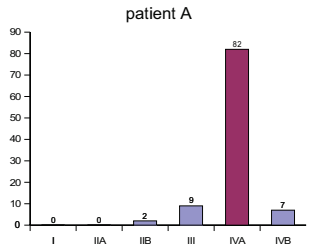
Een probabilistisch netwerk geeft als resultaat van het invoeren van aanwijzingen een a posteriori kansverdeling voor de uitkomst variabele. De validiteits standaard bestaat vaak echter uit een enkele waarde van de uitkomst variabele.

- Om het resultaat tegen de validiteits standaard te kunnen vergelijken wordt de meest waarschijnlijke waarde van de uitkomst variabele gekozen als *de* uitkomst;
- *de* uitkomst wordt nu vergeleken met de waarde gegeven door de standaard: de uitkomst is òf correct òf incorrect.

Het percentage van de cases waarbij de uitkomst voorspeld door het netwerk overeenkomt met de uitkomst volgens de validiteits standaard is het percentage correct.

Het percentage correct: een voorbeeld

Veronderstel dat we voor elke patiënt de meest waarschijnlijke stagering gegeven door het oesofagus netwerk vergelijken met de stagering gegeven door de betrokken artsen.



We zien dan dat voor 133 van de 156 patiënten het netwerk een correcte voorspelling doet:

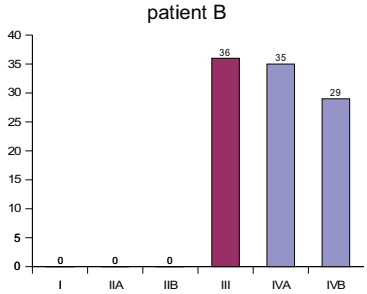
		netwerk						
		I	IIA	IIB	III	IVA	IVB	*totaal*
	I	**2**	0	0	0	0	0	2
	IIA	0	**37**	0	1	0	0	38
arts	IIB	0	1	**0**	3	0	0	4
	III	1	10	0	**36**	0	0	47
	IVA	0	0	0	4	**35**	0	39
	IVB	0	0	0	3	0	**23**	26
	totaal	3	48	0	47	35	23	156

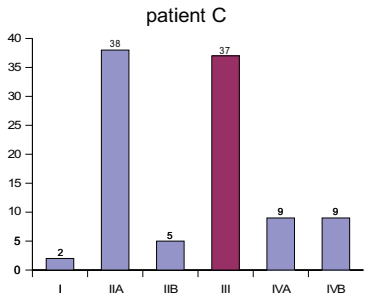
Het percentage correct is dus 85%.

Verklaring van verschillen

Verschillen tussen de uitkomsten van een netwerk en de validiteits standaard kunnen ontstaan door

- fouten in het model;
- fouten in de standaard;
- random variatie:





Evaluatie scores: de *Brier* score

De onzekerheid uitgedrukt in de kansverdeling voor de uitkomst variabele kan meegenomen worden in de evaluatie.

Laat p_{ij} de door het netwerk voorspelde kans zijn voor casus i en waarde j van de uitkomst variabele.

Laat s_{ij} een functie zijn die 1 oplevert als voor casus i de gebruikte standaard waarde j geeft voor de uitkomst variabele, en anders 0 oplevert.

De Brier score voor casus i is nu

$$B_i = \sum_j (p_{ij} - s_{ij})^2$$

De Brier score ligt in het interval $[0, 2]$, waarbij 0 een perfecte voorspelling aanduidt.

De Brier score: een voorbeeld

Beschouw de een evaluatie van het oesofagus netwerk. Laat p_{ij} de door het netwerk voorspelde kans zijn voor patiënt i en stagering $j \in \{I, \ldots, IVB\}$.

De functie s_{ij} levert 1 op als in het dossier van patiënt i stagering j staat; anders levert de functie 0 op.

De Brier score voor patiënt i is nu

$$B_i = \sum_{j=\text{I},\ldots,\text{IVB}} (p_{ij} - s_{ij})^2$$

Voor de patiënten A, B en C vinden we de volgende scores:

$$\begin{aligned} B_A &= (0-0)^2 + (0-0)^2 + (0.02-0)^2 \\ &\quad + (0.09-0)^2 + (0.82-1)^2 + (0.07-0)^2 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_B &= (0-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 \\ &\quad + (0.36-1)^2 + (0.35-0)^2 + (0.29-0)^2 \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_C &= (0.02-0)^2 + (0.38-0)^2 + (0.05-0)^2 \\ &\quad + (0.37-1)^2 + (0.09-0)^2 + (0.09-0)^2 \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

Gemiddelde Brier score

Naast een Brier score per voorspelling, kunnen we een gemiddelde Brier score over n voorspellingen berekenen:

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=1,\ldots,n} B_i$$

Een voorbeeld

Voor het oesofagus netwerk berekenen we de gemiddelde Brier score over alle patiënten die in een vakje van de 6 bij 6 tabel vallen:

		netwerk					
		I	IIA	IIB	III	IVA	IVB
arts	I	**0.21**	–	–	–	–	–
	IIA	–	**0.28**	–	1.52	–	–
	IIB	–	1.17	–	0.98	–	–
	III	1.40	0.89	–	**0.26**	–	–
	IVA	–	–	–	0.75	**0.08**	–
	IVB	–	–	–	0.87	–	**0.06**

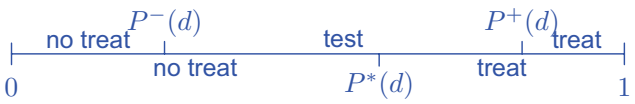
De gemiddelde Brier score over alle 156 patiënten is: 0.29

Een voorbeeld: threshold decision making

Het doel van threshold decision making is het bepalen van de beste beslissing inzake behandeling. Een systeem voor threshold decision making heeft de volgende taken:

- Diagnostisch redeneren

  Het systeem bepaalt de meest waarschijnlijke oorzaak (diagnose) van het probleem, en bijbehorende kans $\Pr(d)$, op grond van de beschikbare informatie over de manifestaties ervan.



- Behandeling adviseren

  Het systeem geeft advies inzake behandeling. Het advies hangt af van de kans $\Pr(d)$ op de diagnose en de drempelwaarden die voor de verschillende behandelingen zijn bepaald.

Een voorbeeld: threshold decision making

In een probabilistisch netwerk kan de volgende informatie niet gerepresenteerd worden:

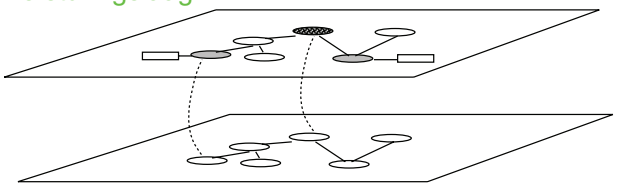
- kennis over het nut van de verschillende mogelijke behandelingen;
- kennis over de verschillende drempelwaarden.

De met een probabilistisch netwerk geassocieerde algoritmen bieden geen procedures voor de volgende taken:

- het berekenen van het verwachte nut van behandelingen;
- het vergelijken van de diagnose kans met de drempelwaarden.

De twee-lagen architectuur

De sturingslaag



De probabilistische laag

De twee lagen communiceren als volgt met elkaar:

- de sturingslaag vraagt probabilistische informatie aan de probabilistische laag en neemt op grond van de verkregen informatie een strategische beslissing;
- de sturingslaag stuurt aanwijzingen naar de probabilistische laag;
- de probabilistische laag propageert de ingevoerde aanwijzingen en berekent de gewenste probabilistische informatie.

Utiliteiten en drempelwaarden

Het bepalen van drempelwaarden voor de verschillende behandelingen hangt af van het nut van een behandeling:

- met elke combinatie c_{DT} van waarden voor ziekte D en behandeling T is een utiliteit $u(c_{DT})$ geassocieerd – zo'n utiliteit is subjectief en modelleert de wenselijkheid van uitkomst c_{DT};
- voor elke behandeling c_T wordt een verwachte utiliteit $\hat{u}(c_T)$ berekend – deze verwachte utiliteit is de gewogen som van de utiliteiten voor elke combinatie c_{DT} van ziekte en behandeling, en de kans op de ziekte gegeven de beschikbare informatie e:

$$\hat{u}(c_T) = \sum_{c_{DT}} u(c_T \wedge c_D) \cdot \Pr(c_D \mid e)$$

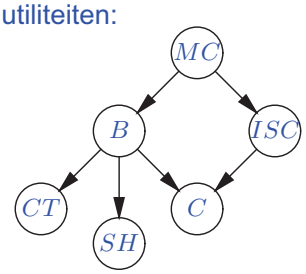
  waarin c_{DT} gelijk is aan $c_T \wedge c_D$.

De drempelwaarden voor de mogelijke behandelingen worden berekend uit de verwachte utiliteit voor de verschillende behandelingen.

De utiliteiten en drempelwaarden zijn alleen in de sturingslaag bekend. Alleen de sturingslaag kan verwachte utiliteiten berekenen.

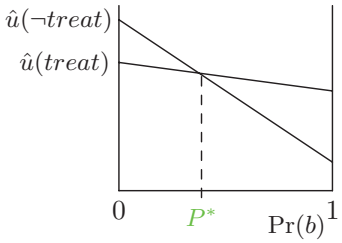
Een voorbeeld

Beschouw het volgende probabilistische netwerk en utiliteiten:



$u(\neg treat \wedge b) = 0.02$
$u(\neg treat \wedge \neg b) = 1.00$
$u(treat \wedge b) = 0.50$
$u(treat \wedge \neg b) = 0.92$

Een patiënt heeft met kans $\Pr(b) = 0.10$ een hersentumor. Moet deze patiënt wel of niet behandeld worden?



De drempelwaarde P^* wordt berekend uit de verwachte utiliteit $\hat{u}$ van wel of niet behandelen:

$$\begin{aligned}\hat{u}(treat) &= u(treat \wedge b)\cdot\Pr(b) + u(treat \wedge \neg b)\cdot\Pr(\neg b)\\ &= 0.50\cdot\Pr(b) + 0.92\cdot(1 - \Pr(b))\\ &= -0.42\cdot\Pr(b) + 0.92\end{aligned}$$

$$\hat{u}(\neg treat) = -0.98\cdot\Pr(b) + 1.00$$

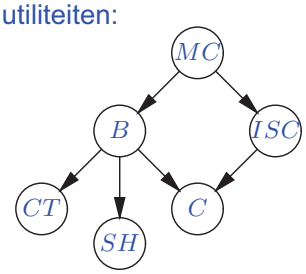
Een voorbeeld: threshold decision making

De sturings laag en probabilistische laag hebben voor threshold decision making de volgende functies:

- Sturings laag
  - opslag van subjectieve utiliteiten
  - berekenen van verwachte utiliteiten
  - berekenen van drempelwaarden
  - vergelijken van $\Pr(d)$ met drempelwaarden
- Probabilistische laag
  - berekenen van $\Pr(d)$
  - berekenen van $\Pr(d \mid test\ resultaat)$

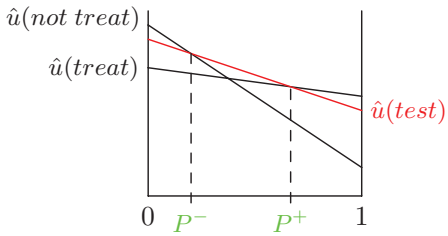
Een voorbeeld

Beschouw het volgende probabilistische netwerk en utiliteiten:



$u(not\ treat \wedge b) = 0.02$
$u(not\ treat \wedge \neg b) = 1.00$
$u(treat \wedge b) = 0.50$
$u(treat \wedge \neg b) = 0.92$
$u(test \wedge b) = 0.45$
$u(test \wedge \neg b) = 0.98$

Een patiënt heeft met kans $\Pr(b) = 0.10$ een hersentumor. Kan het resultaat van een CT-scan de beslissing tot wel of niet behandelen beïnvloeden?



De drempelwaarden P^- en P^+ worden berekend uit de volgende verwachte utiliteiten $\hat{u}$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(not\ treat) &= -0.98\cdot\Pr(b) + 1.00\\ \hat{u}(treat) &= -0.42\cdot\Pr(b) + 0.92\\ \hat{u}(test) &= -0.53\cdot\Pr(b \mid ct) + 0.98\end{aligned}$$

Study Manual (Studiewijzer)

Probabilistic Reasoning

2003- 2004

Silja Renooij

July 29, 2003

General information

This study manual was designed to help guide your self studies. As such, it does not include material that is not already present in the syllabus or discussed in class. Hopefully, it will help you take a deeper dive into the subjects and enhance your understanding.

The Probabilistic Reasoning course is a 7.5 ECTS course, which means that an average student is expected to require 210 hours of work to complete and pass the course.

The course is graded based on a written exam (open book). During this exam you may consult the syllabus, this manual and any supplementary reading material, the transparencies, and your notes. An open book exam always seems easy: anything can be looked up during the exam. However, I expect knowledge of the subjects as if the exam were closed book, I expect insight and, most importantly, understanding. This also means that you have practised with applying different procedures and algorithms and can correctly do so in little time.

A important note on applying procedures and algorithms: there is a difference between solving a problem and applying an algorithm that solves the problem. If an exercise or exam asks you to solve a problem, you can use whatever method you think is most suitable to do the job. If, however, you are required to solve a problem using a certain algorithm, then you are basically asked to illustrate how the algorithm can be used to solve the problem and you should execute the steps prescribed by the algorithm yourself. For example, if you are asked to compute a certain probability from a set of given probability, you may use whatever rules from probability theory you can apply. If you are asked to compute a probability using Pearl's algorithm (see Chapter 4), then you should perform exactly those computations prescribed by the algorithm, even if the example is such that there are more efficient ways of solving the problem by hand! Therefore, if you are asked to apply an algorithm, I am basically asking if you understand how the algorithm works, not if you are able to solve the problem for which the algorithm is designed.

This study manual lists a number of questions that can help to guide your self-study of each chapter in the syllabus. For some subjects (*Pearl*'s algorithm of Chapter 4), I provide some background or intuition that is discussed during class, but not included as such in the syllabus. For each chapter, also a list of exercises and some answers is given. The exercises enable you to practice what you have learned and give an idea of what you should be able to do if you fully understand the material. The questions and exercises should indicate how you are doing thus far.

The exercises listed by only numbers can be found in the syllabus at the end of each chapter. Most of these exercises are former exam questions. Two examples of previous exams (in Dutch[1]) are available through the web-site.

[1] Unfortunately, some parts of this manual still contain descriptions and exercises in Dutch.

Chapter 1

The first chapter gives some historical background about the use of probability theory and other uncertainty formalisms for reasons of decision support. It briefly motivates the emergence of Probabilistic networks (or: Bayesian belief networks) and the reason why probabilistic network applications often have a medical nature.

Questions

- What is mutually exclusive?
- What is collectively exhaustive?
- Which assumption is made in a naive Bayes approach for reasons of *time* complexity, what is the reduction achieved and why?
- Which assumption is made in a naive Bayes approach for reasons of *space* complexity, what is the reduction achieved and why?
- Why is a naive (or idiot) Bayes approach naive?
- What is the relation between a naive Bayes approach and GLADYS?

Chapter 2

This chapter refreshes the necessary concepts from graph- and probability theory, which have already been discussed in other courses and can be found in any textbooks on graph theory and probability theory. It also introduces the notation that is used throughout the syllabus and which may differ from what you encountered previously.

Definition 2.1.1 mentions the *reflexive* and *transitive closure* of a set under either the predecessor or the successor relation. Recall that the reflexive closure of set A is set A itself and the transitive closure is the set A' with elements that result from repeated application of the relation to the elements of A. For example, $\rho_G^* V_i$ consists of vertex V_i (reflexive closure), the predecessors of V_i, the predecessors of the predecessors of V_i, etc. (transitive closure).

Probability theory is often approached from a set-theoretic point of view. Probability distributions are then defined on *sets* of elements that represent events. All possible outcomes of an experiment (for example, the possible outcomes of rolling a die) are given by the sample space Ω and each event A is a subset of Ω. A probability measure/function/distribution then is a function from events to the $[0, 1]$ interval. As events are sets, combinations of events can be expressed using operations on sets such as union ($\cup$) and intersection ($\cap$). Outcomes of an experiment are often *coded* by using a *random variable* (also: *statistical/ stochastic variable*) which is a function from the sample space to another space (such a reals). By writing probability distributions on statistical variables, the notation suppresses references to the actual sample space. However, as a statement about a statistical variable defines an event, there is no actual difference.

In the Probabilistic Network community statistical variables are taken to be functions from Ω to Ω. For a variable V defined on outcomes *true* and *false*, for example, we therefore have $V(\mathit{true}) = \mathit{true}$ and $V(\mathit{false}) = \mathit{false}$. We now simply say that V can have or take on one of the *values true* and *false*, in which case we write $V = \mathit{true}$ or $V = \mathit{false}$ as possible *value-assignments*. The Probabilistic Network community approaches probability theory from an algebraic point of view by associating probabilities with *logical propositions* instead of sets. The approaches are equivalent since the probability of an event (a set of outcomes) is equivalent to the probability of truth of the proposition asserting occurrence of the event. A probability distribution is now defined on "the Boolean algebra of propositions spanned by the set of statistical variables V" which is simply the set of all propositions that can be constructed with the logical operators conjunction ($\wedge$), disjunction ($\vee$) and negation ($\neg$) from the atomic propositions of the form $V_i = \mathit{value}$.

Example Suppose X and Y are statistical variables representing a coin toss. Let A be the event that $X = \mathit{heads}$ and $Y = \mathit{tails}$ then the probability of this happening is

> from a set-theoretic point of view: the probability of event A, written $\Pr(A)$;
> from an algebraic point of view: the probability that ($X = \mathit{heads}$ and $Y = \mathit{tails}$) $\equiv \mathtt{T}(\mathrm{rue})$, written $\Pr(X = \mathit{heads} \wedge Y = \mathit{tails})$

If $X = \mathit{heads}$ and $Y = \mathit{tails}$ were considered two separate events A and B, then this would make no difference from the algebraic point of view, but in the set-theoretic approach we should now write $\Pr(A \cap B)$.

The syllabus introduces the terms *configuration* and *configuration template*. A configuration c_V is nothing more than a short-hand notation to indicate that you are considering a

proposition that consists of the conjunction of atomic propositions representing *some* value assignment to each variable in the set V. Writing c_V, $V = \{V_1, \ldots V_n\}$, instead of $V_1 = \textit{some value} \wedge V_2 = \textit{some value} \wedge \ldots \wedge V_n = \textit{some value}$ is very convenient, especially if you don't care about the actual values and variables. A configuration template C_V is a short-hand notation for an even more general statement, namely about *all possible* value assignments to the variables in V. Note that the formula in Proposition 2.2.5 can be rewritten using configuration templates:

$$\Pr(C_V) = \Pr(V_n \mid C_{V\setminus\{V_n\}}) \cdot \ldots \cdot \Pr(V_2 \mid V_1) \cdot \Pr(V_1),$$

which represents that for all possible configurations c_V of V, $c_{\{V_n\}}$ of $\{V_n\}$, $c_{V\setminus\{V_n\}}$ of $V\setminus\{V_n\}$, $\ldots$, $c_{\{V_2\}}$ of $\{V_2\}$ and $c_{\{V_1\}}$ of $\{V_1\}$:

$$\Pr(c_V) = \Pr(c_{\{V_n\}} \mid c_{V\setminus\{V_n\}}) \cdot \ldots \cdot \Pr(c_{\{V_2\}} \mid c_{\{V_1\}}) \cdot \Pr(c_{\{V_1\}}).$$

Finally, note that for a single vertex V_i we have that $C_{\{V_i\}} = V_i$ and that $\Pr(V_i)$ has therefore an entirely different meaning than it would from a set-theoretic point of view!

Questions

- Is there a limit to the number of times a certain vertex may be included in a path?
- What is the difference between a path and a chain in a directed graph?
- What is the difference between a loop and a cycle in a directed graph?
- What is the difference between a tree, a singly connected digraph and a multiply connected digraph?
- When can we use the operators $\cap$ and $\cup$?
- When can we use the operators $\wedge$ and $\vee$?
- What is the difference between the proposition `T`(rue) and a value *true* for a variable?
- What is the difference between a *joint* probability distribution, a *conditional* probability distribution, and a *marginal* probability distribution?
- What is the difference between a *value assignment*, a *configuration* and a *configuration template*?
- Why is it the case that for two sets of variables X and Y $C_{X\cup Y} = C_X \wedge C_Y$ is the only correct way of expressing the configuration template over both sets X and Y in terms of the separate configuration templates?
- What is the relation between the *marginalisation* and the *conditioning* property?
- What is the difference between independence of *propositions* and independence of *variables*?
- Suppose a (not necessarily binary) statistical variable V can take on the values $v_1, \ldots, v_n$. Why does the definition of probability distribution imply that $\sum_{i=1}^{n} \Pr(v_i) = 1$?
- What is the difference between (in)dependence and conditional (in)dependence?

Exercises and Answers

Syllabus (algebraic point of view):

2.1 use only definitions and not the properties you are asked to derive in this exercise. An example of the types of proof requested is given below the exercise for part d).

2.2

2.3

2.4 the proof of the property is given.

The following exercises (in Dutch) were designed for the statistics course and can be used to refresh your memory; note that these exercises assume probability distributions to be defined on sets of events (set-theoretic point of view).

1. Joost heeft de laatste tijd erg veel last van niesbuien. Hij besluit naar zijn huisarts te gaan om zich op hooikoorts te laten testen. De huisarts vertelt Joost dat hooikoorts ongeveer bij 1 op de tien nederlanders voor komt.

   a. De **a priori** kans $P(H)$ dat Joost hooikoorts heeft is de kans op hooikoorts in het geval we verder niets over Joost weten. Wat is deze kans?

   De huisarts neemt een huidtest af; later blijkt het resultaat positief, dat wil zeggen dat de test aangeeft dat Joost inderdaad hooikoorts heeft.

   b. Kan je nu een inschatting maken van de kans dat Joost toch geen hooikoorts heeft?

   Joost vraagt de huisarts hoe betrouwbaar de huidtest eigenlijk is. De arts zegt dat voor 70% van de mensen met hooikoorts en voor 90% van de mensen zonder hooikoorts, de test een correcte uitslag geeft.

   c. Welke voorwaardelijke kansen worden hier beschreven?

   d. Zonder te rekenen, hoe groot schat je de kans dat Joost ondanks de testuitslag toch geen hooikoorts heeft?:
   tussen de 0 en 0.2,
   tussen de 0.2 en 0.4,
   tussen de 0.4 en 0.6,
   tussen de 0.6 en 0.8, of
   tussen de 0.8 en 1

   e. Bereken met de *conditioneringsregel* de a priori kans op een positief testresultaat. NB Deze regel wordt vaak de regel voor **totale kans** genoemd.

   De betrouwbaarheid van een test wordt gegeven in termen van de kans op een bepaalde testuitslag gegeven dat een patient de aandoening waarop getest wordt al of niet heeft. Voor de keuze van een behandeling en voor een patient zelf is het echter van belang het omgekeerde te weten: wat is de kans op een aandoening gegeven de testuitslag.

   f. Welke regel kan worden gebruikt voor het 'omdraaien' van voorwaardelijke kansen?

   g. Bereken de kans dat Joost geen hooikoorts heeft, al was de testuitslag positief. Komt dit antwoord overeen met je antwoord bij onderdeel d.?

   Intermezzo Er bestaan twee equivalente definities van onafhankelijkheid van twee gebeurtenissen A en B:

   (a) A en B heten *onafhankelijk* als $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
   (b) A en B heten *onafhankelijk* als $P(A \mid B) = P(A)$.

Er bestaan tevens twee equivalente definities van *conditionele* onafhankelijkheid van twee gebeurtenissen A en B gegeven een derde gebeurtenis C:

(a) A en B heten *onafhankelijk gegeven* C als

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C);$$

(b) A en B heten *onafhankelijk gegeven* C als $P(A \mid B \cap C) = P(A \mid C)$.

2. Veronderstel dat de huisarts van Joost uit de vorige opgave ook een bloedtest afneemt.

   a. Zijn de uitslagen van de huidtest en bloedtest afhankelijk of onafhankelijk van elkaar?

   b. Stel je bent alwetend en je zou zeker weten dat Joost hooikoorts heeft. Zijn de uitslagen van de huidtest en bloedtest nu afhankelijk of onafhankelijk van elkaar?

   Stel dat je voor beide tests afzonderlijk weet wat de kans op een bepaald testresultaat is gegeven de aan- of afwezigheid van hooikoorts. Je wilt de formule van Bayes gebruiken om de kans te berekenen dat Joost hooikoorts heeft gegeven beide testuitslagen.

   c. Schrijf de formule van Bayes uit voor deze kans.

   d. Welke aannames met betrekking tot (conditionele) (on)afhankelijkheid moet je maken om deze kans te kunnen berekenen uit de gegevens over de betrouwbaarheid van de tests?

3. Stel je hebt een populatie van 1000 mannen en vrouwen. Beschouw de volgende gebeurtenissen: $M = \{\text{iemand is een man}\}$, $V = \{\text{iemand is een vrouw}\}$, $A = \{\text{iemand draagt make-up}\}$ en $B = \{\text{iemand draagt geen make-up}\}$.

   a. Gebruik je intuitie om te bepalen of de gebeurtenissen M en B afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   Veronderstel dat de populatie door de volgende frequentietabel wordt weergegeven:

	M	V
A	50	300
B	350	300

   b. Gebruik de definitie van onafhankelijkheid om te bepalen of de gebeurtenissen M en B onafhankelijk zijn.

   c. Stel dat we van bovenstaande populatie alleen volwassenen beschouwen. Gebruik je intuitie om te bepalen of gegeven de gebeurtenis $\{\text{iemand is volwassen}\}$ de gebeurtenissen M en B afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   d. Stel dat we van bovenstaande populatie alleen kinderen beschouwen. Gebruik je intuitie om te bepalen of gegeven de gebeurtenis $\{\text{iemand is kind}\}$ de gebeurtenissen M en B afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   Veronderstel dat we de populatie opsplitsen in kinderen K en volwassenen G:

	M		V	
	G	K	G	K
A	50	0	300	0
B	150	200	50	250

   e. Gebruik de definitie van onafhankelijkheid om te bepalen of, gegeven de gebeurtenis K, de gebeurtenissen M en B onafhankelijk zijn.

4. Stel je hebt een populatie van 1000 personen. Beschouw de volgende gebeurtenissen: $H = \{\text{iemand is hondenbezitter}\}$, $K = \{\text{iemand is geen hondenbezitter}\}$, $S = \{\text{iemand is bildragend}\}$ en $G = \{\text{iemand is niet bildragend}\}$.

   a. Gebruik je intuitie om te bepalen of de gebeurtenissen H en S afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   Veronderstel dat de populatie door de volgende frequentietabel wordt weergegeven:

	S	G
H	50	200
K	150	600

   b. Gebruik de definitie van onafhankelijkheid om te bepalen of de gebeurtenissen H en S onafhankelijk zijn.

   c. Stel dat we van bovenstaande populatie alleen vrouwen beschouwen. Gebruik je intuitie om te bepalen of gegeven de gebeurtenis $\{\text{iemand is vrouw}\}$ de gebeurtenissen H en S afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   d. Stel dat we van bovenstaande populatie alleen ernstig visueel gehandicapten beschouwen. Gebruik je intuitie om te bepalen of gegeven de gebeurtenis $\{\text{iemand is 'blind'}\}$ de gebeurtenissen H en S afhankelijk of onafhankelijk van elkaar zijn.

   Veronderstel dat we de populatie opsplitsen in 'blinden' B en niet 'blinden' Z:

	S		G	
	Z	B	Z	B
H	30	20	195	5
K	140	10	595	5

   e. Gebruik de definitie van onafhankelijkheid om te bepalen of, gegeven de gebeurtenis B, de gebeurtenissen S en H onafhankelijk zijn.

5. Beschouw de gebeurtenissen A en $B_1, \ldots, B_n$, waarvan de B_i, $i = 1, \ldots, n$, tezamen een partitie vormen. Voor deze gebeurtenissen geldt de *marginalisatieregel*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

   Kies zelf een gebeurtenis A en tenminste drie gebeurtenissen B_i en gebruik die om te motiveren waarom de marginalisatieregel bestaat.

6. Stel een vak kent n deeltoetsen; elke toets t_i gaat over de stof van week i, $i = 1, \ldots, n$. Laat T_i de gebeurtenis $\{\text{een student haalt toets } t_i\}$ zijn.

   a. Stel het vak zit zodanig in elkaar dat je de toets in week i alleen kan halen als je toetsen t_1 tot en met t_{i-1} gehaald hebt. Geef een formule voor de kans $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 \cap T_5 \cap T_6)$ dat iemand de eerste 6 toetsen haalt.

   De formule die je, als het goed is, bij onderdeel a. gevonden hebt, wordt ook wel de *kettingregel* genoemd.

   b. Stel nu dat het vak uit losse onderwerpen bestaat en elk onderwerp beslaat twee weken. De stof voor toetsen in oneven weken is steeds nieuw, en de stof in de even weken hangt steeds samen met de stof van de week ervoor. Herschrijf de formule van onderdeel a. zodanig dat deze eigenschappen zichtbaar worden.

Chapter 3

This chapter formalises two types of independence relation. The first, I_{Pr}, is the type of relation that can be captured by a probability distribution. These independence relations are a proper subset a more general type of independence relation I that abstracts away from probability distributions. The chapter also discusses different representations of independence relations, most notably (in)directed graphs.

An important notion introduced in this chapter is the concept of d-separation. To get familiar with the concept you may want to play around with the *d-separation tester* linked on the website of this course.

Independence relations and their representation are still an area of ongoing research, see for example the work by Milan Studený from Prague. This chapter, however, describes the full body of research as far as required for our discussion of probabilistic networks in the subsequent chapters.

Questions

- Intuitively, what is the difference between independence relations I_{Pr} and I?
- What is the difference between the properties satisfied by I_{Pr} compared to those satisfied by I?
- What are possible encodings of an independence relation?
- Why does an I-map represent independencies and a D-map dependencies?
- Why is it unfortunate that not every independence relation has an (un)directed P-map?
- Why is an independence relation for which a P-map exists termed *graph-isomorphic*?
- Does a graph-isomorphic independence relation have a *unique* P-map?
- Does the (d-)separation criterion require a graph to be acyclic?
- Does the (d-)separation criterion require the sets X, Y and Z involved to be mutually disjoint?
- Do the definitions of (un)directed I-map and D-map require the sets X, Y and Z involved to be mutually disjoint?
- The separation criterion is implicitly based on a concept of blocking, whereas this is explicit for the d-separation criterion. What would be a definition of blocking in undirected graphs analogous to definition 3.2.9?
- Why does the following statement hold for both directed and undirected graphs: If a set Z blocks a path, then $Z \cup Y$ blocks the path for any Y?
- Why does the following statement for directed graphs only hold if $Z \neq \emptyset$ and at least one $Z_i \in Z$ is on the chain under consideration: If a set Z blocks a chain, then $Z \cup Y$ blocks the chain for any Y?
- Why does the following statement hold for undirected graphs: If a set Z separates two other sets, then $Z \cup Y$ separates the sets for any Y?
- Why does the following statement *not* hold for directed graphs: If a set Z d-separates two other sets, then $Z \cup Y$ d-separates the sets for any Y?

Exercises and Answers

Syllabus:

3.1 for I_{Pr} you need to use definitions based on Pr. The proof of a), as well as a sketch of the proof of b) is on the transparencies (the full proof of b) is quite complex); the proof of c) is given below the exercise.

3.2 for I you need to use the four properties on which it is defined (Definition 3.1.3). The proof is given below the exercise.

3.3 for I you need to use the four properties on which it is defined (Definition 3.1.3).

3.4

3.5 this exercise requires you to draw 16 D-maps and 4 I-maps.

3.6 the set of neighbours ν_G is defined in Definition 2.1.1

3.7 a) holds (why?); b) doesn't hold (why?); c) answer and explanation are given below exercise; d) holds (why?); e) answer and explanation are given below exercise; f) doesn't hold (why?).

3.8 this exercise requires you to draw some of the 15 D-maps and 63 I-maps (24 with 6 arrows, 28 with 5, 10 with 4 and 1 with 3 arrows).

3.9 a similar proposition for *un*directed D-maps and I-maps is proven in the syllabus (Lemma 3.2.6) as well as on the transparencies.

3.10 *hint:* it is easiest to try and use a graph as small as possible, with only three vertices.

3.11

3.12

3.13 not necessarily (give an example!)

3.14 *hint:* it is easiest to try and use a graph as small as possible; use three vertices for a) and c), four vertices for b) and d).

Chapter 4

This chapter defines the concept of probabilistic network and reconstructs the algorithm for exact probabilistic inference as designed by Judea Pearl; for ease of exposition only binary variables are considered. Other, and often more efficient, algorithms for exact inference exist such as *jointree propagation* (S.L. Lauritzen, D.J. Spiegelhalter, F.V. Jensen, P.P Shenoy, G. Shafer) and *variable elimination* (R. Dechter, G.F. Cooper) methods. The reason for discussing Pearl's algorithm is that it explicitly exploits the graphical structure of the network without transforming it, and therefore seems the one easiest to explain and comprehend.

Current research focuses on finding still more efficient algorithms, both for exact and approximate inference, and also for dealing with networks that include continuous variables. Also, now and again, researchers look into better algorithms for loop cutset conditioning (A. Becker, D. Geiger), the extension to Pearl's algorithm that is required to do inference in multiply connected graphs.

To gain more insight in inference and the effects of loop cutset conditioning try one of the free software packages available through the course's website.

Questions

The network as graphical model:

- Why is a Probabilistic network often called a *Bayesian (belief) network*, or *causal network*?
- What is the independence relation I modelled by a Probabilistic network?
- Why have people chosen the graph of a probabilistic network to represent a (minimal) I-map of the independence relation as opposed to a D-map?
- Why have people chosen a directed graph to capture the independence relation for a probabilistic network?

The probability distribution:

- Why is the digraph of a probabilistic network assumed to be acyclic?
- What is the difference between an assessment function for a vertex and a probability distribution for that vertex?
- Which piece(s) of information is/are necessary to determine the number of assessments functions required for specifying a probabilistic network?
- Which pieces of information are necessary to determine the number of (conditional) probabilities required for specifying all assessments functions?
- How does the joint probability distribution Pr *defined* by a probabilistic network exploit the fact that the digraph of the network is an I-map of the independence relation of Pr?
- How do constraints for space requirements for probabilistic networks compare to the naive Bayes approach?

Probabilistic Inference – general:

- How do constraints for time requirements for probabilistic networks compare to the naive Bayes approach?
- What is the difference between a prior and a posterior probability?
- Is there actually a difference between $\Pr(v_i \mid v_j)$ and $\Pr^{v_j}(v_i)$?
- What is the difference between $\Pr(v_i)$ and $\Pr^{v_i}(v_i)$?
- How can a set of instantiated or observed vertices be related to the *blocking set* introduced in Chapter 3?
- What is the relation between *configuration*, *instantiation*, and *partial configuration*?
- What is the computational time complexity of probabilistic inference?

Pearl's algorithm – definitions:

- Why does the definition of V_i^- differ across different types of graph?
- How do the messages of Pearl's algorithm exploit the fact that the digraph is an I-map of the independence relation of Pr?
- Do the formulas that define messages differ across different types of graph? Are you sure?
- Why do the formulas for computing messages differ across different types of graph?
- Which lemma represents the first step of Pearl's algorithm?
- What is the difference between a causal and a diagnostic parameter?
- What are the differences and similarities between causal/diagnostic parameters and probabilities?
- Why do the *compound* causal parameters for a vertex sum to 1? Why do the causal parameters *sent* by a vertex sum to 1?
- Why do the compound diagnostic parameters for a vertex in general *not* sum to 1? Why do the diagnostic parameters *sent* by a vertex in general *not* sum to 1?
- Why is it the case that if the compound diagnostic parameter of a vertex equals 1, that all diagnostic parameters sent by that vertex equal 1?
- When is a vertex ready to send a causal parameter?
- When is a vertex ready to send a diagnostic parameter?
- When is a vertex ready to calculate its (posterior) probability?
- To calculate prior probabilities, do you require causal parameters, diagnostic parameters, or both?
- To calculate posterior probabilities, do you require causal parameters, diagnostic parameters, or both?
- Why do the formulas in Lemmas 4.2.5 and 4.2.7 and similar formulas for singly connected digraphs assume V_i to be an uninstantiated vertex?

- Why do observations have to be entered by means of *dummy nodes*?
- Why does the *dummy node* approach enable us to use lemmas 4.2.5, 4.2.7 etc. for instantiated vertices as well?
- Why does the *nuttige eigenschap* (see transparencies) formulated for (sub)trees also hold for singly connected (sub) graphs?
- Why can Pearl's algorithm lead to incorrect results when applied to multiply connected graphs?

Pearl's algorithm – normalisation:

- What is the use of a normalisation constant α?
- Why does the normalisation constant α differ across messages?
- Why can normalisation be postponed to the final step of Pearl's algorithm?
- When does it come in handy to not postpone normalisation?
- Why is normalisation not actually required when computing prior probabilities? (Can be used as correctness check)

Loop Cutsets:

- Why does Pearl's algorithm as presented in 4.2.1 and 4.2.2 not work in multiply connected graphs?
- What is the idea behind the method of loop cutset conditioning?
- Which of the following statements is correct (the difference is rather subtle): "Loop cutset conditioning is a method for probabilistic inference in multiply connected networks that uses Pearl's algorithm for computing some of the probabilities is requires." or, "Loop cutset conditioning is a method that is used within Pearl's algorithm in order to enable its correct application to multiply connected networks."?
- Consider a probabilistic network with loops in its digraph G; can the loop cutset for G be the empty set $\emptyset$?
- Given the definition of a loop cutset, can a vertex with two incoming arcs in G be included in a loop cutset for G?
- For a graph G, will the Suermondt & Cooper algorithm return a loop cutset that includes a vertex with two or more incoming arcs in G?
- Why does every loop in a probabilistic network's digraph have at least one vertex with at most one incoming arc?
- Is a loop cutset a property of a graph or a property of a probabilistic network?
- Does a loop cutset change after entering evidence in a probabilistic network?
- Does the probability distribution over configurations of the loop cutset change after entering evidence into a probabilistic network?

- Why can the prior probability distribution over configurations of the loop cutset *not* be computed using Pearl's algorithm, but has to be computed by marginalisation from the joint distribution instead?
- In loop cutset conditioning, in general, which probabilities can and which probabilities cannot be computed using Pearl's algorithm (as a "black box")?
- What is the use of a *global supervisor*?
- What is the first step in performing loop cutset conditioning (not: in finding a loop cutset!)?
- Why is loop cutset conditioning computationally expensive?
- Is finding a loop cutset computationally expensive?
- Is a minimal loop cutset always optimal? Is an optimal loop cutset always minimal?
- Why should vertices with a degree of one or less not be included in a loop cutset?
- Why are vertices with an *in*degree of at most one selected as candidates for the loop cutset by the heuristic Suermondt & Cooper algorithm? What are possible effects of this choice?
- Why does the heuristic Suermondt & Cooper algorithm for finding a loop cutset choose to add a candidate with highest degree to the loop cutset? What if there are several candidates with the highest degree?
- What are properties of the graph and the loop cutset before and after performing the algorithm for finding a loop cutset?

Het algoritme van Pearl, zonder de (meeste) formules

Deze paragraaf probeert wat meer inzicht te geven in de inhoud van de verschillende parameters die in het algoritme van Pearl gebruikt worden om kansen uit een Probabilistisch netwerk te berekenen.

We bekijken een knoop V in een probabilistisch netwerk en een verzameling aanwijzingen $aanw$. Laat voor knoop V de verzameling aanwijzingen opgedeeld zijn in de aanwijzingen $aanw^+$ *boven* hem in de graaf en de aanwijzingen $aanw^-$ *onder* hem in de graaf. We gaan er vanuit dat een eventuele aanwijzing voor knoop V zelf gemodelleerd wordt mbv een *Dummy* knoop; die aanwijzing zit dus besloten in $aanw^-$. In onderstaande figuur bevindt $aanw^+$ zich dus in $G^+_{(A,V)}$ en/of $G^+_{(B,V)}$, en $aanw^-$ in $G^-_{(V,C)}$ en/of $G^-_{(V,D)}$ en/of $G^-_{(V,Dummy)}$.

Wat moet knoop V weten om zijn kansen te kunnen berekenen?

Knoop V kan de kansen op zijn eigen waarden gegeven de aanwijzingen $aanw$ in het netwerk, $\Pr(V \mid aanw)$, berekenen als hij

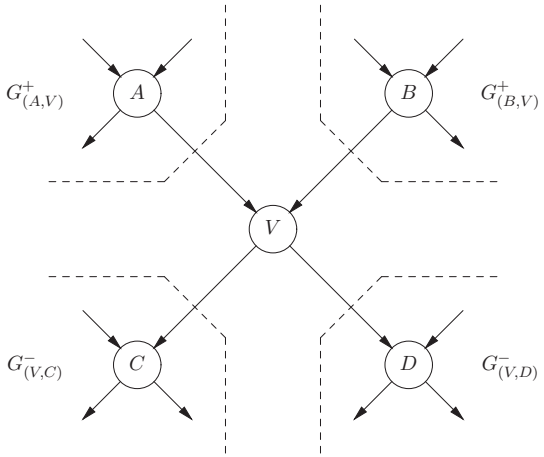
- de kansen op de waarden van zijn ouders gegeven $aanw^+$ kent; immers voor een knoop V met ouders A en B (zie onderstaande figuur) geldt mbv conditionalisering en onafhankelijkheid van A en B, en met onafhankelijkheid van V en $aanw^+$ gegeven A en

B dat:

$$\begin{aligned}\Pr(v \mid aanw^+) \;=\; & \Pr(v \mid a \wedge b) \cdot \Pr(a \mid aanw^+) \cdot \Pr(b \mid aanw^+) \\ & + \Pr(v \mid \neg a \wedge b) \cdot \Pr(\neg a \mid aanw^+) \cdot \Pr(b \mid aanw^+) \\ & + \Pr(v \mid a \wedge \neg b) \cdot \Pr(a \mid aanw^+) \cdot \Pr(\neg b \mid aanw^+) \\ & + \Pr(v \mid \neg a \wedge \neg b) \cdot \Pr(\neg a \mid aanw^+) \cdot \Pr(\neg b \mid aanw^+)\end{aligned}$$

en een soortgelijke formule voor $\Pr(\neg v \mid aanw^+)$.

- weet hoe zijn kansen beinvloed worden door $aanw^-$ die zich bevinden in de subgraaf onder V; dit kan knoop V bepalen als ie $\Pr(aanw^- \mid v)$ en $\Pr(aanw^- \mid \neg v)$ kent.



Hoe komt knoop V aan deze benodigde informatie?

Een knoop V krijgt informatie over de benodigde kansen van zijn ouders door middel van de boodschappen (causale parameters) die zijn ouders naar hem sturen. De ouders van knoop V sturen hem dus informatie over *hun eigen kansen*.

> *Bijvoorbeeld:* knoop A stuurt de causale parameter $\pi^A_V(A)$ (dwz $\pi^A_V(a)$ en $\pi^A_V(\neg a)$) naar knoop V; knoop B stuurt de causale parameter $\pi^B_V(B)$ naar knoop V.

Gegeven de informatie in de *causale parameters* die A en B verstuurd hebben, kan knoop V nu mbv zijn eigen *kansfunctie* γ_V de kansen $\Pr(v \mid aanw^+)$ en $\Pr(\neg v \mid aanw^+)$ berekenen (zie formule op vorige bladzijde).

Deze kansen zijn echter in principe nog niet voldoende om $\Pr(v \mid aanw)$ en $\Pr(\neg v \mid aanw)$ te berekenen. De alvast berekende informatie *van boven* wordt daarom opgeslagen in de *samengestelde causale parameter* $\pi(V)$ (dwz $\pi(v)$ en $\pi(\neg v)$) van knoop V.

Kortom: De samengestelde causale parameter $\pi(V)$ voor Knoop V is samengesteld uit

- de losse causale parameters $\pi^O_V(O)$ die knoop V van elk van zijn ouders O krijgt,
- de kansfunctie γ_V van knoop V.

Een knoop V krijgt informatie over de aanwijzingen *onder* hem door middel van de boodschappen (diagnostische parameters) die zijn kinderen naar hem sturen. Knoop V moet weten op welke van zijn *eigen waarden* de informatie betrekking heeft.

> *Bijvoorbeeld:* knoop C stuurt de diagnostische parameter $\lambda^V_C(V)$ (dwz $\lambda^V_C(v)$ en $\lambda^V_C(\neg v)$) naar knoop V; knoop D stuurt de diagnostische parameter $\lambda^V_D(V)$ naar knoop V.

Gegeven de informatie in de *diagnostische parameters* die C en D (en een eventuele *Dummy*) verstuurd hebben, kan knoop V nu de kansen $\Pr(aanw^- \mid v)$ en $\Pr(aanw^- \mid \neg v)$ berekenen.

Deze kansen zijn echter niet voldoende om $\Pr(v \mid aanw)$ en $\Pr(\neg v \mid aanw)$ te berekenen. De alvast berekende informatie *van onder* wordt daarom opgeslagen in de *samengestelde diagnostische parameter* $\lambda(V)$ (dwz $\lambda(v)$ en $\lambda(\neg v)$) van knoop V.

Kortom: De samengestelde diagnostische parameter $\lambda(V)$ voor knoop V bestaat uit

- de losse diagnostische parameters $\lambda^V_K(V)$ die knoop V van al zijn kinderen K krijgt.

Als knoop V eenmaal alle informatie van boven en van onder binnen heeft en dus de samengestelde causale en diagnostische parameters $\pi(V)$ en $\lambda(V)$ heeft kunnen berekenen, dan kunnen de kansen op de waarden van V gegeven alle aanwijzingen, $\Pr(V \mid aanw)$, berekend worden mbv het *data fusion lemma*:

$$\Pr(v \mid aanw) = \alpha \cdot \pi(v) \cdot \lambda(v) \quad \text{en} \quad \Pr(\neg v \mid aanw) = \alpha \cdot \pi(\neg v) \cdot \lambda(\neg v)$$

Hoe berekent knoop V de boodschappen die andere knopen nodig hebben om hun kansen te kunnen berekenen?

Bekijk nogmaals de figuur op de eerste bladzijde. Als knoop A de kansen $\Pr(aanw^- \mid A)$, en dus zijn samengestelde diagnostische parameter, wil kunnen berekenen dan moet knoop A informatie krijgen betreffende de aanwijzingen in de subgraaf *onder* A, bestaande uit de componenten $G^-_{(A,K)}$ voor elk kind K van A.

Meer in het bijzonder moet er dus informatie komen uit het component $G^-_{(A,V)}$ dat aan knoop V hangt. Het component $G^-_{(A,V)}$ staat niet expliciet in het figuur aangegeven, maar bestaat op zijn beurt weer uit knoop V zelf en de componenten $G^-_{(V,C)}$, $G^-_{(V,D)}$, en (!) $G^+_{(B,V)}$ uit de figuur.

Het is de taak van knoop V om informatie betreffende hemzelf en aanwijzingen in de genoemde componenten door te geven aan knoop A. Informatie uit de componenten $G^-_{(V,C)}$ en $G^-_{(V,D)}$ had knoop V al samengevat in zijn *samengestelde diagnostische parameter* $\lambda(V)$ en informatie uit component $G^+_{(B,V)}$ komt bij V binnen in de vorm van de losse *causale parameter* $\pi^B_V(V)$.

Informatie over knoop V zelf wordt uit zijn *kansfunctie* γ_V gehaald. Deze drie bronnen van informatie worden door knoop V samengevat in de losse diagnostische parameter $\lambda_V^A(A)$ die knoop V naar zijn ouder A stuurt.

Kortom: Knoop V stuurt een losse diagnostische parameter $\lambda_V^{O_i}(O_i)$ naar elke ouder O_i van V. Deze diagnostische parameter is samengesteld uit

- de samengestelde diagnostische parameter $\lambda(V)$ van knoop V,
- de losse causale parameters $\pi_V^{O_j}(O_j)$ die knoop V van zijn *andere* ouders O_j krijgt,
- en de kansfunctie γ_V van knoop V.

Bekijk nogmaals de figuur op de eerste bladzijde. Als knoop C de kansen $\Pr(C \mid aanw^+)$, en dus zijn samengestelde causale parameter, wil kunnen berekenen dan moet knoop C informatie krijgen betreffende de aanwijzingen in de subgraaf *boven* C, bestaande uit de componenten $G^+_{(O,C)}$ voor elke ouder O van C.

Meer in het bijzonder moet er dus informatie komen uit het component $G^+_{(V,C)}$ dat aan knoop V hangt. Het component $G^+_{(V,C)}$ staat niet expliciet in het figuur aangegeven, maar bestaat op zijn beurt weer uit knoop V zelf en de componenten $G^+_{(A,V)}$, $G^+_{(B,V)}$, en (!) $G^-_{(V,D)}$ uit de figuur.

Het is de taak van knoop V om informatie betreffende hemzelf en aanwijzingen in de genoemde componenten door te geven aan knoop C. Informatie uit de componenten $G^+_{(A,V)}$ en $G^+_{(B,V)}$, en informatie betreffende knoop V zelf (γ_V), had knoop V al samengevat in zijn *samengestelde causale parameter* $\pi(V)$; informatie uit component $G^-_{(V,D)}$ komt bij V binnen in de vorm van de losse *diagnostische parameter* $\lambda_D^V(V)$. Deze twee bronnen van informatie worden door knoop V samengevat in de losse causale parameter $\pi_C^V(V)$ die knoop V naar zijn kind C stuurt.

Kortom: Knoop V stuurt een losse causale parameter $\pi_{K_i}^V(V)$ naar elk kind K_i van V. Deze causale parameter is samengesteld uit

- de samengestelde causale parameter $\pi(V)$ van knoop V,
- de losse diagnostische parameters $\lambda_{K_j}^V(V)$ die knoop V van zijn *andere* kinderen K_j krijgt.

Exercises and Answers

Syllabus:

4.1

4.2 your computations should give $\Pr(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = 0.09375$; $\Pr(v_2 \wedge v_3) = 0.24375$; $\Pr(v_1 \mid v_2 \wedge v_3) = 0.38462$; $\Pr(v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3 \vee v_4) = 0.985$.

4.3 be inspired by Lemma 4.2.8 or use the definition of $\lambda_{V_i}(V_i)$.

4.4 your computations should result in a) $\Pr(v_4) = 0.56$, $\Pr(\neg v_4) = 0.44$, b) $\Pr(v_4 \mid v_6) = 0.88$, $\Pr(\neg v_4 \mid v_6) = 0.12$; the solution for c) is given below the exercise.

4.5 the solution to a) and c) is given in the exercise; your computions for b) should result in $\Pr(v_5 \mid v_3) = 0.6$, $\Pr(\neg v_5 \mid v_3) = 0.4$.

4.6 a) $\Pr(v_1 \mid v_7) = 0.6$, $\Pr(\neg v_1 \mid v_7) = 0.4$; b) yes, possibly (why?); c) this probability of a conjunction cannot be *directly* computed using Pearl's algorithm (why?), explain how you would compute it and consider Pearl's algorithm as a black box.

4.7 a) $\Pr(v_3 \mid v_1 \wedge \neg v_6) = 0.6$, $\Pr(\neg v_3 \mid v_1 \wedge \neg v_6) = 0.4$; b), c) this probability of a conjunction cannot be *directly* computed using Pearl's algorithm (why?), explain how you would compute it thereby considering Pearl's algorithm as a black box.

4.8 this can be proven using induction.

4.9 a) you should find either $\{V_2\}$ or $\{V_3\}$; b) $\Pr(v_5) = 0.34$, $\Pr(\neg v_5) = 0.66$.

4.10 a) $\{V_2\}$; b) $\Pr(v_3) = 0.3$, $\Pr(\neg v_3) = 0.7$; c) these probabilities cannot be *directly* computed using Pearl's (datafusion) algorithm (why?), explain how you would compute them thereby considering Pearl's algorithm as a black box.

4.11 a) you should find $\{V_1, V_2\}$.

4.12 a) a possible lcs is $\{V_2, V_3, V_7, V_8\}$, you won't find $\{V_{10}\}$ (why?).

4.13

Chapter 5

This chapter and the next one differ from previous chapters in the sense that the latter describe more or less finished research, whereas the following chapters discuss topics that are subject of ongoing research[2]. As a result, the chapters tell a number of short stories with lots of open endings. The assumption that we consider binary variables only is now lifted, although employed in some specific situations.

This chapter discusses the construction of a probabilistic network: how do we get the graphical structure (by hand, or automatically?) and where do the probabilities come from (experts, data, ...?). Try and construct a (small) probabilistic network yourself using one of the numerous software packages or online tools developed for constructing and reasoning with probabilistic networks (see the course website)

Questions

Construction in general

- What are typical trade-offs made when constructing a probabilistic network for a real application domain?
- What is the difference between domain-variables and probabilistic network variables?
- What is the difference between single-valued variable, multi-valued variables and statistical variables?
- Given the definition of a probabilistic network in Chapter 4, why is it, in general, not possible to allow continuous statistical variables?
- What are advantages and disadvantages of the different ways of modelling a multi-valued domain variable in a probabilistic network?

Construction by hand

- What is the problem with using the notion of causality for constructing the digraph?
- Why is it important to distinguish between direct and indirect relations?
- Why do digraphs which are constructed by hand often contain cycles at some stage of the construction?
- Why does the assumption of a disjunctive interaction simplify probability assessment? Is the assumption realistic?
- Why is a noisy-or gate called noisy? Why is its leaky version called leaky?
- This chapter formulates the noisy-or gate for binary variables. Is it easy to generalise to non-binary variables?
- Why does the inhibitor probability in the leaky noisy-or gate differ semantically from the inhibitor probability in the noisy-or gate?

[2] As a matter of fact, the Decision Support Systems group of our Institute does research into quite a number of subjects discussed in this Chapter (see the group website).

- Why is it difficult to assess probabilities from literature?
- Why is it difficult to use domain experts for assessing probabilities?
- What is a typical trade-off when eliciting probabilities from experts?
- What is the use of sensitivity analysis?
- Is it computationally feasible to perform a sensitivity analysis?
- What is the amount of data you get from a sensitivity analysis?
- What are advantages and disadvantages of performing a two-way sensitivity analysis as opposed to a one-way analysis?

Automated construction

- Are the assumptions required of a database in order to use it for learning a network realistic?
- What are possible solutions and their effects of handling *missing values* in a database?
- $N(c_X)$ gives the number of cases in a database for which variable X has the given configuration. Why can we correctly assume that $N(\emptyset) = N$?
- Is frequency counting an efficient way of probability estimation?
- Why are a quality measure and a search heuristic necessary ingredients for a learning algorithm?
- What is the function of the different ingredients of the MDL quality measure?
- Why does the MDL measure as stated assume variables to be binary? Can this restriction be lifted?
- What are the ranges of the different terms in the MDL measure?
- Why is the $\log P$ term a constant if you assume a uniform prior distribution over possible digraphs?
- You could say "Entropy $\equiv$ Chaos $\equiv$ Uncertainty". Why does lower entropy go hand in hand with denser digraphs?
- Why do denser digraphs go hand in hand with less reliable probability estimates? What solution to this problem is present in the MDL measure?
- What are the benefits and drawbacks of using a search *heuristic*?
- When employing the search heuristic as described in Chapter 5 it is sufficient to consider only *gain* in quality. Why?
- For the search heuristic described: why does a difference in *vertex quality* for a single vertex correspond to a difference in *graph quality*?
- When the search heuristic adds an arc (V_i, V_j), why does the quality of V_j change and not the quality of V_i?
- If adding a certain arc *decreases* the quality of the graph, will that arc *ever* be added?
- If adding a certain arc *increases* the quality of the graph, will that arc *always* be added?

- Does the choice of an arc to add affect the set of arcs that may be subsequently added?
- Does the procedure of adding arcs that give the largest increase in quality result in a graph with maximum quality?
- What are possible effects of learning a network from a database that does not obey the required assumptions?

Exercises and Answers

Syllabus:

5.1

5.2

5.3 the answer to b) is given in the exercise; rule-based expert systems as mentioned in c) have been discussed at length in the Expert Systems course.

5.4 a) the result of your computation should be -0.55 (what will happen as a result?).

Chapter 6

This chapter tries to bridge the gap between construction and actual use of a probabilistic network application. It fist discusses possible methods for evaluating the performance of your network with actual data; then some example applications where a probabilistic network is used as a component in a decision support process are discussed[3].

Questions

Evaluation:

- In evaluating a probabilistic network against a standard of validity, why would you ideally use a *gold standard*? Why is this not always possible?
- What information does and doesn't a percentage correct convey?
- What information does and doesn't the brierscore convey?

Application:

- What is the use of a two-layer architecture?
- In the threshold model for patient management, are the utilities patient-specific? What about the threshold probabilities?
- Can the threshold model for patient management be applied to a series of tests?
- Why are utilities in the threshold model said to subjective and in diagnostic problem solving objective?
- In diagnostic problem solving utilities are defined for values of binary variables only. Can this be generalised to non-binary variables?
- In diagnostic problem solving utilities represent the shift in probability of an hypothesis as a result of evidence. Why are large shifts in *either* direction awarded large utilities?
- In diagnostic problem solving, is the utility of a variable's value a fixed number? What about the expected utility of a node?
- In selective evidence gathering, what is the use of a *stopping criterion*?
- In selective evidence gathering, what are the effects of the *single-disorder* and *myopic* assumptions?

[3]The subjects of evaluation and of test-selection, that are briefly touched upon here, are also directions of research pursued in the Decision Support Systems group of our Institute

Tentamen Probabilistisch Redeneren

2 juli 2001, 14:00 - 17:00 uur

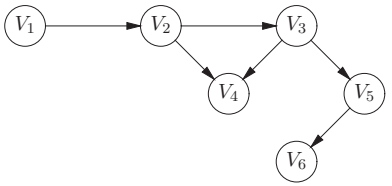
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Beschouw een probabilistisch netwerk $B = (G, \Gamma)$, waarin $G = (V(G), A(G))$ de volgende gerichte graaf is:



en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ is gedefinieerd als

$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.75$

$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1) = 0.4$
$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1) = 0.8$

$\gamma_{V_3}(v_3 \mid v_2) = 0.95$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid \neg v_2) = 0.45$

$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge v_3) = 0.6$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge v_3) = 0.55$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge \neg v_3) = 0.10$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_3) = 0.03$

$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_3) = 0.9$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_3) = 0.55$

$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_5) = 0.75$
$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_5) = 0.35$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B wordt gedefinieerd.

a. Bepaal een loop cutset voor de graaf G met behulp van het algoritme van Suermondt en Cooper.

b. Bereken de kansen $\Pr(v_6)$ en $\Pr(\neg v_6)$ met behulp van het algoritme van Pearl met loop cutset conditioning. Laat duidelijk de verschillende stappen in je berekening zien.

c. Stel dat de aanwijzing $V_4 = true$ in het netwerk wordt ingevoerd. Leg uit hoe de kansen $\Pr^{v_4}(v_1)$ en $\Pr^{v_4}(\neg v_1)$ uit het netwerk berekend kunnen worden.

Opgave 2

(a: 10 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 30 ptn.)

Veronderstel dat je een probabilistisch netwerk voor slokdarmkanker wilt construeren dat gebruikt zal worden in een Nederlands ziekenhuis. Je wilt de constructie automatisch doen.

a. Stel dat het ziekenhuis beschikt over een voldoende grote, maar incomplete patiënten database. Om de database te kunnen gebruiken voor het leren van het probabilistische netwerk, moeten alle zogenaamde 'missing values' ingevuld worden. Geef minstens twee manieren aan waarop je dat kan doen.

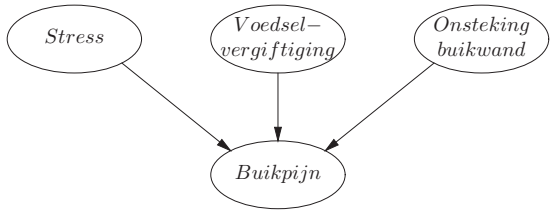
b. Geef aan welke effecten het invullen van 'missing values' in een database kan hebben op de structuur die met het B-leeralgoritme resulteert. Verklaar deze effecten.

c. In het slokdarmkanker domein hebben veel variabelen meer dan twee waarden. De strafterm $-\frac{1}{2}K \log N$ in de MDL kwaliteitsmaat gaat uit van binaire variabelen. Is het verstandig om voor het leren van een probabilistisch netwerk voor slokdarmkanker met het B-leeralgoritme de strafterm aan te passen voor het feit dat de variabelen niet binair zijn? Zo nee, waarom is dit niet nodig? Zo ja, hoe zou je de strafterm aanpassen en wat is het effect van je aanpassing op de structuur die zal resulteren?

Opgave 3

(a: 15 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Tijdens de constructie van een probabilistisch netwerk is voor een stukje van het netwerk de volgende structuur gevonden:



Voor de variabele *Stress* zijn de waarden *true* en *false* geïdentificeerd; deze worden aangeduid met s en $\neg s$. *Voedselvergiftiging* heeft de waarden v en $\neg v$, *Ontsteking buikwand* heeft de waarden o en $\neg o$ en Buikpijn heeft de waarden b en $\neg b$.

Een domeinexpert heeft aangegeven dat voor de knopen in het betreffende deelnetwerk aan de eis van uitzonderingsonafhankelijkheid is voldaan. Veronderstel dat de domeinexpert tevens de volgende kansen heeft geschat:

$$\Pr(b \mid \neg s \wedge \neg v \wedge \neg o) = 0.15$$
$$\Pr(b \mid s \wedge \neg v \wedge \neg o) = 0.65$$
$$\Pr(b \mid \neg s \wedge v \wedge \neg o) = 0.95$$
$$\Pr(b \mid \neg s \wedge \neg v \wedge o) = 0.8$$

a. Is het mogelijk om een complete kansfunctie (assessment function) voor variabele *Buikpijn* af te leiden uit bovenstaande gegevens? Zo nee, geef aan welke informatie ontbreekt; zo ja, specificeer dan de volledige kansfunctie.

b. Veronderstel dat bij nader inzien de domeinexpert tot de conclusie komt dat we voor de patiëntengroep waarvoor het netwerk wordt geconstrueerd wel kunnen aannemen dat aan de verklaarbaarheidseis is voldaan. Welke kansen voor de variabele *Buikpijn* zullen als gevolg van deze nieuwe aanname veranderen en hoe komen ze eruit te zien?

c. De kansschattingen van de domeinexpert zijn niet erg nauwkeurig. Veronderstel dat je een idee wilt krijgen van de effecten van die onnauwkeurigheden op bepaalde uitkomsten van het netwerk; met name wil je bekijken in hoeverre veranderingen van de schattingen voor de variabelen *Stress*, *Voedselvergiftiging* en *Ontsteking buikwand* de kansen op buikpijn beïnvloeden. Is het zinvol om een *two-way* sensitiviteitsanalyse uit te voeren, om het effect van het simultaan variëren van kansen voor twee van de oorzaken op de kans op buikpijn te bestuderen? Verklaar je antwoord.

Hertentamen Probabilistisch Redeneren

24 augustus 2001, 9:00 - 12:00 uur

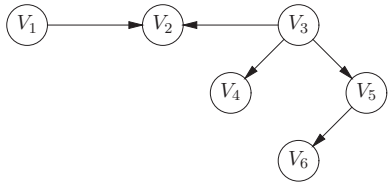
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 15 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Beschouw een probabilistisch netwerk $B = (G, \Gamma)$, waarin $G = (V(G), A(G))$ de volgende gerichte graaf is:



en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ is gedefinieerd als

$$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.9$$

$$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1 \wedge v_3) = 0.15$$
$$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1 \wedge v_3) = 0.85$$
$$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1 \wedge \neg v_3) = 0.6$$
$$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1 \wedge \neg v_3) = 0.13$$

$$\gamma_{V_3}(v_3) = 0.75$$

$$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_3) = 0.3$$
$$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_3) = 0.55$$

$$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_3) = 0.95$$
$$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_3) = 0.10$$

$$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_5) = 0.75$$
$$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_5) = 0.35$$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B wordt gedefinieerd.

a. Bereken de kansen $\Pr(v_6)$ en $\Pr(\neg v_6)$ met behulp van het algoritme van Pearl. Laat duidelijk de verschillende stappen in je berekening zien.

b. Veronderstel dat de aanwijzing $V_4 = true$ in het netwerk wordt ingevoerd. Bereken de kansen $\Pr^{v_4}(v_6)$ en $\Pr^{v_4}(\neg v_6)$ met het algoritme van Pearl. Laat weer duidelijk de verschillende stappen van je berekening zien.

c. Veronderstel dat nu tevens de aanwijzing $V_1 = false$ in het netwerk wordt ingevoerd. Geef voor alle variabelen V_i, $i = 1, \ldots, 6$, in het netwerk aan of deze nieuwe aanwijzing invloed heeft op de kansen voor v_i en $\bar{v}_i$. Verklaar je antwoorden.

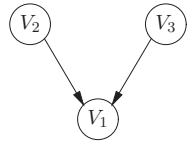
Opgave 2

(a: 15 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Beschouw de verzameling $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ van statistische variabelen. Laat de enige informatie over deze variabelen bestaan uit de onderstaande database D:

$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$
$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$
$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$
$v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$

Veronderstel dat de database D gebruikt wordt voor de automatische constructie van een probabilistisch netwerk. Voor het construeren van het netwerk wordt het B zoekalgoritme gebruikt, in combinatie met de MDL kwaliteitsmaat. Veronderstel dat na een aantal stappen van het algoritme de volgende graaf is verkregen:



a. Bereken het verschil in kwaliteit dat wordt verkregen door het toevoegen van de pijl (V_2, V_3) aan bovenstaande graaf. Zal naar aanleiding van het verschil in kwaliteit de pijl wel of niet aan de graaf worden toegevoegd? Verklaar je antwoord.

b. Voor het construeren van het beoogde netwerk kan ook een variant op het B zoekalgoritme worden gebruikt: het $\bar{B}$ algoritme. Het $\bar{B}$ zoekalgoritme start met een volle graaf en verwijdert steeds de pijl die leidt tot de grootste kwaliteitswinst.

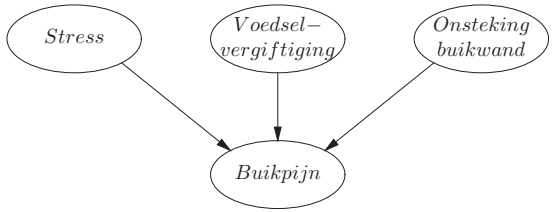
Veronderstel dat beide algoritmen gebruikt worden in combinatie met de MDL kwaliteitsmaat. Zal in het algemeen de graaf $\bar{G}$ die resulteert met het $\bar{B}$ zoekalgoritme gelijk zijn aan de graaf G die resulteert met het B zoekalgoritme? Verklaar je antwoord.

c. Sensitiviteitsanalyse kan gebruikt worden als onderdeel van een procedure voor het schatten van kansen van domeinexperts. Tijdens de automatische constructie van de graaf van een probabilistisch netwerk, krijg je als neveneffect de kansfuncties die bij de betreffende graaf horen. Kan sensitiviteitsanalyse ook op dit soort 'geleerde' kansfuncties toegepast worden? Verklaar je antwoord.

Opgave 3

(a: 10 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 30 ptn.)

Tijdens de constructie van een probabilistisch netwerk is voor een stukje van het netwerk de volgende structuur gevonden:



Voor de variabele *Stress* zijn de waarden *true* en *false* geïdentificeerd; deze worden aangeduid met s en $\neg s$. *Voedsel vergiftiging* heeft de waarden v en $\neg v$, *Ontsteking buikwand* heeft de waarden o en $\neg o$ en *Buikpijn* heeft de waarden b en $\neg b$.

Een domeinexpert heeft aangegeven dat voor de knopen in het betreffende deelnetwerk aan de eis van uitzonderingsonafhankelijkheid is voldaan. Veronderstel dat de domeinexpert tevens de volgende kansen heeft geschat:

$$\Pr(b \mid s \wedge \neg v \wedge \neg o) = 0.65$$
$$\Pr(b \mid \neg s \wedge v \wedge \neg o) = 0.95$$
$$\Pr(b \mid \neg s \wedge \neg v \wedge o) = 0.8$$

a. Is het mogelijk om een complete kansfunctie voor variabele *Buikpijn* af te leiden uit bovenstaande gegevens? Zo nee, geef aan welke informatie ontbreekt; zo ja, specificeer de volledige kansfunctie.

b. Veronderstel dat er nog andere oorzaken voor buikpijn kunnen zijn, dan de drie die in het netwerk zijn gemodelleerd. Noem twee methoden om met de incompleetheid van het bovenstaande model om te gaan. Geef voor- en nadelen van de twee methoden wat betreft de resulterende structuur en de benodigde kansschattingen.

c. Zowel in het formalisme van de *noisy-or gate* als in het formalisme van de *leaky noisy-or gate* geldt voor een variabele V_0 met oorzaken V_1 t/m V_m dat voor alle V_i:

$$\gamma_{V_0}(v_0 \mid \neg v_1 \wedge \ldots \wedge \neg v_{i-1} \wedge v_i \wedge \neg v_{i+1} \wedge \ldots \wedge \neg v_m) = 1 - q_i$$

De q_i die gebruikt wordt bij de normale noisy-or gate heeft echter een andere semantiek dan de q_i bij de leaky noisy-or gate. Leg uit wat het verschil in betekenis tussen deze twee q_i's is en verklaar daarmee het verschil in de formules voor $\gamma_{V_0}(v_0 \mid c)$.

.

Tentamen Probabilistisch Redeneren

3 juli 2002, 9:00 - 12:00 uur

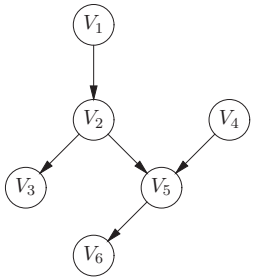
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., totaal: 25 ptn.)

Beschouw een probabilistisch netwerk $B = (G, \Gamma)$, waarin $G = (V(G), A(G))$ de volgende gerichte graaf is: en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ is gedefinieerd als:



$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.6$

$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1) = 0.3$
$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1) = 0.8$

$\gamma_{V_3}(v_3 \mid v_2) = 0.7$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid \neg v_2) = 0.1$

$\gamma_{V_4}(v_4) = 0.9$

$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge v_4) = 0.2$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge \neg v_4) = 0.5$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge v_4) = 0.8$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_4) = 1$

$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_5) = 0.4$
$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_5) = 0.05$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B wordt gedefinieerd.

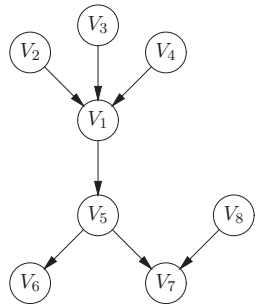
a. Bereken de kansen $\Pr(v_5)$ en $\Pr(\neg v_5)$ met behulp van de 5 rekenregels van het algoritme van Pearl. Laat duidelijk de verschillende stappen in je berekening zien.

b. Stel dat de aanwijzing $V_3 = false$ in het netwerk wordt ingevoerd. Bereken nu de kansen $\Pr^{\neg v_3}(v_5)$ en $\Pr^{\neg v_3}(\neg v_5)$ uit het netwerk. Laat duidelijk de verschillende stappen in je berekening zien.

Opgave 2

(a: 10 ptn., b: 10 ptn., c: 15 ptn., d: 10 ptn, totaal: 45 ptn.)

Veronderstel dat voor een bepaalde toepassing een probabilistisch netwerk ontwikkeld wordt. Met de hulp van een domeindeskundige is de volgende graaf G voor het netwerk geconstrueerd:



Van het betreffende domein is bekend dat de variabelen V_2, V_3 en V_4 voldoen aan de eisen van verklaarbaarheid en uitzonderingsonafhankelijkheid ten opzichte van variabele V_1. Tevens zijn de volgende kansen bekend:

$\Pr(v_1 \mid v_2 \wedge \neg v_3 \wedge \neg v_4) = 0.8$
$\Pr(v_1 \mid \neg v_2 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) = 0.95$
$\Pr(v_1 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_3 \wedge v_4) = 0.65$

a. Is het mogelijk om op basis van bovenstaande informatie een complete kansfunctie voor variabele V_1 te specificeren? Zo nee, geef aan welke informatie ontbreekt. Zo ja, geef de complete kansfunctie. Verklaar je antwoorden.

In de literatuur op het betreffende domein is tevens de volgende kans-informatie gevonden:

$\Pr(\neg v_1) = 0.5$
$\Pr(v_1 \wedge v_5) = 0.25$
$\Pr(\neg v_1 \wedge \neg v_5) = 0.3$
$\Pr(v_5 \wedge \neg v_6) = 0.2$
$\Pr(v_5 \wedge v_6) = 0.25$
$\Pr(\neg v_5 \wedge v_6) = 0.15$
$\Pr(v_6 \mid \neg v_1 \wedge v_5 \wedge v_7) = 0.56$
$\Pr(v_8 \mid v_2 \wedge v_3) = 0.8$

Verdere informatie over het domein is niet beschikbaar.

b. Geef de kansfuncties behorend bij G die op grond van bovenstaande informatie volledig gespecificeerd kunnen worden. Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

c. Veronderstel dat de nog ontbrekende kansen door de domeindeskundige worden geschat. Het resulterende netwerk wordt vervolgens aan een sensitiviteitsanalyse onderworpen, waarbij we geïnteresseerd zijn in de gevoeligheid van de kansen op de waarden van variabele V_5 voor veranderingen in de kansfuncties die voor het netwerk gespecificeerd zijn.

We voeren zowel een sensitiviteitsanalyse van het apriori netwerk zonder observaties uit, en een analyse van het netwerk waarin de variabelen V_1 en V_7 geïnstantieerd zijn. Laat nu de *sensitivity set* voor variabele V_5 de verzameling zijn van alle variabelen V_i waarvan de kansfunctie γ_{V_i} de kansen op de waarden van V_5, gegeven de aanwezige observaties, kunnen beïnvloeden.

1. Geef de sensitivity set voor variabele V_5 in het apriori netwerk.
2. Hebben instantiaties van variabelen V_1 en V_7 effect op de sensitivity set voor V_5? Zo nee, waarom niet? Zo ja, hoe ziet de nieuwe sensitivity set er dan uit?

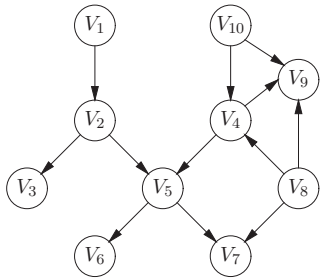
Verklaar je antwoorden.

d. Als het probabilistische netwerk voor het betreffende domein eenmaal geconstrueerd is, wordt het onderworpen aan een evaluatiestudie. Bij een evaluatiestudie wil je graag gebruik maken van een *gouden standaard*. Leg uit wat een gouden standaard is en waarom die in de praktijk vaak ontbreekt.

Opgave 3

(a: 10 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 30 ptn.)

Beschouw een probabilistisch netwerk $B = (G, \Gamma)$, waarin $G = (V(G), A(G))$ de volgende gerichte graaf is:



a. Geef twee verschillende loop cutsets C_1 en C_2 voor de graaf G. Laat zien dat C_1 en C_2 inderdaad aan de definitie van een loop cutset voldoen.

b. Geef een *optimale* loop cutset voor de graaf G. Zou deze met behulp van het algoritme van Suermondt en Cooper ook gevonden kunnen worden? Verklaar je antwoorden.

c. Bewijs of weerleg de volgende stelling:

> Elke meervoudig samenhangende gerichte acyclische graaf heeft een *unieke* optimale loop cutset.

Hertentamen Probabilistisch Redeneren

21 augustus 2002, 9:00 - 12:00 uur

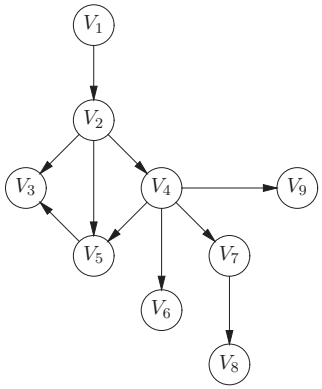
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Beschouw een probabilistisch netwerk $B = (G, \Gamma)$, waarin $G = (V(G), A(G))$ de volgende gerichte graaf is: en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ is gedefinieerd als:



$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.6$

$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1) = 0.3$
$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1) = 0.8$

$\gamma_{V_3}(v_3 \mid v_2 \wedge v_5) = 0.7$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid v_2 \wedge \neg v_5) = 0.1$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid \neg v_2 \wedge v_5) = 0.4$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_5) = 0.3$

$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2) = 0.9$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2) = 0.5$

$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_4) = 0.2$
$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_4) = 0.0$

$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge v_4) = 0.2$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge \neg v_4) = 0.5$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge v_4) = 0.8$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_4) = 1.0$

$\gamma_{V_7}(v_7 \mid v_4) = 0.4$
$\gamma_{V_7}(v_7 \mid \neg v_4) = 0.05$

$\gamma_{V_8}(v_8 \mid v_7) = 0.3$
$\gamma_{V_8}(v_8 \mid v_7) = 0.55$

$\gamma_{V_9}(v_9 \mid v_4) = 0.33$
$\gamma_{V_9}(v_9 \mid v_4) = 0.75$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B wordt gedefinieerd.

a. Bepaal een loop cutset voor de graaf G met behulp van het algoritme van Suermondt en Cooper. Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

b. Bereken de kansen $\Pr(v_4)$ en $\Pr(\neg v_4)$ met behulp van het algoritme van Pearl (de 5 rekenregels) en loop cutset conditioning. Laat duidelijk de verschillende stappen in je berekening zien.

c. Stel dat de aanwijzingen $V_2 = true$ en $V_4 = false$ in het netwerk worden ingevoerd. Leg uit hoe de kans $\Pr^{v_2, \neg v_4}(v_5 \wedge v_7)$ uit het netwerk berekend kan worden.

Opgave 2

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., totaal: 25 ptn.)

Veronderstel dat je een probabilistisch netwerk wilt construeren dat gebruikt zal worden in een Nederlands ziekenhuis.

a. Het domein van het te construeren netwerk betreft een ziekte die in Nederland maar weinig voor komt en dus beschikt het betreffende ziekenhuis over een te kleine patiëntendatabase voor de automatische constructie van je netwerk. In Aziatische landen komt de ziekte veel vaker voor. Leg uit waarom je een grote patiëntendatabase uit een van die Aziatische landen niet zomaar kan gebruiken voor de automatische constructie van jouw netwerk.

b. Veronderstel dat de constructie van het netwerk voltooid is. Het netwerk wordt nu aan een evaluatie onderworpen. Hiertoe worden de gegevens van 150 patiënten gebruikt en voor elke patiënt wordt de diagnose voorspeld door het netwerk vergeleken met de diagnose gesteld door de artsen. De diagnose variabele D heeft 4 waarden, d_1, d_2, d_3 en d_4, met de volgende apriori verdeling:

$D =$	$\Pr(D)$
d_1	0.20
d_2	0.60
d_3	0.15
d_4	0.05

De artsen hebben bij patiënt i de diagnose d_3 gesteld. Het netwerk geeft voor deze patiënt de volgende voorspelling:

$D =$	$\Pr(D)$
d_1	0.03
d_2	0.15
d_3	0.80
d_4	0.02

Bereken voor patiënt i de Brier score behorende bij de voorspelling van het netwerk. Wat zegt deze Brier score over de gebruikte domeinkennis? (Tip: vergelijk de Brier score met die van een netwerk dat altijd een uniforme verdeling voorspelt, en met die van een netwerk dat altijd de apriori verdeling voorspelt.) Verklaar je antwoorden.

Opgave 3

(a: 10 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., d: 10 ptn., totaal: 40 ptn.)

Zij $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ een verzameling van binaire statistische variabelen. Zij D een database over V met de volgende voorbeelden:

$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
$v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
$v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$	$\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$

Veronderstel nu dat de database D gebruikt wordt voor de automatische constructie van een probabilistisch netwerk. Voor de constructie van de graaf van het netwerk wordt de B zoekheuristiek toegepast, in combinatie met de MDL-kwaliteitsmaat:

$$Q_{MDL}(G, D) = \log P(G) - N \cdot H(G, D) - \frac{1}{2} K \cdot \log N$$

waarin $\log P(G)$ constant is, voor elke acyclische gerichte graaf G.

a. Bereken de kwaliteitswinst die wordt verkregen door de pijl (V_1, V_3) aan de pijlloze gerichte graaf toe te voegen.

b. Voor twee ouderloze knopen V_i en V_j geldt dat de kwaliteit, gegeven door de MDL-kwaliteitsmaat, van de twee verschillende grafen G_1 en G_2 die ontstaan door het toevoegen van de pijl $V_i \rightarrow V_j$, respectievelijk de pijl $V_j \rightarrow V_i$, hetzelfde is. De B zoekheuristiek kiest in zo'n geval een *willekeurige* richting voor de pijl. Een dergelijke keuze heeft invloed op de pijlen die de B zoekheuristiek vervolgens aan de graaf toe zal voegen. Geef hiervoor twee verschillende redenen.

De B zoekheuristiek voor het leren van een probabilistisch netwerk uit data wordt soms uitgebreid met een *look-ahead faciliteit*. In de uitgebreide zoekheuristiek wordt de kwaliteitswinst niet alleen voor afzonderlijke pijlen uitgerekend, maar ook voor *paren* van pijlen. In elke stap van de heuristiek wordt het paar van pijlen geselecteerd, dat in de grootste kwaliteitswinst resulteert. Van het geselecteerde paar van pijlen wordt vervolgens de pijl die de grootste kwaliteitswinst oplevert aan de graaf toegevoegd.

c. Noem een voordeel en een nadeel van uitbreiding van de B zoekheuristiek met de look-ahead faciliteit.

d. Geef een reden waarom maar één van de pijlen uit het paar met de grootste kwaliteitswinst wordt toegevoegd aan de graaf.

Tentamen Probabilistisch Redeneren

25 oktober 2002, 9:00 - 12:00 uur

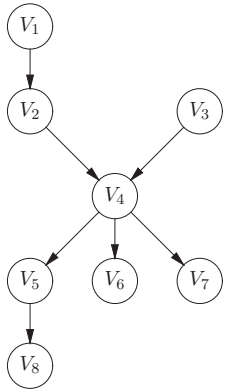
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 15 ptn., b: 10 ptn., c: 10 ptn., totaal: 35 ptn.)

Beschouw het probabilistische netwerk $B = (G, \Gamma)$ waarin $G = (V(G), A(G))$ de onderstaande gerichte graaf is, en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ gedefinieerd is door:



$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.75$

$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1) = 0.2$
$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1) = 1.0$

$\gamma_{V_3}(v_3) = 0.5$

$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge v_3) = 0.3$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge v_3) = 0.8$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge \neg v_3) = 0.7$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_3) = 0.2$

$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_4) = 0.4$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_4) = 0.8$

$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_4) = 0.6$
$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_4) = 0.2$

$\gamma_{V_7}(v_7 \mid v_4) = 0.35$
$\gamma_{V_7}(v_7 \mid \neg v_4) = 0.1$

$\gamma_{V_8}(v_8 \mid v_5) = 1.0$
$\gamma_{V_8}(v_8 \mid \neg v_5) = 0.5$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B gedefinieerd wordt.

a) Veronderstel dat achtereenvolgens de aanwijzingen $V_2 = \mathit{false}$ en $V_8 = \mathit{true}$ in het netwerk worden ingevoerd. Illustreer de werking van het algoritme van *Pearl* door het berekenen van de kans $\Pr^{\neg v_2 \wedge v_8}(v_4)$ met behulp van de 5 rekenregels. Laat duidelijk zien welke parameters hierbij berekend worden.

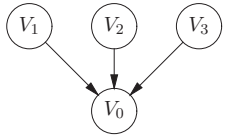
b) Veronderstel dat de kans $\Pr^{\neg v_2 \wedge v_8}(v_1 \vee \neg v_4)$ bepaald moet worden. Je hebt het netwerk B en het algoritme van *Pearl* tot je beschikking. Leg uit *hoe* deze kans kan worden berekend.

c) Na het invoeren van een aanwijzing berekent het algoritme van *Pearl* in principe voor *iedere* variabele $V_i \in V(G)$ opnieuw de kansen op zijn waarden. Leg uit hoe dit efficiënter zou kunnen.

Opgave 2

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., c: 15 ptn., totaal: 40 ptn.)

Beschouw het volgende fragment van de graaf van een probabilistisch netwerk:



De variabelen V_1, V_2 en V_3 hebben een *disjunctieve interactie* ten opzichte van variabele V_0. Voor V_0 zijn de volgende kansschattingen gegeven:

$$\begin{aligned} \Pr(v_0 \mid v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) &= 0.75 \\ \Pr(v_0 \mid \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) &= 0.8 \\ \Pr(v_0 \mid \neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) &= 0.9 \end{aligned}$$

a) Veronderstel dat in bovenstaand netwerk aan de eisen van de 'noisy-or gate' is voldaan. Geef de volledig kansfunctie voor variabele V_0; laat daarbij zien hoe je aan je antwoorden komt.

b) Voor een probabilistisch netwerk waarin geen aanwijzingen zijn verwerkt geldt dat de *sensitiviteits functie* die de effecten van het wijzigen van een parameter x op een uitkomst y beschrijft, de volgende vorm heeft:

$$y = a \cdot x + b,$$

waarin a en b constanten zijn. Veronderstel dat je een sensitiviteits analyse wil uitvoeren voor de 'noisy-or gate', waarbij je de effecten van wijzigingen in je *drie* geschatte kansen op $\Pr(v_0)$ wilt bepalen. Veronderstel tevens dat bekend is dat elke oorzaak een kans van 0.5 heeft om op te treden, dwz $\Pr(v_1) = \Pr(v_2) = \Pr(v_3) = 0.5$.

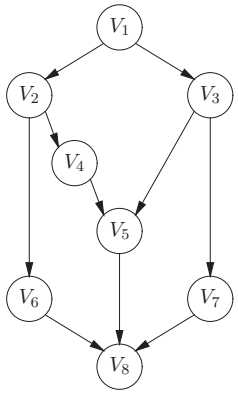
1. Welke functies moeten er voor de beschreven analyse bepaald worden en hoe bepaal je die?
2. Is er in dit geval een efficiëntere manier om de gewenste informatie te verkrijgen? Verklaar je antwoord.

c) Bij een disjunctieve interactie zoals in onderdeel a) volstaat de aanwezigheid van slechts één van de oorzaken v_1, v_2 of v_3 al om het effect v_0 te veroorzaken. Veronderstel nu dat de variabelen V_1, V_2 en V_3 een *conjunctieve interactie* in plaats van een disjunctieve interactie ten opzichte van variabele V_0 hebben: alle oorzaken moeten aanwezig zijn om het effect v_0 te veroorzaken. Ontwerp, naar analogie van de 'noisy or-gate' voor disjunctieve interacties, een 'noisy and-gate' om een conjunctieve interactie te beschrijven.

Opgave 3

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., totaal: 25 ptn.)

Beschouw het probabilistische netwerk $B = (G, \Gamma)$ met de volgende gerichte graaf G:



a) Veronderstel dat we een loop cutset voor graaf G willen bepalen.

   1. Geef een loop cutset C voor G die met behulp van het algoritme van *Suermondt en Cooper* gevonden kan worden;
   2. Geef tevens een loop cutset $C' \not\supseteq C$ voor G die *niet* door het algoritme gevonden kan worden.

b) Tijdens het redeneren met het bovenstaande probabilistische netwerk B worden aanwijzingen verkregen en ingevoerd. Laat door middel van een voorbeeld zien dat door het invoeren van een aanwijzing soms een *deelverzameling* van de oorspronkelijke loop cutset volstaat voor de toekomstige berekeningen.

Hertentamen Probabilistisch Redeneren

2 januari 2003, 9:00 - 12:00 uur

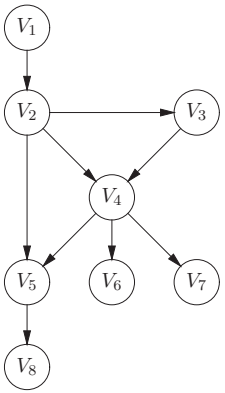
Het tentamen bevat drie opgaven. Bij elke opgave is vermeld hoeveel punten met de respectievelijke onderdelen van de opgaven zijn te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

(a: 10 ptn., b: 15 ptn., c: 15 ptn., totaal: 40 ptn.)

Beschouw het probabilistische netwerk $B = (G, \Gamma)$ waarin $G = (V(G), A(G))$ de onderstaande gerichte graaf is, en $\Gamma = \{\gamma_{V_i} \mid V_i \in V(G)\}$ gedefinieerd is door:



$\gamma_{V_1}(v_1) = 0.75$

$\gamma_{V_2}(v_2 \mid v_1) = 0.2$
$\gamma_{V_2}(v_2 \mid \neg v_1) = 1.0$

$\gamma_{V_3}(v_3 \mid v_2) = 0.5$
$\gamma_{V_3}(v_3 \mid \neg v_2) = 0.2$

$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge v_3) = 0.3$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge v_3) = 0.8$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid v_2 \wedge \neg v_3) = 0.7$
$\gamma_{V_4}(v_4 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_3) = 0.2$

$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge v_4) = 0.4$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid v_2 \wedge \neg v_4) = 0.8$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge v_4) = 0.6$
$\gamma_{V_5}(v_5 \mid \neg v_2 \wedge \neg v_4) = 0.1$

$\gamma_{V_6}(v_6 \mid v_4) = 0.6$
$\gamma_{V_6}(v_6 \mid \neg v_4) = 0.2$

$\gamma_{V_7}(v_7 \mid v_4) = 0.35$
$\gamma_{V_7}(v_7 \mid \neg v_4) = 0.1$

$\gamma_{V_8}(v_8 \mid v_5) = 1.0$
$\gamma_{V_8}(v_8 \mid \neg v_5) = 0.5$

Zij Pr de kansverdeling die door het probabilistische netwerk B gedefinieerd wordt.

a) Bepaal een loop cutset voor graaf G met behulp van het algoritme van *Suermondt en Cooper*. Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

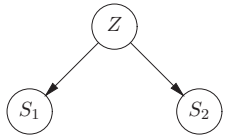
b) Illustreer de werking van het algoritme van *Pearl* in combinatie met *loop cutset conditioning* door het berekenen van de kans $\Pr(v_5)$. Laat duidelijk de verschillende stappen van je berekening zien.

c) Veronderstel dat nu de aanwijzingen $V_1 = \mathit{true}$ en $V_3 = \mathit{false}$ verkregen worden. Leg uit *hoe* de kans $\Pr^{v_1, \neg v_3}(v_5)$ gegeven netwerk B en het algoritme van *Pearl* berekend kan worden.

Opgave 2

(a: 15 ptn., b: 15 ptn., totaal: 30 ptn.)

Beschouw het volgende fragment van een probabilistische netwerk:



$\gamma_Z(z) = 0.05$

$\gamma_{S_1}(s_1 \mid z) = 0.8$
$\gamma_{S_1}(s_1 \mid \neg z) = 0.2$

$\gamma_{S_2}(s_2 \mid z) = 0.6$
$\gamma_{S_2}(s_2 \mid \neg z) = 0.3$

Het fragment beschrijft een ziekte Z, met waarden $Z = \mathit{true}$ (z) en $Z = \mathit{false}$ $(\neg z)$, en twee bijbehorende symptomen S_1 en S_2. Voor de in het fragment beschreven ziekte Z bestaat een behandeling B. Om te kunnen besluiten of een patiënt behandeling B moet ondergaan hebben betrokken artsen de volgende utiliteiten geschat voor de mogelijke gezondheidstoestanden van de patiënt:

$u(b \wedge z) = 0.6$	(behandelde ziekte)
$u(b \wedge \neg z) = 0.8$	(onnodige behandeling)
$u(\neg b \wedge z) = 0$	(onbehandelde ziekte)
$u(\neg b \wedge \neg z) = 1$	(ideale situatie)

a) Veronderstel dat de keuze voor het wel of niet behandelen van de patiënt wordt gemaakt met behulp van het *threshold model for patient management*.

1. Bepaal de drempelwaarde $P^*(z)$ waarbij de beslissing tot het wel of niet behandelen van een patiënt omslaat.
2. Veronderstel dat aanwezigheid van symptoom S_1 bij de patiënt geconstateerd is, dwz er is een observatie $S_1 = \mathit{true}$. Zal de patiënt, op basis van het model, wel of niet behandeld worden? Verklaar je antwoord.

b) Is de beslissing tot het wel of niet behandelen van de patiënt bij onderdeel a) gevoelig voor de kansschattingen voor variabele S_1, dwz. kan de beslissing omslaan als $\gamma_{S_1}(s_1 \mid z)$ of $\gamma_{S_1}(s_1 \mid \neg z)$ anders worden ingeschat? Verklaar je antwoord.

Opgave 3

(a: 15 ptn., b: 15 ptn., totaal: 30 ptn.)

Beschouw de B zoekheuristiek voor de automatische constructie van de graaf van een probabilistisch netwerk uit data. Beschouw voorts de MDL-kwaliteitsmaat, die gedefinieerd is door

$$Q(G, D) = \log P(G) - N \cdot H(G, D) - \frac{1}{2} K \cdot \log N$$

waarin $\log P(G)$ constant is, voor elke acyclisch gerichte graaf G en elke database D over een gegeven verzameling van variabelen V.

a) Veronderstel dat met de B zoekheuristiek reeds een graaf G is geconstrueerd. Laat V_1 en V_2 ouderloze knopen ($\rho(V_1) = \rho(V_2) = \emptyset$) in G zijn en zij $G_{V_i \to V_j}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, de graaf die resulteert door het toevoegen van pijl $V_i \to V_j$ aan G. Toon aan dat voor elke database D over V geldt dat:

$$Q(G_{V_1 \to V_2}, D) = Q(G_{V_2 \to V_1}, D)$$

Hint: Toon de gevraagde eigenschap aan door, voor de twee grafen, gelijkheid van elke term in de MDL-kwaliteitsmaat afzonderlijk aan te tonen.

b) Uit de eigenschap gegeven bij onderdeel a) volgt dat de B zoekheuristiek een *willekeurige* richting kiest voor een pijl die wordt toegevoegd tussen twee ouderloze knopen. De gekozen richting heeft echter wel invloed op de pijlen die vervolgens door de B zoekheuristiek aan de graaf toegevoegd zullen worden. Geef hiervoor twee verschillende redenen.

Cursus WIPROB
Naam Probabilistisch redeneren
Collegejaar 2000−2001

Student	Toetsdatum	Resultaat	Opmerkingen	Totaal	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c
1	02−07−2001	7.0		72	10	6	5	10	8	8	15	10	0
2		−	niet gedaan	0									
3	02−07−2001	−	niet ingeleverd	0									
4	02−07−2001	3.0		30	10	6	0	0	3	0	9	2	0
4	24−08−2001	7.0	her	71	15	8	9	7	10	5	0	7	10
5	02−07−2001	6.5		67	10	12	8	10	3	10	12	2	0
6	02−07−2001	8.5		85	10	15	10	10	5	10	15	10	0
7	02−07−2001	6.0		62	10	12	0	10	6	9	9	6	0
8		−	niet gedaan	0									
9		−	niet gedaan	0									
10		−	niet gedaan	0									
10	24−08−2001	6.5	her	67	15	5	8	0	5	10	10	4	10
11		−	niet gedaan	0									
12	02−07−2001	4.0		43	10	2	0	10	3	10	3	2	3
13		−	niet gedaan	0									
14	02−07−2001	6.5		64	10	9	2	7	3	0	15	8	10
15		−	niet gedaan	0									
15	24−08−2001	7.0	her	70	13	3	10	7	10	10	10	7	0
16	02−07−2001	5.0		47	10	7	5	7	2	6	0	5	5
16	24−08−2001	8.5	her	86	15	10	2	14	8	8	10	9	10
17	02−07−2001	10.0		100	10	15	10	10	10	10	15	10	10
18	02−07−2001	5.0		50	0	3	6	5	5	5	15	6	5
18	24−08−2001	7.0	her	71	15	10	2	15	8	10	3	3	5
19	02−07−2001	6.0		60	10	3	8	10	0	0	15	4	10
20	02−07−2001	3.0		29	0	0	3	10	3	8	3	2	0
20	24−08−2001	5.0	her	47	0	0	7	0	10	8	10	7	5
21	02−07−2001	6.5		65	10	5	0	10	6	8	15	6	5
22		−	niet gedaan	0									

23	02−07−2001	4.0		36	10	3	5	10	3	0	3	2	0
23	24−08−2001	3.0	her	30	0	0	5	7	0	0	10	8	0
24		−	niet gedaan	0									
25	02−07−2001	6.0		59	10	4	5	5	0	0	15	10	10
26	02−07−2001	8.5		85	10	15	10	10	0	5	15	10	10
27	02−07−2001	5.0		53	10	5	0	5	2	6	15	10	0
28	02−07−2001	3.0		27	0	3	2	10	0	0	9	0	3
28	24−08−2001	5.0	her	49	15	10	4	7	0	3	10	0	0
29		−	niet gedaan	0									
30		−	niet gedaan	0									
31	02−07−2001	5.0		48	10	5	3	10	0	0	15	5	0
32		−	niet gedaan	0									
32	24−08−2001	6.0	her	59	15	10	2	7	10	0	10	0	5
33	02−07−2001	5.0		52	10	5	5	5	0	3	9	10	5
33	24−08−2001	8.0	her	81	15	8	2	15	8	10	10	8	5

aantal deelnemers dat vak heeft gehaald in dit studiejaar: 17
aantal deelnemers dat vak niet heeft gehaald: 7
aantal inschrijvers dat geen tentamen heeft gedaan: 9

	1ste	2de
percentage van ingeleverd werk dat voldoende was:	50%	70%

Cursus WIPROB
Naam Probabilistisch redeneren
Collegejaar 2001− 2002

Student	Toetsdatum	Resultaat	Opmerkingen	Totaal	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d
1	03−07−2002	4.0		41	10	3		10	0	0	10	4	2	2	
1	21−08−2002	6.5	her	66	7	5	5	10	15			5	7	2	10
2	03−07−2002	8		83	10	15		10	8	5	10	10	5	10	
3	03−07−2002	5.0		51	10	1		10	0	0	0	10	10	10	
3	21−08−2002	5.0	her	52	10	5	6	10	13			8	0	0	0
4	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
5	03−07−2002	4.0		46	10	3		0	0	5	0	8	10	10	
6	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
7	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
8	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
9	03−07−2002	8.5		84	10	15		8	6	8	10	10	7	10	
10	03−07−2002	8.0		82	10	15		10	4	15	2	6	10	10	
11	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
12	03−07−2002	6.5		65	10	15		10	0	0	0	10	10	10	
13	03−07−2002	4.0		41	10	5		8	0	4	2	5	5	2	
14	03−07−2002	6.0		59	10	15		0	2	5	2	10	5	10	
15	03−07−2002	6.0		63	9	8		8	2	10	7	7	10	2	
16	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
17	03−07−2002	−	niet gedaan	0											
18	03−07−2002	5.0		52	10	3		10	0	2	3	4	10	10	
19	03−07−2002	9.5		93	10	15		10	8	11	10	9	10	10	
20	03−07−2002	4.0		42	10	5		10	4	0	2	2	7	2	
20	21−08−2002	6.0	her	58	10	12	6	10	6			9	0	5	0
21	03−07−2002	6.0		59	10	5		10	0	5	10	4	5	10	
22	03−07−2002	6.5		63	10	11		8	6	0	3	8	7	10	
23	03−07−2002	5.0		56	10	7		8	8	7	0	4	2	10	
23	21−08−2002	7.0	her	70	9	10	5	10	12			10	2	2	10
24	03−07−2002	5.0		56	10	15		0	6	3	0	4	8	10	

25	03−07−2002	8.0		76	10	15		8	8	5	0	10	10	10		
26	03−07−2002	5.0		55	10	10		10	8	3	2	4	8	0		
27	03−07−2002	6.0		61	10	11		0	4	6	1	9	10	10		
28	03−07−2002	5.0		56	0	10		0	4	10	10	10	10	2		
29	03−07−2002	4.0		43	10	10		10	0	3	0	3	5	2		
29	21−08−2002	7.0	her	68	10	10	0	10	12			6	5	5	10	
30	03−07−2002	−	niet gedaan	0												

aantal deelnemers dat vak heeft gehaald in dit studiejaar: 15
aantal deelnemers dat vak niet heeft gehaald: 7
aantal inschrijvers dat geen tentamen heeft gedaan: 8

	1ste	2de
percentage van ingeleverd werk dat voldoende was:	50%	80%

Cursus INFPROB
Naam Probabilistisch redenen
Collegejaar 2002 − 2003

Student	Toetsdatum	Resultaat	Opmerkingen	Totaal	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b
1	25−10−2002	6.5		67	7	10	10	10	5	5	5	15
2	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
2	02−01−2003	7.5	her	75	10	15	7	15	8		12	8
3	25−10−2002	8.0		83	15	10	10	8	5	10	10	15
4	02−01−2003	6.0	her	60	10	5	5	15	15		10	0
5	25−10−2002	7.0		68	15	8	0	10	10	10	5	10
6	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
7	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
8	25−10−2002	3.0		33	6	0	5	10	5	2	0	5
8	02−01−2003	7.0	her	69	10	10	5	13	15		8	8
9	25−10−2002	7.0		72	15	10	10	10	5	0	7	15
10	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
11	25−10−2002	5.0		53	3	0	10	10	5	0	10	15
11	02−01−2003	5.0	her	51	10	0	10	8	0		8	15
12	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
13	25−10−2002	7.0		69	13	8	10	8	5	5	5	15
14	25−10−2002	3.0		30	7	5	10	0	5	0	3	0
14	02−01−2003	3.0	her	31	5	0	0	4	0		7	15
15	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
16	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
17	02−01−2003	6.0	her	62	5	5	5	9	15		8	15
18	25−10−2002	8.0		80	15	10	10	10	5	10	10	10
19	25−10−2002	5.0		51	11	10	0	10	5	0	0	15
19	02−01−2003	7.5	her	75	10	10	15	15	0		10	15
20	25−10−2002	3.0		29	7	0	0	10	5	0	7	0
20	02−01−2003	6.0	her	59	10	15	0	9	0		10	15
21	25−10−2002	5.0		50	8	5	5	10	5	0	7	10
21	02−01−2003	7.5	her	74	10	10	10	15	4		10	15

22	25−10−2002	7.0		68	15	8	10	10	5	0	5	15
23	25−10−2002	6.0		62	7	8	8	10	5	2	7	15
24	25−10−2002	3.0		31	5	2	0	6	5	0	8	5
24	02−01−2003	6.0	her	61	10	10	0	15	15		11	0
25	25−10−2002	6.0		58	13	10	0	10	5	2	3	15
26	25−10−2002	5.0		55	5	10	5	10	5	5	5	10
27	25−10−2002	5.0		54	9	0	10	10	5	10	10	0
27	02−01−2003	6.0	her	57	10	10	0	11	8		10	8
28	25−10−2002	7.3		73	13	10	10	10	5	10	10	5
29	25−10−2002	7.0		72	12	10	10	10	5	5	5	15
30	25−10−2002	1.0		9	0	0	0	4	5	0	0	0
31	25−10−2002	8.0		78	15	10	10	10	8	5	5	15
32	25−10−2002	8.0		82	15	7	10	10	5	10	10	15
33	25−10−2002	4.0		43	13	10	0	10	5	0	5	0
33	02−01−2003	3.0	her	35	10	10	0	7	8		0	0
34	25−10−2002	6.5		63	3	10	10	10	5	0	10	15
35	25−10−2002	8.5		87	15	10	10	10	5	15	7	15
36	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
37	25−10−2002	6.0		57	12	5	10	8	5	0	7	10
38	25−10−2002	5.0		55	0	10	10	10	5	10	5	5
38	02−01−2003	6.5	her	64	10	5	0	15	15		11	8
39	25−10−2002	−	niet gedaan	0								
39	02−01−2003	3.0	her	30	10	15	0	0	5		0	0
40	25−10−2002	8.0		82	15	7	10	10	5	10	10	15

aantal deelnemers dat vak heeft gehaald in dit studiejaar: 27
aantal deelnemers dat vak niet heeft gehaald: 6
aantal inschrijvers dat geen tentamen heeft gedaan: 7

	1ste	2de
percentage van ingeleverd werk dat voldoende was:	59%	64%

Probabilistisch redeneren

vraag 1 Vond je het vak relevant voor je studie?

1	niet		x	
2			x	
3			x	
4		3	x	***
5	wel	2	x	**

vraag 2 Vond je het vak leuk?

1	niet		x	
2			x	
3			x	
4		3	x	***
5	wel	2	x	**

vraag 3 Hoeveel hoorcolleges heb je bezocht?

1	0-2		x	
2	3-5		x	
3	6-8	1	x	*
4	9-11	2	x	**
5	>11	2	x	**

vraag 4 Hoeveel uur heb je in totaal nodig gehad voor dit vak (inclusief zelfstudie, practicum, tentamen enz)?

1	0-30	1	x	*
2	30-60	1	x	*
3	60-90	1	x	*
4	90-120		x	
5	>120	1	x	*

vraag 5 Hoe waren de praktische aspecten georganiseerd (beschikbaarheid literatuur, website, cijferregelingen enz)?

1	slecht		x	
2			x	
3			x	
4		3	x	***
5	goed	2	x	**

vraag 6 Had je genoeg voorkennis?

1	niet		x	
2			x	
3			x	
4		2	x	**
5	wel	3	x	***

vraag 7 Hoe vond je de gebruikte literatuur?

1	onduidelijk		x	
2			x	
3			x	
4		1	x	*
5	duidelijk	4	x	****

vraag 8 Werd het hoorcollege duidelijk gegeven?

1	onduidelijk		x	
2			x	
3			x	
4		1	x	*
5	duidelijk	4	x	****

vraag 9 Hoe was de presentatie van de docent?

1	saai		x	
2			x	
3		1	x	*
4		1	x	*
5	boeiend	3	x	***

vraag 10 Heeft het werkcollege geholpen om de stof beter te begrijpen?

1	niet		x	
2			x	
3		1	x	*
4		1	x	*
5	veel	1	x	*

vraag 11 Hoe was de begeleiding op het werkcollege?

1	slecht		x	
2			x	
3		1	x	*
4		1	x	*
5	goed	1	x	*

vraag 12 Heb je iets zinvols geleerd van het practicum?

1	nee		x	
2			x	
3			x	
4			x	

5	ja	x	

vraag 13 Hoe was de begeleiding op het practicum?

1	slecht	x	
2		x	
3		x	
4		x	
5	goed	x	

vraag 14 Vond je de vraagstelling op het tentamen (of eindopdracht) redelijk?

1	nee	x	
2		x	
3		x	
4		1 x	*
5	ja	1 x	*

Opmerkingen over de bestede tijd

Hoorcolleges goed georganiseerd, duidelijk begrenst en goed begrijpbaar. [1998/cki]

Opmerkingen over de organisatie vak

Transparanten liever online [1997/mti]

Opmerkingen over de literatuur

Reader en sheets waren een hele goede hulp bij het leren van het tentamen. [1998/cki]

Erg goede reader!!!! [1998/cki]

Opmerkingen over het hoorcollege

Hoewel het de eerste keer was voor de docente om een hoorcollege te geven, deed ze het heel goed! [1997/mti]

Goede docent!!! [1998/cki]

Opmerkingen over het practicum

Er was geen begeleiding bij het practicum. Dat was geen echter geen probleem. De documentatie bij het softwarepakket was duidelijk. [1997/mti]

Opmerkingen over het tentamen

'k Heb het tentamen niet gedaan vanwege te weinig tijd [1998/mti]

Reactie van de docent

Alhoewel ik natuurlijk geen conclusies kan trekken uit de evaluaties van maar vijf studenten, ben ik toch blij met de positieve reacties. Ik hoop dat de overige studenten die deelgenomen hebben aan het vak het ook zo ervaren hebben. Natuurlijk kan een ieder die nog opmerkingen heeft over aspecten van het vak (en de manier waarop het gegeven is) bij mij terecht, zodat ik die volgend jaar mee kan nemen.

Ik wou nog even ingaan op twee individuele opmerkingen. De eerste opmerking betreft het online willen hebben van de transparanten: ik heb dit jaar nog de handgeschreven transparanten van voorgaande jaren gebruikt, waardoor online zetten niet zo makkelijk was. Ik ben van plan volgend jaar modernere exemplaren te gaan gebruiken, zodat ik ze wel online kan zetten. Overigens waren er wel nu kopieen van de transparanten beschikbaar.

De tweede opmerking ging over het ontbreken van begeleiding bij het practicum. Er was helemaal geen practicum bij dit vak; ik had de studenten wel gewezen op een lijstje links, op de website van het vak, naar lokaties waar je software kon downloaden, of online gebruiken, voor het eenvoudig construeren en doorrekenen van een probabilistisch netwerk. Ik ben blij dat hier kennelijk gebruik van gemaakt is, want het geeft wel extra inzicht om er eens mee te spelen.

Probabilistisch redeneren

vraag 1 Vond je het vak relevant voor je studie?

1	niet	x	
2		1 x	*
3		1 x	*
4		1 x	*
5	wel	4 x	****

vraag 2 Vond je het vak leuk?

1	niet	x	
2		1 x	*
3		x	
4		3 x	***
5	wel	3 x	***

vraag 3 Hoeveel hoorcolleges heb je bezocht?

1	0-2	x	
2	3-5	1 x	*
3	6-8	1 x	*
4	9-11	2 x	**
5	>11	3 x	***

vraag 5 Hoe waren de praktische aspecten georganiseerd (beschikbaarheid literatuur, website, cijferregelingen enz)?

1	slecht	x	
2		x	
3		x	
4		4 x	****
5	goed	3 x	***

vraag 6 Had je genoeg voorkennis?

1	niet	x	
2		x	
3		x	
4		3 x	***
5	wel	4 x	****

vraag 7 Hoe vond je de gebruikte literatuur?

1	onduidelijk	1 x	*
2		x	
3		1 x	*
4		2 x	**
5	duidelijk	3 x	***

vraag 8 Werd het hoorcollege duidelijk gegeven?

1	onduidelijk	x	
2		x	
3		1 x	*
4		2 x	**
5	duidelijk	4 x	****

vraag 9 Hoe was de presentatie van de docent?

1	saai	1 x	*
2		x	
3		x	
4		4 x	****
5	boeiend	2 x	**

vraag 10 Heeft het werkcollege geholpen om de stof beter te begrijpen?

1	niet	x	
2		1 x	*
3		2 x	**
4		1 x	*
5	veel	3 x	***

vraag 11 Hoe was de begeleiding op het werkcollege?

1	slecht	x	
2		1 x	*
3		2 x	**
4		1 x	*
5	goed	3 x	***

vraag 12 Heb je iets zinvols geleerd van het practicum?

1	nee	x	
2		x	
3		1 x	*
4		1 x	*
5	ja	x	

vraag 13 Hoe was de begeleiding op het practicum?

1	slecht	x	
2		x	
3		1 x	*
4		1 x	*

5	goed	x	

vraag 14 Vond je de vraagstelling op het tentamen (of eindopdracht) redelijk?

1	nee	x	
2		1 x	*
3		x	
4		2 x	**
5	ja	2 x	**

Opmerkingen over het vak

Leuk, maar wel lastig.. [1997/mti]

Opmerkingen over het aantal uur

20
50
??
40
20

Opmerkingen over de bestede tijd

Ik heb door omstandigheden te weinig tijd aan dit vak besteed, terwijl dat wel echt nodig is.
[1997/mti]

Opmerkingen over de organisatie vak

De statistiek was wel weer lastig.. [1997/mti]

Opmerkingen over de literatuur

Volgende keer misschien sheets nummeren; is wel handig [1998/mti]

Een index in het dictaat zou handig zijn en genummerde sheets zijn ook erg praktisch zijn. [1997/mti]

Opmerkingen over het hoorcollege

Ontzettend enthousiaste en leuke docente! [1997/mti]

Probabilistisch redeneren

vraag 1 Vond je het vak relevant voor je studie?

1	niet	x	
2		3 x	***
3		1 x	*
4		8 x	********
5	wel	4 x	****

vraag 2 Vond je het vak leuk?

1	niet	x	
2		2 x	**
3		5 x	*****
4		7 x	*******
5	wel	2 x	**

vraag 3 Hoeveel hoorcolleges heb je bezocht?

1	0-2	2 x	**
2	3-5	1 x	*
3	6-8	3 x	***
4	9-11	2 x	**
5	>11	8 x	********

vraag 5 Hoe waren de praktische aspecten georganiseerd (beschikbaarheid literatuur, website, cijferregelingen enz)?

1	slecht	x	
2		x	
3		1 x	*
4		5 x	*****
5	goed	10 x	**********

vraag 6 Had je genoeg voorkennis?

1	niet	x	
2		x	
3		x	
4		7 x	*******
5	wel	9 x	*********

vraag 7 Hoe vond je de gebruikte literatuur?

1	onduidelijk	2 x	**
2		1 x	*
3		4 x	****
4		3 x	***
5	duidelijk	6 x	******

vraag 8 Werd het hoorcollege duidelijk gegeven?

1	onduidelijk	x	
2		1 x	*
3		2 x	**
4		10 x	**********
5	duidelijk	3 x	***

vraag 9 Hoe was de presentatie van de docent?

1	saai	x	
2		2 x	**
3		4 x	****
4		8 x	********
5	boeiend	2 x	**

vraag 10 Heeft het werkcollege geholpen om de stof beter te begrijpen?

1	niet	x	
2		x	
3		x	
4		4 x	****
5	veel	5 x	*****

vraag 11 Hoe was de begeleiding op het werkcollege?

1	slecht	x	
2		1 x	*
3		x	
4		6 x	******
5	goed	2 x	**

vraag 12 Heb je iets zinvols geleerd van het practicum?

1	nee	x	
2		x	
3		1 x	*
4		x	
5	ja	x	

vraag 13 Hoe was de begeleiding op het practicum?

1	slecht	x	
2		x	
3		1 x	*
4		x	

5	goed	x	

vraag 14 Vond je de vraagstelling op het tentamen (of eindopdracht) redelijk?

1	nee	x	
2		3 x	***
3		3 x	***
4		3 x	***
5	ja	5 x	*****

Opmerkingen over het vak

Voor een I&M-student niet echt van belang. [1999/ica]

Het vak was zeker interessant, maar hoe leuk het was werd naar mijn mening te sterk beperkt doordat er te weinig informatie verstrekt werd, de uitdaging was niet groot genoeg [1999/ica/1]

Opmerkingen over het aantal uur

50
200
30
30
150
70
77
100
60
80
40
140
70

Opmerkingen over de bestede tijd

Er was geheel geen voorbereiding nodig voor het tentamen en voor de vragen ook niet, wederom het grote nadeel, het vak was te makkelijk. Maak het eens een beetje interessant we doen hier wel universiteit, en niet HBO ofzow [1999/ica/1]

Ik heb het vak vorig jaar gevolgd in het vijfde blok, maar toen niet de evaluatie ingevuld. Het tentamen heb ik toen niet gehaald en het hertentamen kon ik niet maken, dus heb ik dit blok weer een poging gedaan, maar het vak niet gevolgd. [1998/ica]

Opmerkingen over de organisatie vak

De slides waren erg makkelijk. [1999/ica]

Ontzettend snel het tentamen nagekeken. Erg leuk dat het kan! [1998/ica]

Opmerkingen over de literatuur

De sheets waren in het nederlands en dat was voor mij erg fijn. De wiskundige gedeeltes vond ik moeilijk te volgen in het engels. [1998/ica]

Verschrikkelijk dictaat. Vooral de verwijzingen waren zeer irritant. Het is fijn om eerst een nieuwe term te definieren en het vervolgens toe te passen. In het dictaat werd vaak het omgekeerde gedaan. Verder las het niet makkelijk: ik had het idee dat ik niks opnam tijdens het lezen. Misschien komt het door de lappen tekst. Tot slot was het inbinden niet erg effectief. De helft van de blaadjes zat los op het einde van het blok... [1999/ica]

Goede formuleringen, alleen jammer dat verschillende vragen al uitgespeld waren [1999/ica/1]

Wellicht nog wat meer uitwerkingen van enkele opgaven zouden handig zijn voor zelfstudie. [2000/ica]

Twee opmerkingen over de literatuur: [1998/ica]

Het dictaat bevatte totaal geen leesbaar verhaal. Eigenlijk was het (voor mij) meer een opsomming van alle terminologie die in het vakgebied wordt gebruikt. [1999/ica]

Opmerkingen over het hoorcollege

Jammer was de storende aanweizgheid vaan een student die zich gedroeg alsof hij persoonlijk les kreeg door overal naar de bekende weg te vragen en overal commentaar op te leveren, hier kon de docente niets aan doen [1998/ica]

De docent probeerde het beste van de vaak saaie stof te maken. Het tempo mocht wat mij betreft best wat hoger. [1999/ica]

Silja heeft goed haar best gedaan, maar de praktijk schijnt te leren dat de stof zo beperkt moest zijn, erg jammer, want ik heb zelf gemerkt dat er zoveel meer aspecten zijn die interessant zijn aan het vak, wederom maak het vak in godshemelsnaam een beetje moeilijker, het was veeeeeel te makkelijk [1999/ica/1]

Opmerkingen over het werkcollege

Heb het werkcollege niet gevolgd. Was er wel. [1998/ica]

Inderdaad een goed idee om een keer per week opgaven te maken. [1999/ica]

Beetje weinig begeleiding, maar goed, dat was wel overkomelijk, het werkcollege heeft veel verduidelijkt, maar er waren wederom niet genoeg complexe elementen om het vak echt moeilijk te maken [1999/ica/1]

Ben niet op werkcolleges geweest [1999/anders]

Opmerkingen over het practicum

Ehhhr, juist practicum ??? [1999/ica/1]

Opmerkingen over het tentamen

Net zoals de rest van het vak was het tentamen veeeeeeel te makkelijk, maak het allemaal een een graadje of 2 moeilijker (en dan let ik wel op de rest van de deelnemers van het vak, want naar mijn

mening mag de inhoud van het vak zeker met de helft vermeerderd worden, dan zou het een beetje een uitdaging zijn. [1999/ica/1]

Vraag 2 vond ik vrij vaag, de stof was namelijk niet zo grondig behandeld als er hier naar gevraagd werd. [1998/ica]

De sensitiviteits-analyse had in het hoorcollege wel wat uitgebreider besproken mogen worden. [1999/ica]

Opmerkingen over wat er behouden moet blijven

De nederlandse sheets en de beschikbaarheid van deze sheets [1998/ica]

Werkcollege en de slides op de website. [1999/ica]

Niet nog makkelijker maken [1999/ica/1]

De enthousiaste docente en de handige sheets (overzichtelijker dan het dictaat) [1998/ica]

werkcollege [1999/ica]

Opmerkingen over wat er moet veranderen

Er wordt regelmatig gerefeerd aan verschillende methodes, maar deze staan niet direct en kort en bondig in het dictaat. [1998/ica]

Misschien een practicum? [1998/ica]

Het dictaat. Kort en bondig leest veel beter. [1999/ica]

Moet moeilijker worden, meer inhoud, meer kennis, meer nut om het te volgen, ik zit hier niet om puntjes binnen te halen, ik zit hier om er wat van te leren, zorg er dan ook eens voor dat ik behoorlijk wat leer, ik kan makkelijk 2 keer zo veel aan. [1999/ica/1]

Meer antwoorden van huiswerkopgaven beschikbaar stellen via internet [1999/anders]

De opbouw is een beetje vreemd. Het valt nl. in twee delen. Eerst leer je hoe je kansen kan berekenen in verschillende netwerken (vrij intensief) en dan gaat het er opeens over hoe je zo'n netwerk kan bouwen en kan valideren (vrij vaag) [1998/ica]

Iets minder medische voorbeelden, ik wordt daar helemaal gek van... [1999/ica]

Opmerkingen over andere dingen

Het is een lastig vak, maar wordt door bijna iedereen afgemaakt door de enthousiaste docente! Silja houdt het boeiend en ze is erg behulpzaam. Chapeau! [1998/ica]

Reactie van de docent

Aangenaam verrast was ik, dat er zo'n grote groep deelnemers aan het vak was, terwijl het net een blok ervoor ook al gegeven was. Ik vind het ook erg prettig dat de helft van de ingeschrevenen de evaluatie ingevuld heeft, zo kan ik er tenminste wat conclusies uit trekken.

Er zijn twee dingen die me opvallen bij de evaluatie: het diktaat wordt minder gewaardeerd dan voorgaande jaren en de mening over het tentamen is sterk verdeeld.

Wat betreft het tentamen. Deze keer was het tentamen iets moeilijker dan de voorgaande keren dat ik het gemaakt had, in de zin dat een aantal vragen wat meer inzicht vereisten om tot een juist antwoord te komen. Degenen die de stof niet goed begrepen hebben zijn daardoor duidelijk in het nadeel. Ik zie dit ook terug in de verdeling van de tentamencijfers: er zijn nu meer hogere en lagere cijfers in plaats van een heleboel rond de 5 en de 6. Er waren twee aan elkaar relateerde opmerkingen in de evaluatie waar ik op wil reageren: een onderdeel van het tentamen bestond uit twee vragen over 'sensitiviteits analyse'. De eerste was bedoeld als opwarmertje en daarvoor hoefde alleen een formule die op de transparanten stond op de juiste manier ingevuld te worden; de tweede vraag vroeg wat inzicht. Aangezien niemand deze vragen juist beantwoord heeft heb ik iedereen een deel van de punten voor dit onderdeel kado gegeven.

Het diktaat is kort en bondig. De auteur ervan was al bezig om het wat meer met voorbeelden uit te breiden, maar gezien het feit dat het vak ineens in blok 1 ipv in blok 5 gegeven moest worden is het niet gelukt op tijd substantiele veranderingen aan te brengen. Met de nu geplaatste opmerkingen in de evaluatie zullen we er nog eens naar kijken. Het diktaat bevat eigenlijk precies alle theorie, deels in de lopende tekst. Misschien dat sommige dingen hierin wat explicieter naar voren gehaald kunnen worden. Iemand klaagt over de verwijzingen in het diktaat; dit kan volgens mij alleen betrekking hebben op de literatuur verwijzingen: het lijkt me dat een geinteresseerde studenten toch moet weten waar hij of zij meer informatie over het onderwerp vandaan kan halen. Het diktaat bevat verder weinig uitgewerkte voorbeelden, maar die komen op het college uitgebreid aan bod en staan ook op de beschikbare transparanten. Veel intuitie, met name achter de gegeven algoritmes is ook niet in het diktaat terug te vinden, wordt wel op het college gegeven en ik heb ook een handout gemaakt waarin dit meer terug te vinden is.

Bij de suggesties ter verandering komen een aantal punten naar voren die ik wel vaker hoor en daarom even wil aanstippen. Er wordt aanbevolen om misschien een practicum in te voeren. Ik heb hier wel eens over nagedacht, maar weet niet goed hoe dit een zinvolle invulling te geven. Kleinere opdrachten zijn mogelijk te triviaal en grotere, zoals het bouwen van een probabilistisch netwerk voor een "echte" toepassing, vereisen veel vaardigheden die ook al bij bijvoorbeeld Expert Systemen aan bod zijn gekomen. De website van het vak bevat wel links naar software pakketten (gratis) en applets waarmee bijvoorbeeld kleine netwerken geconstrueerd en doorgerekend kunnen worden, dus studenten worden in de gelegenheid gesteld er wat mee te spelen. Er wordt verder vaak gevraagd naar uitwerkingen van opgaven. Voor de 'reken' opgaven staan de antwoorden op de website, zodat je die kan controleren. Uitwerkingen geef ik niet want er staan voldoende voorbeelden volledig uitgewerkt op de transparanten en er moet nog wel iets te oefenen over blijven. Tot slot hebben veel mensen iets tegen medische voorbeelden. Ik kan me daar op zich iets bij voorstellen, maar de interessante praktijk voorbeelden liggen nu eenmaal vaak in het medische domein, juist omdat je in dat domein zoveel onzekerheid hebt; het besproken formalisme is zelfs niet interessant voor domeinen waarin geen onzekerheid heerst.

Tot slot de suggesties over wat er behouden moet blijven: het werkcollege en de transparanten. Ik zie duidelijk het nut van een werkcollege in en wil het graag laten voortbestaan; er is echter geen staf voor beschikbaar, dus ik kan niet garanderen dat het er altijd een werkcollege zal zijn. Transparanten zullen online beschikbaar blijven, echter niet meer in het nederlands. Het vak behoort nu tot een engelstalige master en moet in principe in het engels gegeven kunnen worden; zodra de transparanten vertaald zijn zal ik wijzingen niet meer in de nederlandse versie doorvoeren en die zal dus verouderen. Ik vind het geen probleem om de (dan verouderde) nederlandse versie ook beschikbaar te stellen, maar zal die bij het college niet meer gebruiken.

Bijlage B

Onderwijsmateriaal **Besliskunde**

Deze bijlage bevat een deel van het onderwijsmateriaal dat door mij is ontwikkeld voor het vak Besliskunde. Tevens bevat deze bijlage de evaluatie van het vak en de uitslagen van de tentamens, de taken en tevens de eindcijfers.

Webpagina

- webpagina 2002-2003.

Transparanten

- *assessing utilities* (1 college-uur);
- *risk attitudes* (2 college-uren);
- *multi-attribute utility theory* (7 college-uren);
- *the analytic Hierarchy process* (2 college-uren).

Opgaven en uitwerkingen

- werkcollege 3 met uitwerkingen;

Tentamen en hertentamen

Bijgesloten tentamens bestaan steeds voor de helft uit mijn opgaven.

- Tentamen 27 maart 2003;
- Hertentamen 7 mei 2003.

Uitslagen

Bij de uitslagen zijn het tentamen en hertentamen van een jaar samengevoegd.

- uitslagen 2002-2003.

Studenten evaluatie

- evaluatie 2002-2003.

Course: Decision Analysis (Besliskunde)

CENTER FOR ALGORITHMIC SYSTEMS
MSc Programma ‘‘Algorithmic Systems" 2002-2003

Announcements:

Check this page regularly, for the overview of subjects and exercises will be updated almost daily.

10/02/03: A-Eskwadraat schijnt nu toch een lading boeken van Clemen binnengekregen te hebben...

04/02/03: A-Eskwadraat schijnt aangegeven te hebben dat het boek van Clemen waarschijnlijk niet meer geleverd gaat worden. We adviseren daarom om het rechtstreeks via Broese te proberen (dit hebben we al steeds al mogelijkheid aangegeven) of anders direct via de uitgever (anderen die dit gedaan hebben hadden het boek binnen een paar dagen in huis). De uitgever is Thomson Learning (Duxbury Press).
(NB nogmaals: probeer het niet bij Amazone of Bol.com, want die zijn raar duur!)

23/01/03: de maandaggroep van het werkcollege is samengevoegd met de dinsdaggroep (op dinsdag)!

22/01/03: the practical assignment has been added (next deadline 21 February!!!).

Contents

Goal
Schedule and Instructors
Subject overview
Grading
Practical assignment
Literature
Software
Other links

Goal

Acquiring knowledge and understanding of different models and decision analysis techniques for (rational) decision making with and without uncertainty. Roughly, the following subjects will be discussed:
decision criteria
decision trees
utility theory
multi attribute decision making

Schedule and Instructors:

This course is given in Period 3: weeks 2 - 8 (2003); the final exam is in week 9.
Lectures are given twice a week, on monday (13-15) and thursday (11-13).
Once a week (either on monday, 15-17, or tuesday 11-13) assistence is provided for some exercises; these exercises deal with the subjects from the previous week.
For further details, see the official schedule.

Lecturers:
prof.dr.ir. Linda van der Gaag: CGN, office A348 (e-mail)
dr. Silja Renooij: CGN, office A350 (e-mail)

Assistants:
drs. Danielle Sent: CGN, office A316 (e-mail)
Martijn Lafeber (e-mail)

Date	Subject	Transp.	Book (Clemen)	Exercises
1) **6 January** (mon)	Introduction, Decision criteria	1-27	Ch 1, Ch 2: 19 - 28, 31 - 34, Ch 3: 41 - 50, Ch 4: 118 - 127	book: 4.9 extra: (see werkcol.-1) 1, 2, 3
2) **9 January** (thurs)	Decision Trees, Foldback analysis	28-55	Ch 3: 67 - 76, Ch 4: 101 - 108	book: 4.4, 4.8 extra: (see wc-1) 5, 6, 7 *werkcollege-1*
3) **13 January** (mon)	Probability basics, Subjective assessments, Heuristics, Biases, Continuous variables	56-81	Ch 7: 219 - 232, 236 - 238, 239 - 241, 242 - 250, Ch 8: 265 - 285, 291 - 296	book: 8.15 (c, d), 8.27 extra: (see wc-2) 1, 2
4) **16 January** (thurs)	(Continuous variables), Lotteries, Utility axioms	82-105	Ch 3: 77 - 82, Ch 14: 503 - 510	extra: (see wc-2) 4, 5, 6, 7, 8 *werkcollege-2*

5) **20 January** (mon)	Utility assessment, Risk attitudes	106-129	Ch 2: 28 - 31, Ch 13: 461 - 477, 482 - 488, Ch 14: 510 - 516, 518 - 519	book: 13.6, 13.7, 13.9, 13.12, 13.14, 13.17, 13.21, 13.26, 13.29 extra: (see wc-3) 2 - 5
6) **23 January** (thurs)	(Risk attitudes), Multi-Attribute Utilities, Weight assessment	130-148	Ch 4: 127 - 135, Ch 15: 530 - 540, 542 - 553, Ch 16: 576 - 577	transparancy: nr 137 book: 4.18, 15.6, 15.9, 15.16, 16.1 - 16.4 extra: (see wc-3) 7, 8 *werkcollege-3*
7) **27 January** (mon)	Utility independence, Additive independence	149-171 remarks	Ch 16: 579 - 591	book: 15.26, 16.5, 16.6, 16.7, 16.13 extra: (see wc-4) 2 - 7
8) **30 January** (thurs)	Isopreference curves, No independence	172-191	Ch 15: 540 - 542, Ch 16: 578, 592 - 593	book: 15.3, 16.8 *werkcollege-4*
9) **3 February** (mon)	MAUT - more than 2 attributes	192-213	Ch 16: 591 - 592, 593 - 599	book: 16.13, 16.15 extra: (see wc-5) 1, 2, 3
10) **6 February** (thurs)	MAUT in (medical) practice	214-240	---	extra: (see wc-5) 4 - 7 *werkcollege-5*
11) **10 February** (mon)	Sensitivity Analysis	241-271	Ch 5: 155 - 169, 172 - 174, 178	book: extra: (see wc-6)
12) **13 February** (thurs)	(Sensitivity Analysis), Value of Information,	272 - 284	Ch 12: 435 - 446, 448 - 450	book: extra: (see wc-6) *werkcollege-6*
13) **17 February** (mon)	Analytic Hierarchy Process (AHP), Summary	285 -312	---	*opgaven* *antwoorden*
14) **20 February** (thurs)	--- (geen college)	---	---	---

Grading

The course will be graded based on a practical assignment and a written exam (open book). To receive a final grade (FG), both the assignment grade (AG) and the grade for the written exam (EG) should be at least a 5.0; the final grade is then determined as follows:

FG = 1/3 AG + 2/3 EG

The list of exercises given each week should give you an idea of how you are doing thus far.

The final written exam is an open book exam: you can bring Clemen and any supplementary reading material, the transparancies, and your notes.

The practical assignment consists of performing a decision analysis and may be done either alone or in pairs.

Deadlines:

- 31 January 2003: *e-mail* to one of the instructors describing in *plain text* your choice of decisionproblem;
- 21 February 2003: 10 page (max) written report, *on paper.*

Literature

Book (also see its website):

Robert T. Clemen (1996) (second edition)
Making Hard Decisions -- An Introduction to Decision Analysis
Duxbury Press, ISBN 0534260349

The book can be ordered from A-Eskwadraat, otherwise directly from Broese *).
(The holidays may cause a delay in delivery!)
Please note that Amazon and Bol are for some reason far more expensive.

Transparancies: the transparancies are considered (essential) supplementary material. A few topics discussed in the course are not covered by the book; in addition, a number of topics are covered in more detail than provided by the book. All relevant information can be found on the transparancies.

Further reading: for those seeking additional material, we recommend the following:

- R.L. Keeney & H. Raiffa, Decisions with Multiple Objectives,
  Cambridge University Press, 1993

  chapters of interest: Ch 4 (utility theory), 5, 6 (Multi Attribute Utility Theory)

- W.L. Winston, Operations Research: Applications an Algorithms,
  Duxbury Press, 1994

  chapters of interest: Ch 13 (decision criteria), 14 (MAUT, Analytic Hierarchy Process)

- J.A. Rice, Mathematical Statistics and Data Analysis,
  2nd edition, Duxbury Press, 1995

  chapters of interest: Ch 15

- H.C. Sox, M.A. Blatt, M.C. Higgins, K.I. Marton (1988), Medical Decision Making,

Butterworth-Heinemann, 1988.

Software

To enhance understanding of different subjects, we recommend trying out the demo version of, for example, DPL. More information about decision analysis in general and software more in particular can be found on the website of the Decision Analysis Society (DAS).

Other links

- The Center for Algorithmic Systems.
- The MSc programme ‘Algorithmic Systems’.

Silja Renooij 18 February, 2003.

Assessing utilities

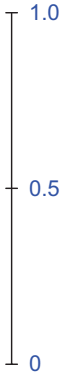
(college 5)

Utility assessment

- subjective assessment
  - direct methods
    - magnitude estimation/production
    - ratio estimation/production
  - indirect (behavioural) methods
    - based on reference gambles
- "objective" assessment
  - choose a mathematical function

Direct methods

Magnitude estimation or production can be done using a utility scale:



Example

Reconsider the diabetic gangrene treatment example. To assess the utilities for the different treatment consequences, a patient is asked one of the following type of questions:

- "How do you value life after an above-knee amputation?" (estimation);
- "Which consequence do you associate with a utility of 0.2?" (production) ■

Direct methods

Ratio estimation or production:

Example

My sister is interested in buying a new car. To assess the utilities for the different car options, she is asked one of the following type of questions:

- "How much more do you value a Volvo than a Fiat?" (estimation);
- "Which car seems to you twice as valuable as a Fiat?" (production) ■

This method was used to assess the empirical utility of money (Galanter, 1962).

empirical utility function for monetary gain: $\sim \sqrt{x}$

empirical utility function for monetary loss: $\sim -x^2$

Reference gamble

Consider a set of consequences for which utilities are to be assessed. Let c_i, c_j, c_k be consequences from that set such that $c_i \succeq c_j \succeq c_k$.

A reference gamble is a choice between two lotteries:

1. the certain lottery $L = [1.0, c_j]$
2. the simple lottery $L' = [p, c_i; (1-p), c_k]$

- L' is the reference lottery of the "gamble" — if $u(c_i) = 1.0$ and $u(c_k) = 0$, then L' is called a standard reference lottery;
- for fixed c_i, c_j, and c_k, the probability p for which $L \sim L'$ is the indifference probability for L and L';
- for fixed p and c_i, c_k, the consequence c_j for which $L \sim L'$ is the certainty equivalent, or indifference point, for L'.

Assessment using certainty equivalents

The utilities of a decision maker for the possible consequences in a decision problem can be assessed using several certainty equivalents:

1. elicit a preference order on consequences from most preferred (c^+) to least preferred (c^-);
2. assign the first two points of the utility function:
$$u(c^+) = 1 \text{ and } u(c^-) = 0$$
3. create a standard reference gamble with $p = 0.5$;
4. elicit the certainty equivalent c_{CE} for the reference lottery;
5. compute the utility of this indifference point;
6. create two reference gambles with $p = 0.5$ and consequences c^+ and c_{CE}, and c_{CE} and c^-, respectively;
7. repeat steps 4 – 6 until enough points are found to draw the utility curve.

Computing a utility

Consider the lotteries L and L' of a reference gamble:

$$L = [1.0, c_j] \text{ and } L' = [p, c_i; (1-p), c_k]$$

where $c_i \succeq c_j \succeq c_k$. Assume that the utilities $u(c_i)$ and $u(c_k)$ for consequences c_i and c_k are known.

Question:

How do we compute $u(c_j)$ for consequence c_j?

Answer:

If
either
p is the indifference probability for L and L',
or
c_j is the certainty equivalent of L'
then $L \sim L'$ and consequently

$$1.0 \cdot u(c_j) = p \cdot u(c_i) + (1-p) \cdot u(c_k)$$

From this equation we can solve $u(c_j)$.

An example

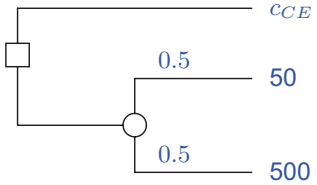
Suppose you have an old computer for which components are bound to need replacement in the near future. You have a number of replacement alternatives that will cost you between € 50 and € 500.

What is your utility function?

Two points can be fixed:

$$u(€\,500) = 0 \text{ and } u(€\,50) = 1$$

You are then presented with the following gamble:



Suppose that $c_{CE} = 200$ is the indifference point for this gamble. We then have that

$$1.0 \cdot u(200) = 0.5 \cdot u(50) + 0.5 \cdot u(500) = 0.5$$

Assessment using probability equivalents

The utilities of a decision maker for the possible consequences in a decision problem can be assessed using several probability equivalents:

1. elicit a preference order on consequences from most preferred (c^+) to least preferred (c^-);
2. assign the first two points of the utility function:

$$u(c^+) = 1 \text{ and } u(c^-) = 0$$

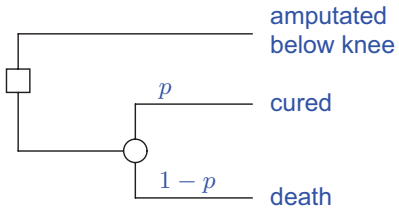
3. create a standard reference gamble for enough intermediate outcomes;
4. elicit the indifference probability for the lotteries in each of the gambles;
5. compute the utility of an intermediate outcome using this indifference probability.

An example

Reconsider the decision problem for treatment of diabetic gangrene. The possible consequences of treatment are:

cured	1.0
amputated below knee	?
amputated above knee	?
death	0.0

The patient is given the following gamble:



Suppose that $p = 0.9$ is the indifference probability for the lotteries. We then have that

$$\begin{aligned} & u(\text{amputated below knee}) \\ = \; & 0.9 \cdot u(\text{cured}) + 0.1 \cdot u(\text{death}) = 0.9 \end{aligned}$$

Direct vs indirect methods

direct:

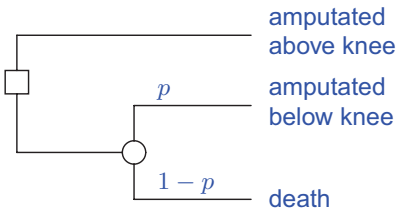
- roots in psychophysics
- inferior in both validity & reliability
- easily applied to risky tasks with complex consequences

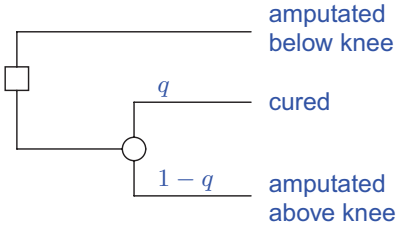
indirect:

- roots in utility axioms
- time consuming
- irrelevant ”gaming” effect
- distasteful / unethical
- unsuitable for measuring very small or very large utilities

Example: extreme utilities

For the diabetic gangrene decision problem, we could use the following gambles:





Subjective utility assessments

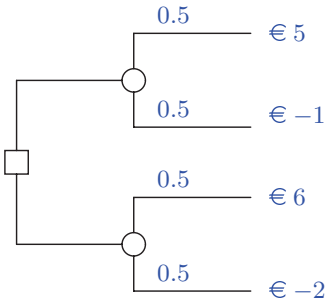
- can change overtime
- are required for unknown / unexperienced outcomes
- are influences by framing and certainty effects
- are influenced by third parties
- are not comparable from person to person
- ...

Risk attitudes

(college 5 + 6)

An Example

Suppose you are given the choice between the following two "games":

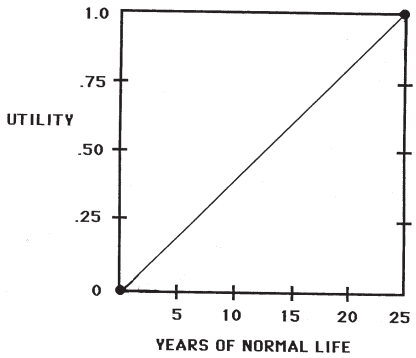


Do you have a clear preference for playing one or the other?

Risk-neutral preferences

Let X be an attribute with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 2$, measured in some unit. Let $L = [p, x_i; (1-p), x_j]$ be a lottery over values of X.

A decision maker is risk-neutral if each additional unit of X is valued with the same increase in utility:



A decision maker is risk-neutral, if

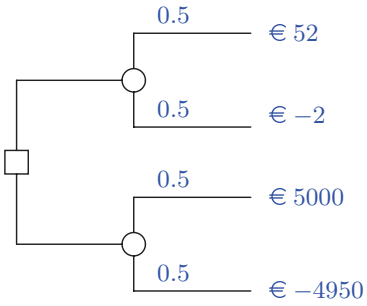
$$u(p \cdot x_i + (1-p) \cdot x_j) = p \cdot u(x_i) + (1-p) \cdot u(x_j)$$

that is, the utility function is linear.

Note that $u''(X) = 0$.

An Example

Suppose you are given the choice between the following two “games”:

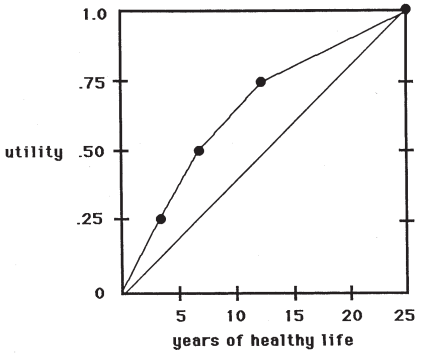


Which game would you prefer to play?

Risk-averse preferences

Let X be an attribute with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 2$, measured in some unit. Let $L = [p, x_i; (1-p), x_j]$ be a lottery over values of X.

A decision maker is risk-averse if each additional unit of X is valued with a smaller increase in utility:



A decision maker is risk-averse, if

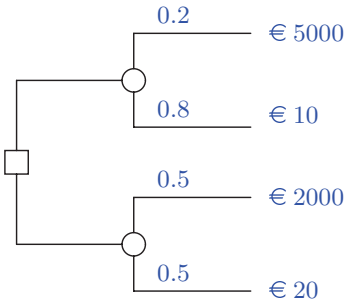
$$u(p \cdot x_i + (1-p) \cdot x_j) > p \cdot u(x_i) + (1-p) \cdot u(x_j)$$

that is, the utility function is concave.

Note that $u''(X) < 0$.

An Example

Suppose you are given the choice between the following two “games”:

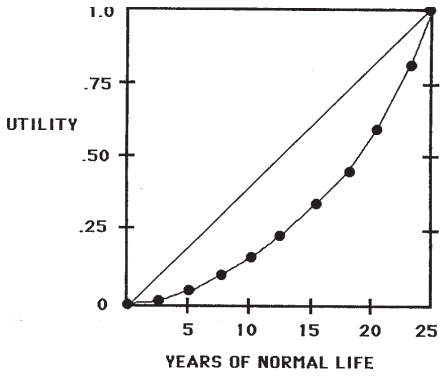


Which game would you prefer to play?

Risk-prone preferences

Let X be an attribute with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 2$, measured in some unit. Let $L = [p, x_i; (1-p), x_j]$ be a lottery over values of X.

A decision maker is risk-prone, or risk-seeking, if each additional unit of X is valued with a larger increase in utility:



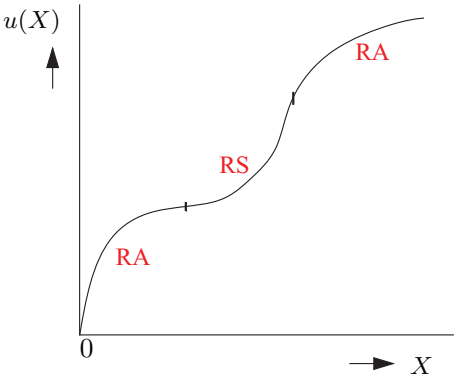
A decision maker is risk-prone, if

$$u(p \cdot x_i + (1-p) \cdot x_j) < p \cdot u(x_i) + (1-p) \cdot u(x_j)$$

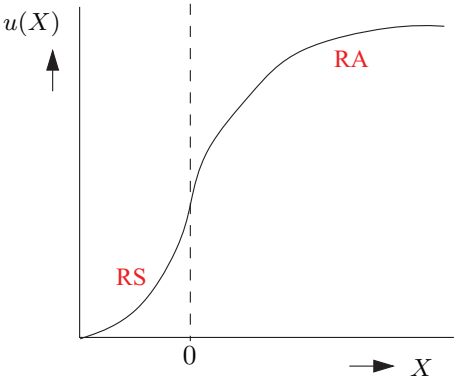
that is, the utility function is convex.

Note that $u''(X) > 0$.

Risk attitudes



The zero-illusion curve:



Discounting

- the process of translating future rewards to their present value;
- necessary to perform "cost-benefit" analyses now.

Examples

- the time value of money

  value of an euro depends on when it is available

  euros can be invested to yield more euros

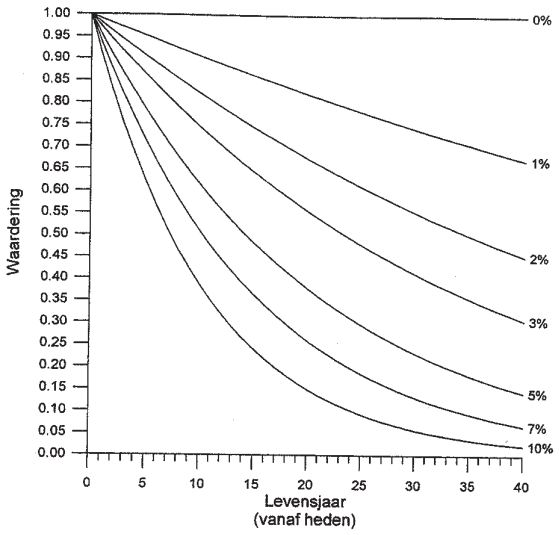
- the time value of life

  life years in the future less valuable than today (?)

  life years are valued relative to money

A discountingfactor

A discountingfactor indicates how much less a patient values each successive year of life, compared to the previous year:



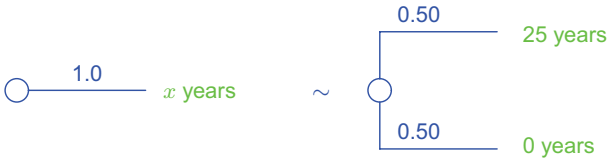
The utility function for length of life with a constant discountingfactor δ is approximated by

$$u(x) = \int_{t=0}^{x} e^{-\delta \cdot t} dt$$

for life-expectancy x.

An example

Consider the following 'standard reference gamble':



For a utility function for length of life with a constant discountingfactor $\delta = 0.02$, we find:

$$u(0 \text{ years}) = \int_{t=0}^{0} e^{-0.02t} dt = 0$$

$$u(25 \text{ years}) = \int_{t=0}^{25} e^{-0.02t} dt = 19.67$$

The patient is indifferent about the choice between the two lotteries for a life-expectancy x for which

$$u(x) = 0.5 \cdot 19.67 + 0.5 \cdot 0 = 9.835$$

We find from

$$\int_{t=0}^{x} e^{-0.02 \cdot t} \, dt = 9.835$$

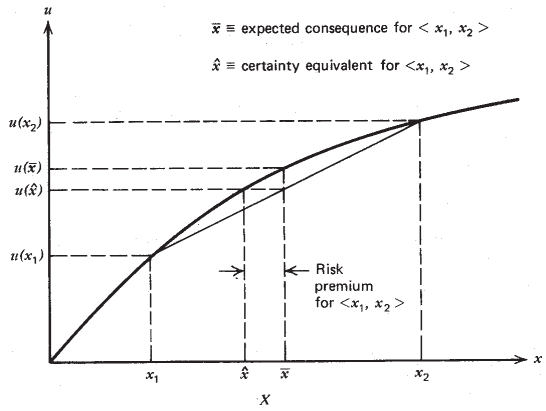
that $x \approx 11$ years.

The risk-premium

Let X be an attribute with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 2$, measured in some unit. Let $u(X)$ be the utility function on the values of X.

Consider a lottery $L = [p, x_i; (1-p), x_j]$ over values of X. Let x_C be the certainty equivalent of lottery L and x_E the expected value of L. The risk premium RP of L is defined as

$$\text{RP} = \begin{cases} x_E - x_C & \text{if } u(X) \text{ is increasing} \\ x_C - x_E & \text{if } u(X) \text{ is decreasing} \end{cases}$$



An example

Let $u(x) = -e^{-0.2x}$ for all $x \in [0 \ldots 50]$ Consider the lottery $L = [0.5, 0; 0.5, 10]$. Compute the risk premium for this lottery.

The expected value x_E of the lottery is

$$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 10 = 5$$

The certainty equivalent x_C of the lottery is determined from

$$u(x_C) = 0.5 \cdot u(0) + 0.5 \cdot u(10) = -0.5 - 0.5 \cdot e^{-2} \approx 0.57$$

and equals 2.83

As $u(x)$ is an increasing function, the risk premium for L is

$$\text{RP} = 5 - 2.83 = 2.17$$

Exercise

Let $u(x) = -\log(x + 30)$ for all $x > -30$. Consider the lottery $L = [0.5, -20; 0.5, -10]$. What is the lottery's risk premium? Is the decision maker risk averse or risk prone?

Risk averseness & risk premium

A decision maker is

- risk averse iff his/her risk premium is positive for all nondegenerate lotteries;
- decreasingly risk averse iff
  1. he/she is risk averse;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ decreases as x increases;
- increasingly risk averse iff
  1. he/she is risk averse;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ increases as x increases;
- constantly risk averse iff
  1. he/she is risk averse;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ is constant.

Risk proneness & risk premium

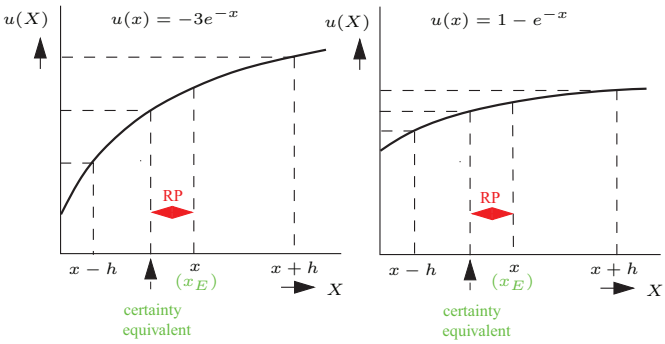
A decision maker is

- risk prone iff his/her risk premium is negative for all nondegenerate lotteries;
- decreasingly risk prone iff
  1. he/she is risk prone;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ increases as x increases;
- increasingly risk prone iff
  1. he/she is risk prone;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ decreases as x increases;
- constantly risk prone iff
  1. he/she is risk prone;
  2. his/her risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ is constant.

The degree of risk aversion / proneness

The size of the risk premium for a lottery indicates the degree to which a decision maker behaves risk averse or risk prone in that lottery.

Whereas the second derivative of a utility function $u(X)$ tells us whether a decision maker is (locally) risk averse or risk prone, it's magnitude doesn't indicate the degree to which he/she is:



Strategically equivalent utility functions capture the same risk attitude.

The risk-aversion function

Let $u(X)$ be a utility function. The risk-aversion function R(X) is defined by

$$R(X) = -\frac{u''(X)}{u'(X)} \quad \text{if } u(X) \text{ is increasing}$$

$$R(X) = \frac{u''(X)}{u'(X)} \quad \text{if } u(X) \text{ is decreasing}$$

- if $R(X) > 0$ then the decision maker is risk averse;
- if $R(X) < 0$ then the decision maker is risk prone;
- if $R(X) = 0$ then the decision maker is risk neutral;
- $R(X)$ is increasing (decreasing, constant) iff the decision maker's risk premium for any lottery $[0.5, x-h; 0.5, x+h]$ is increasing (decreasing, constant) for increasing x.

An example

Let $u(x) = 1 - e^{-x/900}$, $x > 0$, be a utility function. Find the risk-aversion function for X.

As $u(x)$ is an increasing function in x, the risk-aversion function is defined as

$$R(X) = -\frac{u''(X)}{u'(X)}$$

We find that

$$u'(x) = \frac{1}{900} \cdot e^{-x/900}, x > 0$$

and

$$u''(x) = \frac{-1}{900^2} \cdot e^{-x/900}, x > 0$$

We conclude that

$$R(X) = \frac{1}{900}$$

and that $u(X)$ models constant risk aversion.

Exercises

Show that

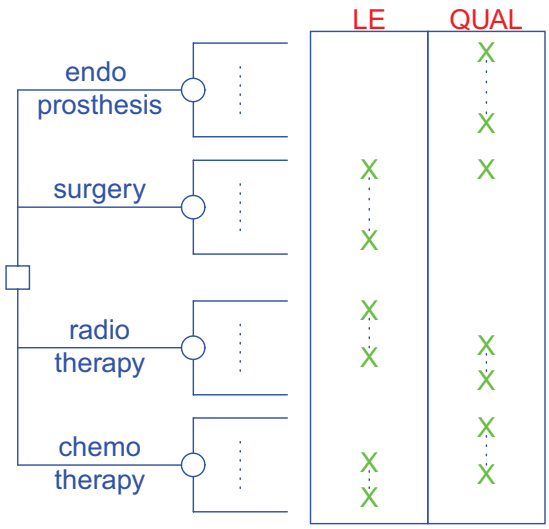
- $u(x) = x$, $x > 0$, describes risk neutrality
- $u(x) = -e^{-0.2x}$, $x > 0$, describes constant risk aversion
- $u(x) = 1 + 2 \cdot x - x^2$, $x < 1$, describes increasing risk aversion
- $u(x) = \log(x + 30)$, $x > -30$, describes decreasing risk aversion
- $u(x) = e^{0.4x}$, $x > 0$, describes constant risk proneness
- $u(x) = x^2$, $x > 0$, describes decreasing risk proneness
- $u(x) = e^{x^2}$, $x > 1$, describes increasing risk proneness

Multi-attribute utility theory

(college 6 t/m 9)

Multiple objectives – an example

Consider the problem of deciding upon treatment for a patient with esophageal cancer. The problem can be (schematically) modelled as follows:



When a decision problem concerns multiple objectives, consequences are no longer 'simple', as is apparent from the above consequence matrix.

Multiple objectives – another example

The City of Utrecht is considering four different sites (A,B,C and D) for a new electric power generating station.

The objectives of the city are to

- minimise the cost of building the station;
- minimise the acres of land damaged by building it.

Both objectives are influenced by a number of uncertain factors pertaining to the land type at the different sites, the architect and construction company hired, the cost of material and machines used, the weather, etc. It is certain, however, that the costs will be between € 15 million and € 60 million; between 200 and 600 acres of land will be damaged.

The possible consequences of the decision alternatives are expressed by two attributes. We therefore need to determine a two-attribute utility function: $u(Cost, Acres)$ (or $u(C, A)$).

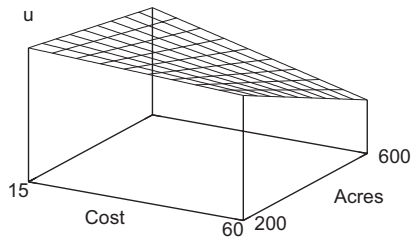
The multiattribute utility function – assessment

Let $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, be a set of attributes associated with the consequences of a decision. The utility of a consequence $(x_1, \ldots, x_n)$ can be determined from

- direct assessment: estimate the combined utility $u(x_1, \ldots, x_n)$ over the given values of all n attributes;
- decomposed assessment:
  1. estimate an individual utility $u_i(x_i)$ for the given value of each of the n attributes;
  2. compute $u(x_1, \ldots, x_n)$ by combining the $u_i(x_i)$ of all attributes:

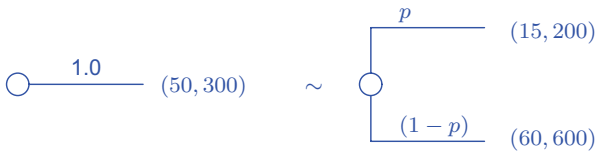
$$u(x_1, \ldots, x_n) = f[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)]$$

Direct assessment – an example



The worst outcome (60,600) gets a utility of 0; the best outcome (15,200) gets a utility of 1.

The utility of outcome (50,300) is determined from:



To find a good representation through direct assessment, utilities must be assessed for a substantial number of points.

Different functional forms

Let X and Y be two attributes. Consider the utility function $u(X, Y)$ for X and Y.

- u is an additive utility function if for constants a and b

$$u(X, Y) = a \cdot u_X(X) + b \cdot u_Y(Y)$$

- u is a multiplicative utility function if for constants a, b, c, and d

$$u(X, Y) = (a + b \cdot u_X(X)) \cdot (c + d \cdot u_Y(Y))$$

- u is a multilinear utility function if for constants a, b, and c

$$u(X, Y) = a \cdot u_X(X) + b \cdot u_Y(Y) + c \cdot u_X(X) \cdot u_Y(Y)$$

The constants are often called weights or scaling constants; their values are often constrained.

An example

The City of Utrecht decides to model the utility function $u(Cost, Acres)$ as an additive utility function.

Using standard assessment techniques, they find for the individual utility functions u_C and u_A that

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 1.0 & u_A(200) = 1.0 \\ u_C(30) = 0.5 & u_A(300) = 0.8 \\ u_C(50) = 0.2 & u_A(400) = 0.5 \\ u_C(60) = 0.0 & u_A(600) = 0.0 \end{array}$$

The City decides to weight Cost three times as heavy as Acres lost. The resulting utilities for a number of Cost-Acres pairs are then:

$$\begin{array}{rcl} u(50, 300) & = & 3 \cdot u_C(50) + 1 \cdot u_A(300) \\ & = & 3 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.8 = 1.4 \\ u(30, 400) & = & 1.5 + 0.5 = 2.0 \\ u(60, 200) & = & 0.0 + 1.0 = 1.0 \\ u(15, 600) & = & 3.0 + 0.0 = 3.0 \\ u(15, 200) & = & 3.0 + 1.0 = 4.0 \end{array}$$

Assessing weights (I)

Pricing out

Assess the marginal rate of substitution, that is, determine the value of one objective in terms of another.

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 2$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 2$, and let $u(X, Y) = a \cdot u_X(X) + b \cdot u_Y(Y)$. Let e_X and e_Y be the units of measurement for the two attributes, respectively.

Suppose you are willing to sacrifice s units of Y for 1 unit of X. Then for all values x_i and y_j

$$u(x_i, y_j) = u(x_i + e_X, y_j - s \cdot e_Y),$$

that is,

$$\begin{array}{rl} & a \cdot u_X(x_i) + b \cdot u_Y(y_j) \\ = & a \cdot u_X(x_i + e_X) + b \cdot u_Y(y_j - s \cdot e_Y) \end{array}$$

This implies that

$$\frac{a}{b} = \frac{u_Y(y_j - s \cdot e_Y) - u_Y(y_j)}{u_X(x_i) - u_X(x_i + e_X)}$$

Pricing out – an example

Suppose the following utilities are assessed by the City of Utrecht for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 1.0 & u_A(200) = 1.0 \\ u_C(30) = 0.7 & u_A(300) = 0.8 \\ u_C(40) = 0.4 & u_A(400) = 0.5 \\ u_C(60) = 0.0 & u_A(600) = 0.0 \end{array}$$

The City decides that it is willing to sacrifice 200 acres of land if that would save € 10 million. This implies that, for example,

$$u(40, 200) = u(30, 400)$$

that is,

$$a{\cdot}u_C(40) + b{\cdot}u_A(200) = a{\cdot}u_C(30) + b{\cdot}u_A(400)$$

We conclude that

$$\frac{a}{b} = \frac{u_A(400) - u_A(200)}{u_C(40) - u_C(30)} = \frac{0.5 - 1.0}{0.4 - 0.7} = \frac{-0.5}{-0.3}$$

And thus find that

$$u(Cost, Acres) = 1.7{\cdot}u_C(Cost) + 1.0{\cdot}u_A(Acres)$$

Is this valid?

Assessing weights (II)

Swing weighting

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$ and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Choose consequence (x_1, y_1) as your benchmark.

Take `maxrank` to be the number of attributes $+1$ and assign this rank to the benchmark. Given the benchmark, if you could swing one attribute from worst to best, which would you swing? Assign that attribute a rank of 1, the next-best a rank of 2, etc.

For an attribute X we now determine its weight from:

$$w(X) = \frac{\text{reversed } \mathit{rank}(X)}{\text{sum of ranks}} = \frac{\texttt{maxrank} - \mathit{rank}(X) + 1}{\sum_i \mathit{rank}(i)}$$

Attributes can also be assigned a rating such that *rate*(benchmark) = 0, *rate*(attribute with rank = 1) = 100 and *rate*(rest) = 'some intermediate value'.

For an attribute X we then determine its weight from:

$$w(X) = \frac{\mathit{rate}(X)}{\sum_i \mathit{rate}(i)}$$

Weights computed by the first formula are called rank-sum weights; those computed from the second formula are called direct weights.

Swing weighting – an example

Attribute to swing	consequence milj. €	acres	rank	rate
(benchmark)	60	600	3	0
Cost	15	600	1	100
Acres	60	200	2	30
total:			6	130

rank-sum weighting:

$$\begin{array}{rcl} w_C & = & \dfrac{3-1+1}{6} = \dfrac{1}{2} \\ w_A & = & \dfrac{3-2+1}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

direct rating:

$$\begin{array}{rcl} w_C & = & \dfrac{100}{130} = 0.77 \\ w_A & = & \dfrac{30}{130} = 0.23 \end{array}$$

Forms of independence

Use of an additive utility function is only justified under

3. (mutual) preferential independence

$\Uparrow$

2. (mutual) utility independence

$\Uparrow$

1. additive independence

Preferential independence

Let X and Y be two attributes with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 2$. We say that X is preferentially independent of Y if for each pair x_i, x_j such that $(x_i, y_k) \succeq (x_j, y_k)$ for some value y_k, we also have

$$(x_i, y_l) \succeq (x_j, y_l) \quad \forall y_l,\ l = 1, \ldots, m$$

If X is preferentially independent of Y and Y is preferentially independent of X then X and Y are mutually preferential independent.

Example

Let X and Y have values x_0, x_1, x_2 and y_0, y_1, y_2. Assume the two-attribute utility function is defined as:

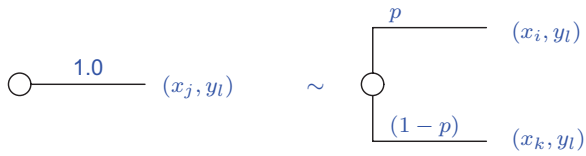
$$\begin{array}{lll} u(x_0, y_0) = 1.0 & u(x_0, y_1) = 1.0 & u(x_0, y_2) = 0.7 \\ u(x_1, y_0) = 0.6 & u(x_1, y_1) = 0.8 & u(x_1, y_2) = 0.5 \\ u(x_2, y_0) = 0.0 & u(x_2, y_1) = 0.5 & u(x_2, y_2) = 0.2 \end{array}$$

Then we have:

- X is preferentially independent of Y:
  $x_0 \succeq x_1 \succeq x_2$ for each value of Y;
- Y is not preferentially independent of X:
  $y_1 \succ y_0 \succ y_2$ for $X = x_1$
  $y_1 \succ y_2 \succ y_0$ for $X = x_2$! ■

Utility independence – definition

Let X and Y be two attributes with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 2$. We say that X is utility independent of Y if for each triple x_i, x_j, x_k, $x_i \preceq x_j \preceq x_k$, there exists a probability p such that for each value y_l of Y, we have that



If X is utility independent of Y and Y is utility independent of X then X and Y are mutually utility independent.

An example

Consider attributes X and Y with values x_0, x_1, x_2 and y_0, y_1, y_2. The two-attribute utility function is defined as:

$$\begin{array}{lll} u(x_0, y_0) = 1.0 & u(x_0, y_1) = 1.0 & u(x_0, y_2) = 0.7 \\ u(x_1, y_0) = 0.6 & u(x_1, y_1) = 0.8 & u(x_1, y_2) = 0.5 \\ u(x_2, y_0) = 0.0 & u(x_2, y_1) = 0.5 & u(x_2, y_2) = 0.2 \end{array}$$

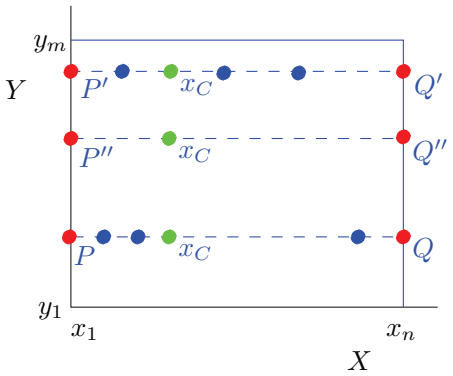
Then we have:

- X is utility independent of Y:
  - $[1.0, (x_1, y_0)] \sim [0.6, (x_0, y_0); 0.4, (x_2, y_0)]$
  - $[1.0, (x_1, y_1)] \sim [0.6, (x_0, y_1); 0.4, (x_2, y_1)]$
  - $[1.0, (x_1, y_2)] \sim [0.6, (x_0, y_2); 0.4, (x_2, y_2)]$
- Y is not utility independent of X, as in the context of x_1 we have $y_1 \succ y_0 \succ y_2$, and in the context of x_2 we have $y_1 \succ y_2 \succ y_0$!

Checking for utility independence

Let X and Y be two attributes with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 2$. The following procedure is used to check if X is utility independent of Y:

1. Choose a lottery $[0.5, P; 0.5, Q]$ where $P = (x_1, y)$ and $Q = (x_n, y)$ for some value y of Y;
2. for a number of consequences (x_i, y), ask the decision maker whether or not he or she prefers the lottery $[0.5, P; 0.5, Q]$ to the consequence;



3. repeat step 2. until you converge to the certainty equivalent (x_C, y) of the lottery;
4. repeat steps 1 – 3 for different levels of Y;

X is utility independent of Y if x_C is equivalent for all values of Y.

Utility independence – an equivalence

Consider two attributes X and Y with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

X is utility independent of Y, iff for each value y_l of Y, there exist real functions $g > 0$ and h, such that for all x_i and y_j we have that

$$u(x_i, y_j) = g(y_j) \cdot u(x_i, y_l) + h(y_j)$$

The functional form of g and h will depend on y_l!

Definition:

For a fixed value y_l of Y, the function $u(X, y_l)$ is called the conditional utility function for X given y_l.

Proof:

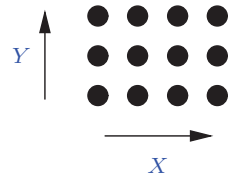
($\Rightarrow$) Utility independence implies existence of a p such that $u(X,Y) = p \cdot u(x_1, Y) + (1-p) \cdot u(x_n, Y)$. Solve this equation for a value y_l of Y to get p. Substitute p with this result to get the desired result.

($\Leftarrow$) Solve $u(X,Y)$ for y_l to get $u(X, y_l) = \frac{h(y_l)}{1-g(y_l)}$. This implies for all x_i, x_j and x_k that $(x_i, y_l) \sim (x_j, y_l) \sim (x_k, y_l)$ and so $(x_i, y_l) \preceq (x_j, y_l) \preceq (x_k, y_l)$. Continuity now gives the desired result. ■

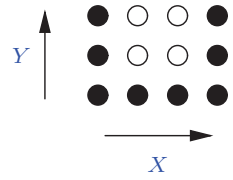
Utility independence – some intuition

Consider two attributes X and Y. The minimum information that needs to be assessed to specify $u(X,Y)$

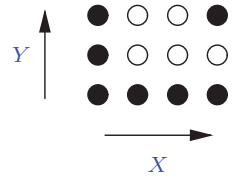
- if X and Y are mutually utility dependent:



- if X is utility independent of Y, but Y is utility dependent of X:



- if X and Y are mutually utility independent:

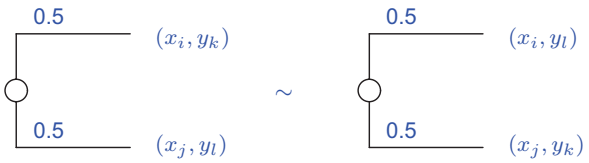


- X and Y are additive independent: ...

Additive independence – definition

Consider two attributes X and Y with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 1$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 1$.

X and Y are additive independent if for all pairs x_i, y_k and arbitrary x_j, y_l, we have that



Note that additive independence is a symmetric property.

Additive independence – an example

Additive independence can be checked by trying out "enough" pairs.

Let $u(X,Y)$ be a two-attribute utility function defined as follows:

$$\begin{array}{lll} u(x_0,y_0) = 1.0 & u(x_0,y_1) = 0.7 & u(x_0,y_2) = 0.5 \\ u(x_1,y_0) = 0.9 & u(x_1,y_1) = 0.6 & u(x_1,y_2) = 0.4 \\ u(x_2,y_0) = 0.5 & u(x_2,y_1) = 0.2 & u(x_2,y_2) = 0.0 \end{array}$$

X and Y are additive independent:

$$[0.5, (x_1, y_1); 0.5, (x_0, y_0)] \sim [0.5, (x_1, y_0); 0.5, (x_0, y_1)]$$

$$[0.5, (x_2, y_1); 0.5, (x_0, y_0)] \sim [0.5, (x_2, y_0); 0.5, (x_0, y_1)]$$

$$[0.5, (x_1, y_2); 0.5, (x_0, y_0)] \sim [0.5, (x_1, y_0); 0.5, (x_0, y_2)]$$

$$[0.5, (x_2, y_2); 0.5, (x_0, y_0)] \sim [0.5, (x_2, y_0); 0.5, (x_0, y_2)]$$

Exploiting additive independence – an example

To establish $u(C, A)$, the City of Utrecht assesses utilities for Cost and Acres lost.

Assessment of $u(C, 600)$ for fixed acres:

$$u(15,600) = 0.75 \qquad u(50,600) = 0.15$$
$$u(30,600) = 0.35 \qquad u(60,600) = 0.00$$

Assessment of $u(60, A)$ for fixed cost:

$$u(60,200) = 0.25 \qquad u(60,400) = 0.15$$
$$u(60,300) = 0.20 \qquad u(60,600) = 0.00$$

Due to the assumption of additive independence we have that, for example,

$$0.5 \cdot u(15,200) + 0.5 \cdot u(60,600) \quad = \\ 0.5 \cdot u(15,600) + 0.5 \cdot u(60,200)$$

So,

$$\begin{aligned} u(15,200) &= u(15,600) + u(60,200) - u(60,600) \\ &= 1.0 \end{aligned}$$

More generally, we have that

$$u(C, A) = u(C, 600) + u(60, A) - u(60, 600)$$

The additive utility function – form 1

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Attributes X and Y are additive independent iff the two-attribute utility function is additive:

$$u(X, Y) = u(X, y_1) + u(x_1, Y),$$

where $u(x_1, y_1) = 0$.

Proof: (sketch)

($\Rightarrow$) Let x_i and y_k be arbitrary values of X and Y, respectively. Additive independence implies $0.5 \cdot u(x_1, y_1) + 0.5 \cdot u(x_i, y_k) = 0.5 \cdot u(x_1, y_k) + 0.5 \cdot u(x_i, y_1)$. Setting $u(x_1, y_1) = 0$, we get $u(x_i, y_k) = u(x_1, y_k) + u(x_i, y_1)$.

($\Leftarrow$) Suppose $u(X, Y) = u(X, y_1) + u(x_1, Y)$. We can now show that for arbitrary values x_i and y_k of X resp. Y, we have $0.5 \cdot u(x_1, y_1) + 0.5 \cdot u(x_i, y_k) = 0.5 \cdot u(x_1, y_k) + 0.5 u(x_i, y_1)$. We conclude that X and Y are additive independent.

The additive utility function – form 2

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Attributes X and Y are additive independent iff the two-attribute utility function is additive:

$$u(X, Y) = k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y),$$

where

- $u(X, Y)$ is normalised with $u(x_1, y_1) = 0$ and $u(x_n, y_m) = 1$;
- $u_X(X)$ is a conditional utility function on X, normalised by $u_X(x_1) = 0$ and $u_X(x_n) = 1$;
- $u_Y(Y)$ is a conditional utility function on Y, normalised by $u_Y(y_1) = 0$ and $u_Y(y_m) = 1$;
- $k_X = u(x_n, y_1)$ and $k_Y = u(x_1, y_m)$ are positive scaling constants, summing to 1.

Proof: (sketch)

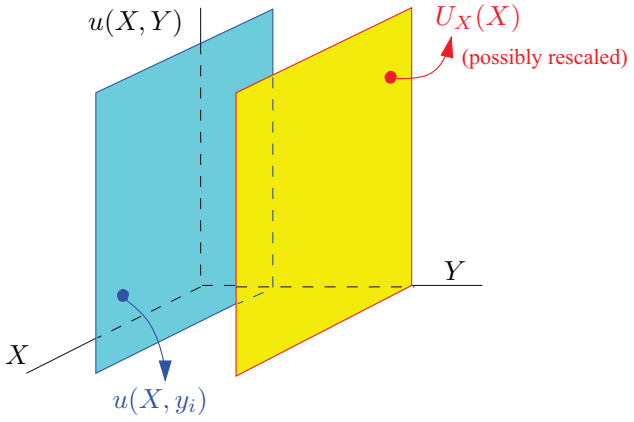
($\Rightarrow$) Recall that for arbitrary values x_i and y_k of X resp. Y, we have $u(x_i, y_k) = u(x_1, y_k) + u(x_i, y_1)$ if $u(x_1, y_1) = 0$. Normalising $u(x_1, Y)$ gives us $u(x_1, Y) = k_Y \cdot u_Y(Y)$ with $k_Y = u(x_1, y_m)$; similarly, $u(X, y_1) = k_X \cdot u_X(X)$ with $k_X = u(x_n, y_1)$.

($\Leftarrow$) See previous proof. ∎

Some remarks (I)

Let X be an attribute and Y a set of $n-1$, $n > 0$, attributes. Compare the following:

- $u(X, Y)$ is an n-attribute utility function;
- If $n > 1$ then
  - $u(X, y_i)$ is a conditional utility function for X given a fixed value-assignment y_i to attributes Y;
  - $u_X(X)$ is a conditional utility function for an attribute X that is utility independent of Y;



- if $n = 1$ then $u(X)$ is a utility function for X in a one-attribute decision problem.

Some remarks (II)

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

Often, utility functions are normalised such that, for example,

$$u(x_1, y_1) = 0$$

$$u(x_n, y_m) = 1$$

These values only set the origin of $u(X, Y)$ and the unit of measure. If we decide to consider, for example, $x_i \prec x_1$ or $x_j \succ x_n$, then

$u(x_i, Y) < 0$, and

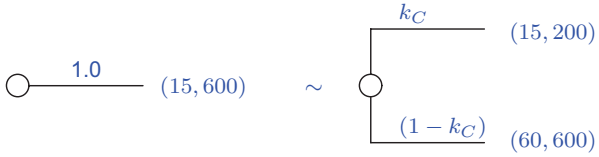
$u(x_j, Y) > 1$, respectively.

Assessing the additive utility function – an example

Suppose the City of Utrecht assesses the following individual (normalised) utilities for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 1.0 & u_A(200) = 1.0 \\ u_C(30) = 0.5 & u_A(300) = 0.8 \\ u_C(50) = 0.2 & u_A(400) = 0.5 \\ u_C(60) = 0.0 & u_A(600) = 0.0 \end{array}$$

For scaling constants k_A and k_C we know that $k_A = 1 - k_C$ and that $k_C = u(15, 600)$. This latter utility is assessed using the following lottery:



The indifference probability k_C is found to be 0.75. We therefore conclude that

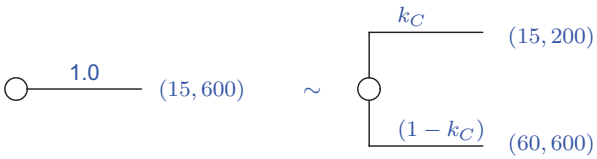
$$u(C, A) = 0.75 \cdot u_C(C) + 0.25 \cdot u_A(A)$$

Validating the additive independence assumption

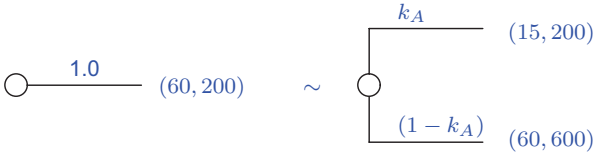
Suppose the City of Utrecht assesses the following individual (normalised) utilities for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 1.0 & u_A(200) = 1.0 \\ u_C(30) = 0.5 & u_A(300) = 0.8 \\ u_C(50) = 0.2 & u_A(400) = 0.5 \\ u_C(60) = 0.0 & u_A(600) = 0.0 \end{array}$$

Suppose k_C is assessed using the following lottery:



resulting in $k_C = 0.6$. As a consistency check, k_A is assessed as well:



resulting in $k_A = 0.2$.

We now have that $k_C + k_A = 0.8 \neq 1.0$!

Additive independence vs utility independence

Consider two attributes X and Y with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 1$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 1$.

Some properties:

- if X and Y are additive independent then X and Y are mutually utility independent;
- if X and Y are mutually utility independent then X and Y are not necessarily additive independent.

Proof: (sketch)

Additive independence implies that (form 2) $u(X, Y) = k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y)$. Consider an arbitrary triple $x_i \preceq x_j \preceq x_k$, then continuity implies $\exists p$ such that $x_j \sim [p, x_i; (1-p), x_k]$. For an arbitrary value y_l of Y we can now show that $(x_j, y_l) \sim [p, (x_i, y_l); (1-p), (x_k, y_l)]$, so X is utility independent of Y. Analogue: Y is utility independent of X. ■

Counterexample

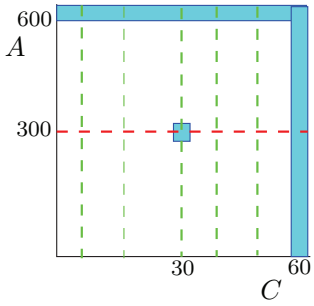
$\forall x, y \quad u(x, y) = x \cdot y$ ■

Exploiting mutual utility independence – example

Suppose the utilities, given fixed A and fixed C, respectively, assessed by the City of Utrecht are:

$$\begin{array}{ll} u(15,600)=0.75 & u(60,200)=0.25 \\ u(30,600)=0.35 & u(60,300)=0.20 \\ u(50,600)=0.15 & u(60,400)=0.15 \\ u(60,600)=0.00 & u(60,600)=0.00 \end{array}$$

In addition, the utility $u(30,300)=0.30$ is assessed.



Mutual utility independence implies strategical equivalence of all 'horizontal' functions with $u(C,600)$ and all 'vertical' functions with $u(60,A)$:

- we first determine the function $u(C,300)$;
- we then use $u(C,300)$ to derive all 'vertical' functions from $u(60,A)$.

Example – continued (I)

The utilities assessed by the City of Utrecht:

$$\begin{array}{ll} u(15,600)=0.75 & u(60,200)=0.25 \\ u(30,600)=0.35 & u(60,300)=0.20 \\ u(50,600)=0.15 & u(60,400)=0.15 \\ u(60,600)=0.00 & u(60,600)=0.00 \end{array}$$

In addition, the utility $u(30,300)=0.30$ is assessed.

- we first determine the function $u(C,300)$:

  C is utility independent of A so there exist functions g and h such that:

  $$u(C,300)=g(300)\cdot u(C,600)+h(300)$$

  We require two equations to find $g(300)$ and $h(300)$:

  $$\begin{aligned} u(30,300)=0.30 &= g(300)\cdot u(30,600)+h(300) \\ &= g(300)\cdot 0.35+h(300) \\ u(60,300)=0.20 &= g(300)\cdot 0.00+h(300) \end{aligned}$$

  resulting in $u(C,300)=0.29\cdot u(C,600)+0.20$

Example – continued (II)

The utilities assessed by the City of Utrecht:

$$\begin{array}{ll} u(15,600)=0.75 & u(60,200)=0.25 \\ u(30,600)=0.35 & u(60,300)=0.20 \\ u(50,600)=0.15 & u(60,400)=0.15 \\ u(60,600)=0.00 & u(60,600)=0.00 \end{array}$$

In addition, the utility $u(30,300)=0.30$ is assessed.

- we then use $u(C,300)$ to derive all 'vertical' functions from $u(60,A)$:

  A is utility independent of C so there exist functions f and k such that:

  $$u(C,A)=f(C)\cdot u(60,A)+k(C)$$

  We require two equations to find $f(C)$ and $k(C)$:

  $$\begin{aligned} u(C,300)&=f(C)\cdot u(60,300)+k(C) \\ u(C,600)&=f(C)\cdot u(60,600)+k(C) \end{aligned}$$

  Given that $u(C,300)$ and $u(C,600)$ are known functions, we can compute an $f(c_i)$ and $k(c_i)$ for each c_i.

The multilinear utility function – form 1

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. If attributes X and Y are mutually utility independent then the two-attribute utility function is multilinear:

$$u(X,Y)=u(X,y_1)+u(x_1,Y)+k\cdot u(X,y_1)\cdot u(x_1,Y)$$

where

- $u(x_1,y_1)=0$, $u(x_n,y_1)>0$ and $u(x_1,y_m)>0$;
- $k=\dfrac{u(x_n,y_m)-u(x_n,y_1)-u(x_1,y_m)}{u(x_n,y_1)\cdot u(x_1,y_m)}$ is a scaling constant.

Proof: (sketch)

Mutual utility independence implies the existence of functions f,g,h, and k such that

(I) $u(X,Y)=f(Y)\cdot u(X,y_l)+h(Y)\ \forall y_l$ and

(II) $u(X,Y)=g(X)\cdot u(x_l,Y)+k(X)\ \forall x_l$.

Set y_l to y_1. Solve (I) for x_1 to get $h(Y)$ and for x_n to get $f(Y)$; solve (II) for y_1 to get $k(X)$ and for y_m to get $g(X)$. Substitute these results in (I) and (II). Now solve (II) for x_n and fill in this result in (I) to get the desired result. ■

The multilinear utility function – form 2

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. If attributes X and Y are mutually utility independent then the two-attribute utility function is multilinear:

$$u(X,Y) = k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y) + k_{XY} \cdot u_X(X) \cdot u_Y(Y)$$

where

- $u(X,Y)$ is normalised by $u(x_1,y_1) = 0$ and $u(x_n,y_m) = 1$;
- $u_X(X)$ is a conditional utility function on X, normalised by $u_X(x_1) = 0$ and $u_X(x_n) = 1$;
- $u_Y(Y)$ is a conditional utility function on Y, normalised by $u_Y(y_1) = 0$ and $u_Y(y_m) = 1$;
- $k_X = u(x_n,y_1) > 0$, $k_Y = u(x_1,y_m) > 0$, $k_{XY} = 1 - k_X - k_Y$ are scaling constants.

Proof: (sketch)

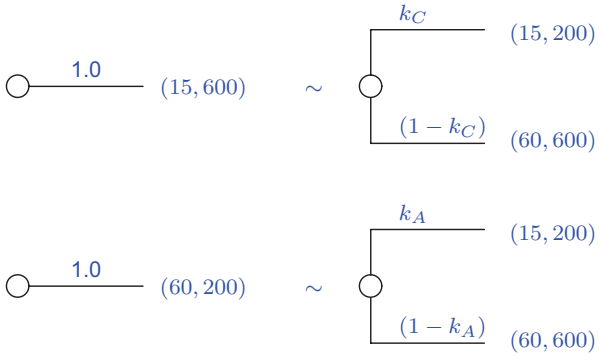
Recall that for arbitrary values x_i and y_j of X resp. Y, we have $u(x_i,y_j) = u(x_i,y_1) + u(x_1,y_j) + k \cdot u(x_i,y_1) \cdot u(x_1,y_j)$. Normalising $u(x_1,Y)$ gives us $u(x_1,Y) = k_Y \cdot u_Y(Y)$ with $k_Y = u(x_1,y_m)$; similarly, $u(X,y_1) = k_X \cdot u_X(X)$ with $k_X = u(x_n,y_1)$. ■

Assessing a multilinear utility function: example

Suppose the City of Utrecht assesses the following individual (normalised) utilities for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 1.0 & u_A(200) = 1.0 \\ u_C(30) = 0.5 & u_A(300) = 0.8 \\ u_C(50) = 0.2 & u_A(400) = 0.5 \\ u_C(60) = 0.0 & u_A(600) = 0.0 \end{array}$$

Scalingconstants $k_C = u(15,600)$, $k_A = u(60,200)$ are assessed with, for example, the following lotteries:



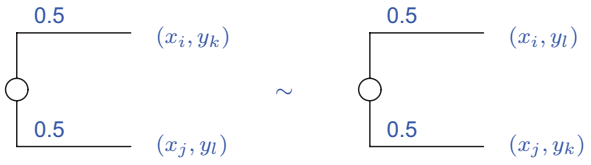
The indifference probabilities are found to be $k_C = 0.6$ and $k_A = 0.2$. We conclude that

$$u(C,A) = 0.6 \cdot u_C(C) + 0.2 \cdot u_A(A) + 0.2 \cdot u_C(C) \cdot u_A(A)$$

The scaling constants – what they are and what they're not

Let X and Y be attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Let the utility function $u(X,Y)$ be multilinear.

- k_{XY}: consider two lotteries over values $x_i \preceq x_j$ and $y_k \preceq y_l$:



Let A be the left lottery and B be the right one, then

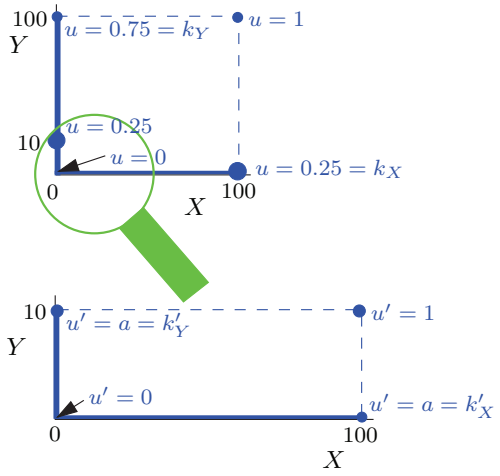
$$\begin{array}{lcll} A \succ B & \iff & k_{XY} > 0 & (X, Y \text{ complements}) \\ A \sim B & \iff & k_{XY} = 0 & \\ A \prec B & \iff & k_{XY} < 0 & (X, Y \text{ substitutes}) \end{array}$$

- k_X, k_Y: if you would rather 'swing' x_1 to x_n than y_1 to y_m, then $k_X > k_Y$, and vice-versa;

Even a mighty important attribute will have a small scaling constant if its range is relatively small!

Interpreting scaling constants – an example

Let X and Y be two attributes such that Y ranges from 0 to 100 and $u(X,Y) = 0.25 \cdot u_X(X) + 0.75 \cdot u_Y(Y)$. Suppose $u(0,10) = u(100,0)$.



If however, we decide it is sufficient for Y to range from 0 to 10 then $k'_X = U'(100,0) = U'(0,10) = k'_Y$.

Did Y just turn from three times as important as X to equally important?

Summary

Let X and Y be two attributes, then

$u(X,Y)$ is an additive utility function

$\Longleftrightarrow$ (see nr. 159/160)

X and Y are additive independent

$\Longrightarrow$ (see nr. 163)

X and Y are mutually utility independent

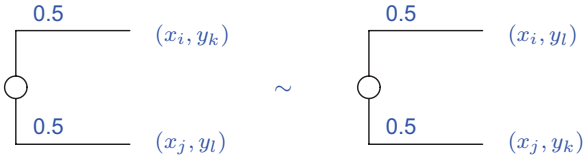
$\Longrightarrow$ (see nr. 167/168)

$u(X,Y)$ is a multilinear utility function

In some situations, mutual utility independence $\Longrightarrow$ additive utility independence (see nr. 173).

Additive vs utility independence (II)

Let X and Y be two attributes with values $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 1$, and $y_1, \ldots, y_m$, $m \geq 1$. If X and Y are mutually utility independent and



for some values x_i, x_j, y_k, y_l for which

$$[1.0, (x_i, y_k)] \not\sim \begin{cases} [1.0, (x_i, y_l)] \\ [1.0, (x_j, y_k)] \end{cases}$$

then X, Y are additive independent.

Proof: (sketch)

Let x_i, x_j, y_k, y_l be values such that $u(x_i, y_k) + u(x_j, y_l) = u(x_i, y_l) + u(x_j, y_k)$. Given mutual utility independence, u is multilinear. Using form 1 we eventually find from the above expression that $k \cdot [(u(x_i, y_1) - u(x_j, y_1)) \cdot (u(x_1, y_k) - u(x_1, y_l))] = 0$. Now if $u(x_i, y_k) \neq u(x_i, y_l)$, then with preferential independence $u(x_1, y_k) \neq u(x_1, y_l)$. Also, if $u(x_i, y_k) \neq u(x_j, y_k)$, then $u(x_i, y_1) \neq u(x_j, y_1)$. Thus, $k = 0$ and the multilinear form reduces to additive. ■

An example

Let X and Y be two attributes with values x_0, x_1, x_2 and y_0, y_1, y_2. Let $u(X,Y)$ be a two-attribute utility function defined as follows:

$$\begin{array}{lll} u(x_0,y_0) = 1.0 & u(x_0,y_1) = 0.9 & u(x_0,y_2) = 0.5 \\ u(x_1,y_0) = 0.8 & u(x_1,y_1) = 0.7 & u(x_1,y_2) = 0.3 \\ u(x_2,y_0) = 0.5 & u(x_2,y_1) = 0.4 & u(x_2,y_2) = 0.0 \end{array}$$

X and Y are mutually utility independent and for x_0, x_2, y_0 and y_2 we have

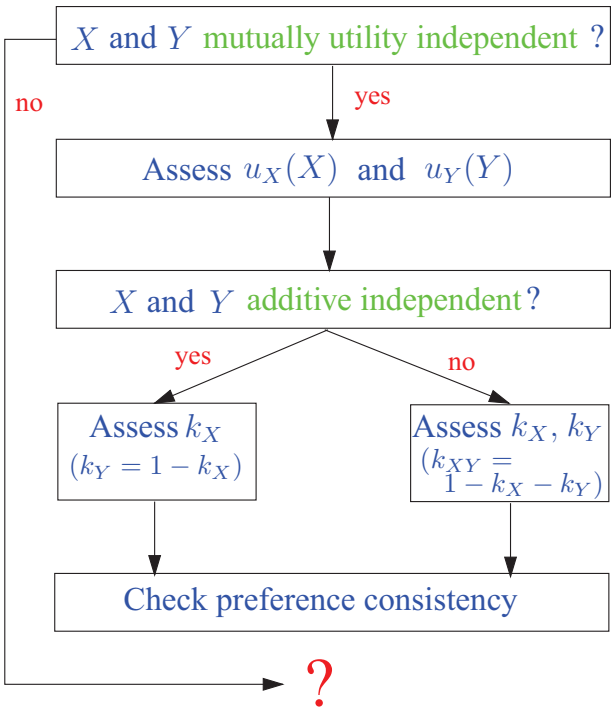
$$u(x_0,y_0) + u(x_2,y_2) = u(x_0,y_2) + u(x_2,y_0)$$

and

$$u(x_0,y_0) \neq \begin{cases} u(x_0,y_2) \\ u(x_2,y_0) \end{cases}$$

$u(X,Y)$ is therefore additive.

Multiattribute utility function assessment procedure



Utility functions with one utility independent attribute

Let X and Y be two attributes. Suppose that X is utility independent of Y, but the reverse does not hold.

The two-attribute utility function can be specified by

- three conditional utility functions; or,
- two conditional utility functions and one isopreference curve; or
- one conditional utility function and two isopreference curves.

Three conditional utility functions

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

If X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = u(x_1,Y)\,[1 - u(X,y_1)] + u(x_n,Y)\cdot u(X,y_1)$$

where $u(X,Y)$ is normalised by $u(x_1,y_1) = 0$ and $u(x_n,y_1) = 1$.

Proof: (sketch)

Utility independence implies the existence of functions f, g such that

$$\text{(I)} \qquad u(X,Y) = f(Y)\cdot u(X,y_l) + h(Y) \;\; \forall y_l$$

Set y_l to y_1. Solve (I) for x_1 to get $h(Y)$, using $u(x_1,y_1) = 0$, and for x_n to get $f(Y)$, using $u(x_n,y_1) = 1$. Substitute these results in (I) to get the desired result. ■

An Example

Suppose the City of Utrecht assesses the following utilities for Cost and Acres lost, given A fixed at 600, and C fixed at 15 and 60, respectively:

$u(15,600) = 0.75$	$u(15,200) = 1.00$	$u(60,200) = 0.20$
$u(30,600) = 0.50$	$u(15,300) = 0.90$	$u(60,300) = 0.15$
$u(50,600) = 0.10$	$u(15,400) = 0.80$	$u(60,400) = 0.10$
$u(60,600) = 0.00$	$u(15,600) = 0.75$	$u(60,600) = 0.00$

Cost is utility independent of Acres lost. We normalise $u(C,A)$ such that $u(60,600) = 0$ and $u(15,600) = 1$:

$u(15,600) = 1.00$	$u(15,200) = 1.33$	$u(60,200) = 0.27$
$u(30,600) = 0.67$	$u(15,300) = 1.20$	$u(60,300) = 0.20$
$u(50,600) = 0.13$	$u(15,400) = 1.07$	$u(60,400) = 0.13$
$u(60,600) = 0.00$	$u(15,600) = 1.00$	$u(60,600) = 0.00$

Now,

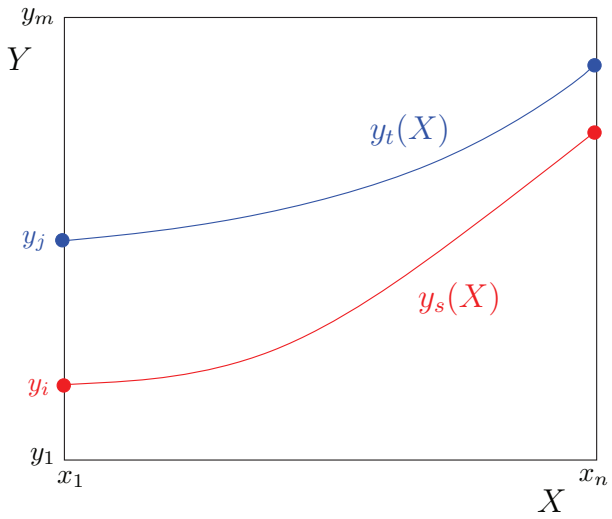
$$u(C,A) = u(60,A)\cdot[1 - u(C,600)] + u(15,A)\cdot u(C,600)$$

We thus find, for example,

$$\begin{aligned} u(30,300) &= u(60,300)\cdot[1 - u(30,600)] \\ &\quad + u(15,300)\cdot u(30,600) \\ &= 0.20\cdot[1 - 0.67] + 1.20\cdot 0.67 \\ &= 0.87 \end{aligned}$$

Isopreference curves

An isopreference curve is a set of consequences that are equally desirable to the decision maker.



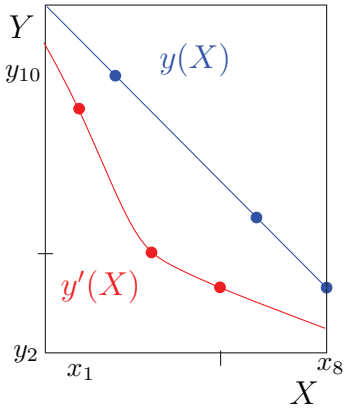
Here we have for all values x of X that

$(x, y_s(x)) \sim (x_1, y_i)$, that is, $u(x, y_s(x)) = u(x_1, y_i)$
$(x, y_t(x)) \sim (x_1, y_j)$, that is, $u(x, y_t(x)) = u(x_1, y_j)$

An example

It's Jenny's birthday. She wants to treat her friends to some cookies and candy. Let x_i denote i cookies and y_j indicate j pieces of candy.

Jenny is indifferent between $(x_2, y_{10}), (x_6, y_6)$, and (x_8, y_4). Also, Jenny is indifferent between (x_1, y_9), (x_3, y_5), and (x_5, y_2).



Assessment of one utility of a single point on the $y(X)$ curve gives the utility of all points $(x, y(x))$.

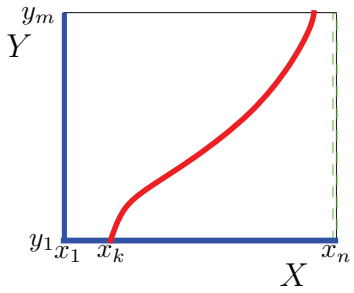
We have for example that $y(x_2) = y_{10}$ and $y'(x_3) = y_5$.

One isopreference curve for one conditional utility function

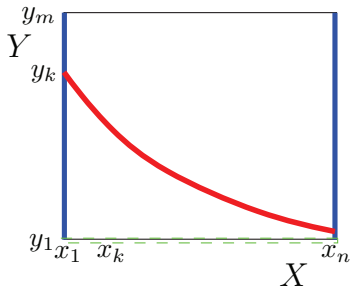
Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Recall that if X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = u(x_1,Y)\,[1 - u(X,y_1)] + u(x_n,Y)\cdot u(X,y_1)$$

Replacing $u(x_n, Y)$ by $u(x_t(Y), Y)$:



Replacing $u(X, y_1)$ by $u(X, y_t(X))$:



Substitution of $u(x_t(Y), Y)$ for $u(x_n, Y)$

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

If X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = u(x_1,Y) + \left[\frac{u(x_k,y_1) - u(x_1,Y)}{u(x_t(Y),y_1)}\right]\cdot u(X,y_1)$$

where

- $u(x_1, y_1) = 0$
- $x_t(Y)$ is defined such that $(x_t(Y), Y) \sim (x_k, y_1)$ for an arbitrary $x_k \neq x_1$.

Proof: (sketch)

Utility independence implies the existence of functions f, g such that

(I) $\quad u(X,Y) = f(Y)\cdot u(X,y_l) + h(Y)\ \forall y_l$

Set y_l to y_1. Solve (I) for x_1 to get $h(Y)$, using $u(x_1, y_1) = 0$. Let x_k be the point where $x_t(Y)$ intersects the line (X, y_1), then $u(x_t(Y), Y) = u(x_k, y_1)$. Use this in solving (I) for $x_t(Y)$ to get $f(Y)$. Substitute these results in (I) to get the desired result. ■

An example

Suppose the City of Utrecht assesses the following utilities for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u(15,600) = 0.75 & u(60,100) = 0.25 \\ u(30,600) = 0.50 & u(60,200) = 0.20 \\ u(45,600) = 0.20 & u(60,300) = 0.15 \\ u(50,600) = 0.10 & u(60,400) = 0.10 \\ u(60,600) = 0.00 & u(60,600) = 0.00 \end{array}$$

In addition, the City indicates the indifferences

$$(50,200) \sim (45,300) \sim (40,400) \sim (35,600)$$

resulting in an isopreference curve $c(A)$ with $u(c(A), A) = 0.40$.

If Cost is utility independent of Acres lost, then

$$u(C,A) = u(60,A) + \left[\frac{u(35,600) - u(60,A)}{u(c(A),600)}\right]\cdot u(C,600)$$

We thus find, for example,

$$u(30,300) = u(60,300) + \left[\frac{u(35,600)-u(60,300)}{u(c(300),600)}\right]\cdot u(30,600)$$

$$\{c(300) = 45\}$$

$$= 0.15 + \left[\frac{0.40 - 0.15}{0.20}\right]\cdot 0.50 = 0.78$$

Substitution of $u(X, y_t(X))$ for $u(X, y_1)$

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

If X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = \frac{u(x_1,Y)\cdot u(x_n,y_t(X)) - u(x_n,Y)\cdot u(x_1,y_t(X))}{u(x_n,y_t(X)) - u(x_1,y_t(X))}$$

where

- $y_t(X)$ is defined such that $(X, y_t(X)) \sim (x_1, y_k)$ for an arbitrary y_k;
- $u(x_1, y_k) = 0$, $(x_1 \neq x_n)$

Proof: (sketch)

Let y_k be the point where $y_t(X)$ intersects the line (x_1, Y), then $u(X, y_t(X)) = u(x_1, y_k)$. Utility independence implies the existence of functions f, g such that

(I) $\quad u(X,Y) = f(Y)\cdot u(X,y_l) + h(Y)\ \forall y_l$

Set y_l to y_k. Solve (I) for x_1 to get $h(Y)$, using $u(x_1, y_k) = 0$, and for x_n to get $f(Y)$. Solve (I) for $y_t(X)$ to get $u(X, y_k)$. Substitute these results in (I) to get the desired result. ■

An example

Suppose the City of Utrecht assesses the following utilities for Cost and Acres lost:

$$\begin{array}{ll} u(15,200) = 1.00 & u(60,200) = 0.20 \\ u(15,300) = 0.90 & u(60,300) = 0.15 \\ u(15,400) = 0.80 & u(60,400) = 0.10 \\ u(15,600) = 0.75 & u(60,600) = 0.00 \\ u(15,900) = 0.50 & u(60,900) = -0.15 \end{array}$$

In addition, the City indicates the indifferences

$$(15, 1500) \sim (30, 900) \sim (50, 700) \sim (60, 600)$$

resulting in an isopreference curve $a(C)$ with $u(C, a(C)) = 0.00$.

If Cost is utility independent of Acres lost, then

$$u(C,A) = \frac{u(60,A)\cdot u(15,a(C)) - u(15,A)\cdot u(60,a(C))}{u(15,a(C)) - u(60,a(C))}$$

We thus find, for example,

$$u(30,300) = \frac{u(60,300)u(15,a(30)) - u(15,300)u(60,a(30))}{u(15,a(30)) - u(60,a(30))}$$

$$\{a(30) = 900\}$$

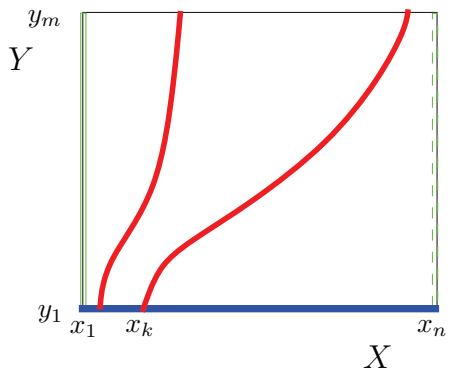
$$= \frac{0.15\cdot 0.50 - 0.90\cdot -0.15}{0.50 - -0.15} = 0.32$$

Use of two isopreference curves

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Recall that if X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = u(x_1,Y)\,[1 - u(X,y_1)] + u(x_n,Y)\cdot u(X,y_1)$$

Replacing $u(x_1, Y)$ by $u(x_s(Y), Y)$, and $u(x_n, Y)$ by $u(x_t(Y), Y)$:



Substitution of $u(x_s(Y), Y)$ and $u(x_t(Y), Y)$ for $u(x_1, Y)$ and $u(x_n, Y)$

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

If X is utility independent of Y then

$$u(X,Y) = \frac{u(X,y_1) - u(x_s(Y),y_1)}{u(x_t(Y),y_1) - u(x_s(Y),y_1)}$$

where

- $x_s(Y)$ is defined such that $(x_s(Y), Y) \sim (x_k, y_1)$ for an arbitrary x_k;
- $x_t(Y)$ is defined such that $(x_t(Y), Y) \sim (x_l, y_1)$ for an arbitrary x_l;
- $u(X, Y)$ is normalised by $u(x_k, y_1) = 0$ and $u(x_l, y_1) = 1$

Proof: (sketch)

Let x_k, x_l be the intersection points for $x_s(Y)$, $x_t(Y)$, resp., with (X, y_1). Utility independence implies $\exists\ f, g$ such that (I) $u(X,Y) = f(Y)u(X,y_l) + h(Y)\ \forall y_l$. Set y_l to y_1. Solve (I) for x_k and $x_s(Y)$ to get $h(Y)$ and $f(Y)$, using $u(x_s(Y), Y) = u(x_k, y_1) = 0$. Solve (I) for $x_t(Y)$ to get $u(x_k, Y)$, using $u(x_t(Y), Y) = u(x_l, y_1) = 1$. Substitute these results in (I). ■

An example

Suppose the City of Utrecht assesses the following utilities for Cost and Acres lost:

$$u(5,600) = 1.00 \quad u(50,600) = 0.10$$
$$u(12,600) = 0.70 \quad u(60,600) = 0.00$$
$$u(15,600) = 0.75 \quad u(75,600) = -0.10$$
$$u(30,600) = 0.50$$

In addition, the City indicates the indifferences

$$(80,200) \sim (75,300) \sim (70,400) \sim (60,600)$$

resulting in an isopreference curve $c_1(A)$ with $u(c_1(A), A) = 0.00$, and the indifferences

$$(15,200) \sim (12,300) \sim (10,400) \sim (5,600)$$

resulting in an isopreference curve $c_2(A)$ with $u(c_2(A), A) = 1.00$.

If Cost is utility independent of Acres lost, then

$$u(C,A) = \frac{u(C,600) - u(c_1(A),600)}{u(c_2(A),600) - u(c_1(A),600)}$$

We thus find, for example,

$$u(30,300) = \{c_1(300) = 75;\ c_2(300) = 12\}$$
$$= \frac{0.50 - -0.10}{0.70 - -0.10} = 0.75$$

Special cases

Let X and Y be two attributes with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$.

If X is utility independent of Y then

1. $u(X,Y)$ is multilinear iff for an $x_k \neq x_1$ and constants a and $b > 0$: $u(x_k, Y) = a + b \cdot u(x_1, Y)$;
2. $u(X,Y)$ is additive iff for an x_i and an y_k:

$$[0.5, (x_i, y_k); 0.5, (x_n, Y)] \sim [0.5, (x_i, Y); 0.5, (x_n, y_k)]$$

Recall the general form: for all x_i, x_j, y_k and y_l:
$[0.5, (x_i, y_k); 0.5, (x_j, y_l)] \sim [0.5, (x_i, y_l); 0.5, (x_j, y_k)]$

Proof: (sketch)

Utility independence implies that

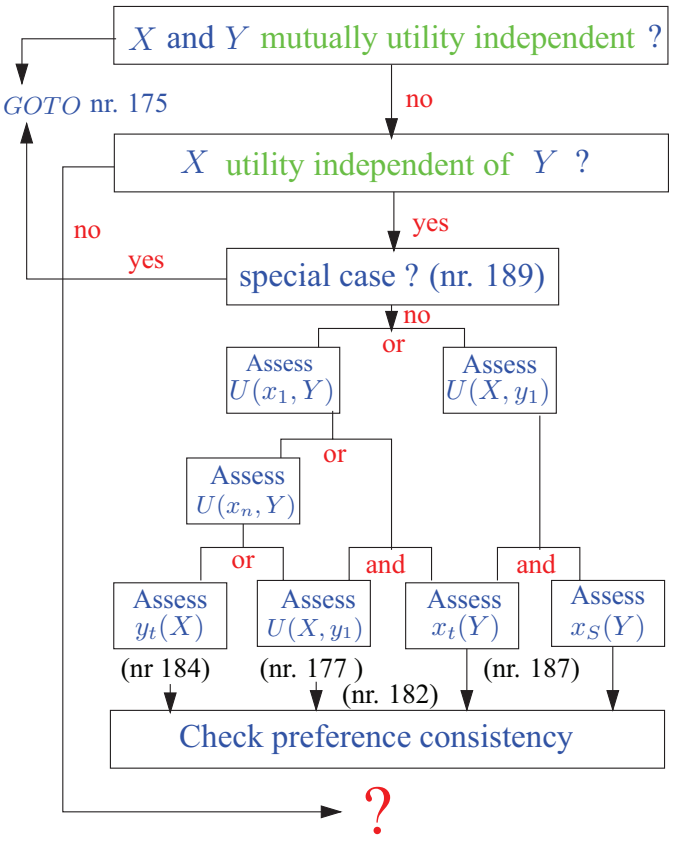
$$u(X,Y) = u(x_1,Y)\,[1 - u(X,y_1)] + u(x_n,Y) \cdot u(X,y_1)$$

with $u(x_1, y_1) = 0$ and $u(x_n, y_1) = 1$.

(1. $\Rightarrow$) multilinear $\Rightarrow u(x_n, Y) = 1 + (1+k) \cdot u(x_1, Y)$;
(1. $\Leftarrow$) $u(x_k, Y) = a + b \cdot u(x_1, Y) \Rightarrow u(X,Y) = u(x_1,Y) + a \cdot u(X, y_1) + (b-1) \cdot u(x_1, Y) \cdot u(X, y_1)$.

(2.) lottery equivalence $\Leftrightarrow 0 + u(x_n, Y) = 1 + u(x_1, Y)$
$\Leftrightarrow$ additive, using (1.). ■

Multiattribute utility function assessment procedure (II)



What if no independence holds?

- Approximate by assuming utility independence;
- transform attributes to new one that might allow exploitation of utility independence;
- direct assessment of $u(X,Y)$ (if necessary using interpolation/extrapolation/curvefitting);
- employing utility independence over subsets of $X \times Y$;
- weaker assumptions on the preference structure:
  - preference reversal; ($u(X,Y) = a + b \cdot u(x_0, Y)$ with $b \leq 0$)
  - generalised utility independence; ($u(X,Y) = u_X(X) + u_Y(Y) + f_X(X) \cdot f_Y(Y)$)
  - parametric dependence; ($u(X,Y) = a + b \cdot u(\theta(X), Y)$ for parameter θ)
  - ...

More than two attributes – an example

A patient with high cholesterol has three options (or combination thereof) to bring it down:

1. Diet 2. Exercise 3. Medication

The patient has the following objectives:
- minimising financial cost;
- minimising time consumed;
- maximising physical comfort.

The patient thinks that going on a diet is
- likely to be a cheap option;
- physically uncomfortable;
- quite likely to minimise the amount of time spent.

The patient's thoughts about physical exercises:
- they can be time consuming;
- they can result in unforeseen expenses for injuries or equipment;
- physical comfort will probably be quite low.

The patient thinks that use of medication
- is quite likely to be costly;
- doesn't require much physical effort or time.

Some notation

Let X be a set of attributes $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n > 1$. Unless indicated otherwise, an attribute X_i in X is assumed to have values in the range $x_i^0 \ldots x_i^+$, where $x_i^0 \preceq x_i^+$.

$Y \subset X$ and $\overline{Y} \subset X$ are called complementary sets of X iff $Y = \{X_1, \ldots, X_k\}$, $k < n$, and $\overline{Y} = X \setminus Y = \{X_{k+1}, \ldots, X_n\}$.

The consequence space $X_1 \times \ldots \times X_n$ for X contains elements of the form $(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$; a specific consequence of X is often denoted x, or equivalently, $(y, \overline{y})$.

A lottery involving consequences from the consequence space for X is denoted by $[x]$, or equivalently $[(y, \overline{y})]$; if all consequences involved concern a fixed value $\overline{y}'$ for the attributes in $\overline{Y}$, then such a lottery is also denoted by $([y], \overline{y}')$.

An example

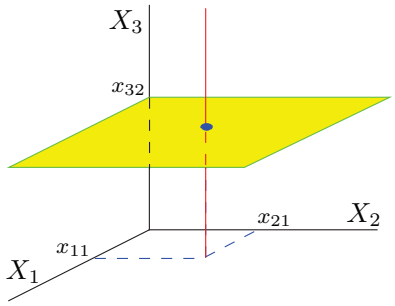
Suppose $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, then $Y = \{X_1, X_2\}$ and $\overline{Y} = \{X_3\}$ are complementary sets of X.

The element of $X_1 \times X_2 \times X_3$ (or $Y \times \overline{Y}$) for which $X_1 = x_{11}$, $X_2 = x_{21}$ and $X_3 = x_{32}$, is denoted by

$$x = (x_{11}, x_{21}, x_{32});$$

the same element can be found by combining

$$y = (x_{11}, x_{21}), \text{ and } \overline{y} = (x_{32})$$



We thus have that $u(x_{11}, x_{21}, x_{32}) = u(x) = u(y, \overline{y})$.

Preferential independence revisited

Let $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ be a set of attributes. Let $Y \subset X$ and $\overline{Y} = X \setminus Y$ be two complementary subsets of X.

Y is preferentially independent of $\overline{Y}$ iff

$$(y, \overline{y}') \succeq (y', \overline{y}') \Rightarrow (y, \overline{y}) \succeq (y', \overline{y})$$

for all consequences $\overline{y}$ and any consequences y, y', and $\overline{y}'$.

Note that this is the exact same definition as in the two-attribute case:

for all x_i, x_j such that $(x_i, y_k) \succeq (x_j, y_k)$ for some value y_k, it should hold that $(x_i, y_l) \succeq (x_j, y_l)$ for all values y_l.

Preferential independence – an example

Let X, Y and Z be three attributes with values x_1, x_2, y_1, y_2, and z_1, z_2, respectively. Suppose we have the following utility function:

$$\begin{array}{ll} u(x_1,y_1,z_1)=1.0 & u(x_2,y_1,z_1)=0.2 \\ u(x_1,y_1,z_2)=0.9 & u(x_2,y_1,z_2)=0.3 \\ u(x_1,y_2,z_1)=0.7 & u(x_2,y_2,z_1)=0.4 \\ u(x_1,y_2,z_2)=0.8 & u(x_2,y_2,z_2)=0.0 \end{array}$$

- X is preferentially independent of $\{Y,Z\}$ as $(x_1,y_1,z_1) \succeq (x_2,y_1,z_1) \Rightarrow (x_1,y_i,z_j) \succeq (x_2,y_i,z_j)$ $\forall y_i, z_j$;
- Y is not preferentially independent of $\{X,Z\}$ as in the context x_1, z_1 we have $(x_1,y_1,z_1) \succeq (x_1,y_2,z_1)$, but for x_2, z_1 we have $(x_2,y_1,z_1) \prec (x_2,y_2,z_1)$;
- Z is not preferentially independent of $\{X,Y\}$ as in the context x_1, y_1 we have $(x_1,y_1,z_1) \succeq (x_1,y_1,z_2)$, but for x_1, y_2 we have $(x_1,y_2,z_1) \prec (x_1,y_2,z_2)$.

Utility independence revisited

Let $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ be a set of attributes. Let $Y \subset X$ and $\overline{Y} = X \setminus Y$ be two complementary subsets of X.

Y is utility independent of $\overline{Y}$ iff

$$([y], \overline{y}') \succeq ([y]', \overline{y}') \Rightarrow ([y], \overline{y}) \succeq ([y]', \overline{y})$$

for all consequences $\overline{y}$ and any lotteries $[y]$ and $[y]'$ and consequence $\overline{y}'$.

The attributes $X_1, \ldots, X_n$ are mutually utility independent if every subset of $\{X_1, \ldots, X_n\}$ is utility independent of its complement.

Compare with the two attribute case where X is utility independent of Y can be rewritten as

$$\begin{array}{lll} [p,(x_i,y);(1-p),(x_k,y)] & \succeq & [1.0,(x_j,y)] \quad \Rightarrow \\ [p,(x_i,y_l);(1-p),(x_k,y_l)] & \succeq & [1.0,(x_j,y_l)] \end{array}$$

or, equivalently,

$$([x],y) \succeq ([x]',y) \Rightarrow ([x],y_l) \succeq ([x]',y_l)$$

for all y_l and any lotteries $[x]$ and $[x]'$ and consequence y.

Utility independence – an example

Let X, Y and Z be three attributes with values x_1, x_2, y_1, y_2, and z_1, z_2, respectively, such that

$$\begin{array}{ll} u(x_1,y_1,z_1)=1.0 & u(x_2,y_1,z_1)=0.2 \\ u(x_1,y_1,z_2)=0.9 & u(x_2,y_1,z_2)=0.3 \\ u(x_1,y_2,z_1)=0.7 & u(x_2,y_2,z_1)=0.4 \\ u(x_1,y_2,z_2)=0.8 & u(x_2,y_2,z_2)=0.0 \end{array}$$

- X is utility independent of $\{Y,Z\}$:

$$\begin{array}{l} [0.6,(x_1,y_1,z_1);0.4,(x_2,y_1,z_1)] \succeq \\ [0.5,(x_1,y_1,z_1);0.5,(x_2,y_1,z_1)] \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} [0.6,(x_1,y_1,z_2);0.4,(x_2,y_1,z_2)] \succeq \\ [0.5,(x_1,y_1,z_2);0.5,(x_2,y_1,z_2)], \\ [0.6,(x_1,y_2,z_1);0.4,(x_2,y_2,z_1)] \succeq \\ [0.5,(x_1,y_2,z_1);0.5,(x_2,y_2,z_1)], \\ [0.6,(x_1,y_2,z_2);0.4,(x_2,y_2,z_2)] \succeq \\ [0.5,(x_1,y_2,z_2);0.5,(x_2,y_2,z_2)] \end{array}$$

- Y is not utility independent of $\{X,Z\}$ as Y is not preferentially independent of $\{X,Z\}$;
- Z is not utility independent of $\{X,Y\}$ as Z is not preferentially independent of $\{X,Y\}$.

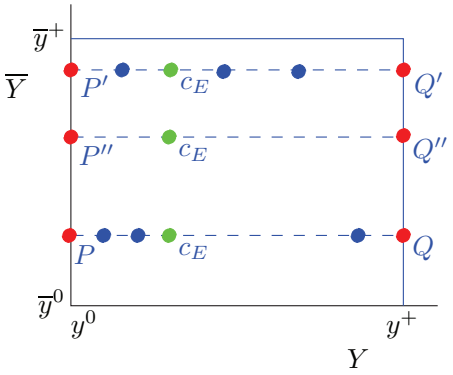
Verifying independence conditions

Let the set of attributes X be partitioned into Y and $\overline{Y}$, and let $\overline{y}^0 = (x_k^0, \ldots, x_n^0)$ and $\overline{y}^+ = (x_k^+, \ldots, x_n^+)$.

- Preferential independence:
  1. choose y and y' such that $(y,\overline{y}^0) \sim (y',\overline{y}^0)$;
  2. ask if $(y,\overline{y}^+) \sim (y',\overline{y}^+)$ (it should be!);
  3. repeat step 2 for various values of Y;
  4. check the orientation:

$$(y,\overline{y}) \succeq (y',\overline{y}) \Rightarrow (y,\overline{y}') \succeq (y',\overline{y}')$$

- Utility independence: works the same as in the two-attribute case.



Utility independences from preferential independences

Let X_0, X_1 and X_2 be three (sets of) attributes.

Preferential independence of $\{X_1, X_2\}$ from X_0 can be strengthened to utility independence provided that

- either X_1 is utility independent of $\overline{X}_1$;
- or, X_2 is utility independent $\overline{X}_2$.

More formally,

if $\{X_1, X_2\}$ is preferentially independent of X_0
and X_1 is utility independent of $\{X_0, X_2\}$,
then $\{X_1, X_2\}$ is utility independent of X_0.

An example

Let X, Y and Z be attributes with values x_1, x_2, y_1, y_2, and z_1, z_2, such that $u(X, Y, Z)$ is defined by

$$\begin{array}{ll} u(x_1, y_1, z_1) = 1.0 & u(x_2, y_1, z_1) = 0.7 \\ u(x_1, y_1, z_2) = 0.9 & u(x_2, y_1, z_2) = 0.8 \\ u(x_1, y_2, z_1) = 0.2 & u(x_2, y_2, z_1) = 0.1 \\ u(x_1, y_2, z_2) = 0.3 & u(x_2, y_2, z_2) = 0.0 \end{array}$$

- $\{X, Y\}$ is preferentially independent of Z as $(x_i, y_k, z_1) \succeq (x_j, y_l, z_1) \Rightarrow (x_i, y_k, z_2) \succeq (x_j, y_l, z_2)$;
- Y is utility independent of $\{X, Z\}$:

$$[0.7, (x_1, y_1, z_1); 0.3, (x_1, y_2, z_1)] \succeq [0.5, (x_1, y_1, z_1); 0.5, (x_1, y_2, z_1)] \quad \Longrightarrow$$

$$[0.7, (x_1, y_1, z_2); 0.3, (x_1, y_2, z_2)] \succeq [0.5, (x_1, y_1, z_2); 0.5, (x_1, y_2, z_2)],$$

$$[0.7, (x_2, y_1, z_1); 0.3, (x_2, y_2, z_1)] \succeq [0.5, (x_2, y_1, z_1); 0.5, (x_2, y_2, z_1)],$$

$$[0.7, (x_2, y_1, z_2); 0.3, (x_2, y_2, z_2)] \succeq [0.5, (x_2, y_1, z_2); 0.5, (x_2, y_2, z_2)]$$

From these observations we can conclude that $\{X, Y\}$ is utility independent of Z.

The multilinear utility function

Let $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \geq 2$, be a set of attributes.

If X_i is utility independent of $\overline{X}_i$ for all $i = 1 \ldots n$, then

$$\begin{aligned} u(X) \;=\; & \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} k_{ij} \cdot u_i(X_i) \cdot u_j(X_j) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{l>j} k_{ijl} \cdot u_i(X_i) \cdot u_j(X_j) \cdot u_l(X_l) \\ & + \ldots + k_{123\ldots n} \cdot u_1(X_1) \cdot u_2(X_2) \cdot \ldots \cdot u_n(X_n) \end{aligned}$$

where

- $u(X)$ is normalised by $u(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$ and $u(x_1^+, \ldots, x_n^+) = 1$;
- each $u_i(X_i)$ is a conditional utility function on X_i, normalised by $u_i(x_i^0) = 0$ and $u_i(x_i^+) = 1$;
- let $x^0_{[i,j]}$ be short for $x_i^0, \ldots, x_j^0$, then

$$\begin{aligned} k_i &= u(x^0_{[1,i-1]}, x_i^+, x^0_{[i+1,n]}) \\ k_{ij} &= u(x^0_{[1,i-1]}, x_i^+, x^0_{[i+1,j-1]}, x_j^+, x^0_{[j+1,n]}) - k_i - k_j \\ k_{ijl} &= u(x^0_{[1,i-1]}, x_i^+, x^0_{[i+1,j-1]}, x_j^+, x^0_{[j+1,l-1]}, x_l^+, x^0_{[l+1,n]}) \\ &\quad - k_i - k_j - k_l - k_{ij} - k_{il} - k_{jl} \\ \ldots &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

An example

Let X, Y, and Z be attributes with values $x_1 \prec x_2$, $y_1 \prec y_2$, and $z_1 \prec z_2$, respectively.

If X is utility independent of $\{Y, Z\}$,
Y is utility independent of $\{X, Z\}$, and
Z is utility independent of $\{X, Y\}$,
then

$$\begin{aligned} u(X, Y, Z) \;=\; & k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y) + k_Z \cdot u_Z(Z) \\ & + k_{XY} \cdot u_X(X) \cdot u_Y(Y) \\ & + k_{XZ} \cdot u_X(X) \cdot u_Z(Z) \\ & + k_{YZ} \cdot u_Y(Y) \cdot u_Z(Z) \\ & + k_{XYZ} \cdot u_X(X) \cdot u_Y(Y) \cdot u_Z(Z) \end{aligned}$$

where $u(x_1, y_1, z_1) = 0$ and $u(x_2, y_2, z_2) = 1$,

$$\begin{array}{lll} u_X(x_1) = 0 & u_Y(y_1) = 0 & u_Z(z_1) = 0 \\ u_X(x_2) = 1 & u_Y(y_2) = 1 & u_Z(z_2) = 1 \end{array}$$

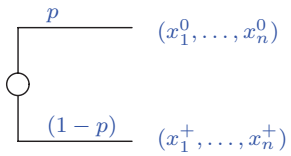
$$\begin{array}{ll} k_X = u(x_2, y_1, z_1) & k_{XY} = u(x_2, y_2, z_1) - k_X - k_Y \\ k_Y = u(x_1, y_2, z_1) & k_{XZ} = u(x_2, y_1, z_2) - k_X - k_Z \\ k_Z = u(x_1, y_1, z_2) & k_{YZ} = u(x_1, y_2, z_2) - k_Y - k_Z \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_{XYZ} &= u(x_2, y_2, z_2) - k_X - k_Y - k_Z - k_{XY} - k_{XZ} - k_{YZ} \\ &= 1 - k_X - k_Y - k_Z - k_{XY} - k_{XZ} - k_{YZ} \end{aligned}$$

Eliciting scaling constants

The multilinear utility function over n attributes requires the assessment of $2^n - 2$ scaling constants.

For each scaling constant k_i we use a lottery of the form

$(x^0_{[1,i-1]},\ x_i^+,\ x^0_{[i+1,n]})$ $\sim$ 

where $x^0_{[i,j]}$ is short for $x^0_i, \ldots, x^0_j$.

For all scaling constants k_{ij}, k_{ijl}, etc. we use similar lotteries.

We thus get $2^n - 2$ equations, one for each scaling constant.

Eliciting scaling constants – an example

Let X, Y, and Z be attributes with values $x_1 \prec x_2$, $y_1 \prec y_2$, and $z_1 \prec z_2$, and the utility function $u(X, Y)$ from the previous example ($u(x_1, y_1, z_1) = 0$; $u(x_2, y_2, z_2) = 1$).

Suppose the decision maker indicates the following indifferences:

$$(x_2, y_1, z_1) \sim [0.2, (x_1, y_1, z_1); 0.8, (x_2, y_2, z_2)]$$
$$(x_1, y_2, z_1) \sim [0.5, (x_1, y_1, z_1); 0.5, (x_2, y_2, z_2)]$$
$$(x_1, y_1, z_2) \sim [0.7, (x_1, y_1, z_1); 0.3, (x_2, y_2, z_2)]$$

$$(x_2, y_2, z_1) \sim [0.2, (x_1, y_1, z_1); 0.8, (x_2, y_2, z_2)]$$
$$(x_2, y_1, z_2) \sim [0.1, (x_1, y_1, z_1); 0.9, (x_2, y_2, z_2)]$$
$$(x_1, y_2, z_2) \sim [0.4, (x_1, y_1, z_1); 0.6, (x_2, y_2, z_2)]$$

Then,

$$\begin{aligned} u(X,Y,Z) \;=\; & 0.8{\cdot}u_X(X) + 0.5{\cdot}u_Y(Y) + 0.3{\cdot}u_Z(Z) \\ & - 0.5{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y) \\ & - 0.2{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Z(Z) \\ & - 0.2{\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \\ & + 0.3{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \end{aligned}$$

The multiplicative utility function

Let $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \geq 2$, be a set of attributes.

If $X_1, \ldots, X_n$ are mutually utility independent, then

$$\begin{aligned} u(X) = & \sum_{i=1}^{n} k_i{\cdot}u_i(X_i) + k{\cdot}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} k_i{\cdot}k_j{\cdot}u_i(X_i){\cdot}u_j(X_j) \\ & + k^2{\cdot}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{l>j} k_i{\cdot}k_j{\cdot}k_l{\cdot}u_i(X_i){\cdot}u_j(X_j){\cdot}u_l(X_l) \\ & + \ldots + \\ & + k^{n-1}{\cdot}k_1{\cdot}\ldots{\cdot}k_n{\cdot}u_1(X_1){\cdot}u_2(X_2){\cdot}\ldots{\cdot}u_n(X_n) \end{aligned}$$

where

- $u(X)$ is normalised by $u(x^0_1, \ldots, x^0_n) = 0$ and $u(x^+_1, \ldots, x^+_n) = 1$;
- each $u_i(X_i)$ is a conditional utility function on X_i, normalised by $u_i(x^0_i) = 0$ and $u_i(x^+_i) = 1$;
- $k_i = u(x^0_1, \ldots, x^0_j,\ x^+_i,\ x^0_i, \ldots, x^0_j)$ for each i;
- k is a solution to $1 + k = \prod_{i=1}^{n}(1 + k{\cdot}k_i)$

  such that $k = 0$ if $\sum_{i=1}^n k_i = 1$; $-1 < k < 0$ if $\sum_{i=1}^n k_i > 1$, and $k > 0$ if $\sum_{i=1}^n k_i < 1$.

An example

Let X, Y, and Z be attributes with values $x_1 \prec x_2$, $y_1 \prec y_2$, and $z_1 \prec z_2$, respectively.

If X is utility independent of $\{Y, Z\}$,
Y is utility independent of $\{X, Z\}$,
Z is utility independent of $\{X, Y\}$,
$\{X, Y\}$ is utility independent of Z,
$\{X, Z\}$ is utility independent of Y, and
$\{Y, Z\}$ is utility independent of X,
then

$$\begin{aligned} u(X,Y,Z) \;=\; & k_X{\cdot}u_X(X) + k_Y{\cdot}u_Y(Y) + k_Z{\cdot}u_Z(Z) \\ & + k{\cdot}k_X{\cdot}k_Y{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y) \\ & + k{\cdot}k_X{\cdot}k_Z{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Z(Z) \\ & + k{\cdot}k_Y{\cdot}k_Z{\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \\ & + k^2{\cdot}k_X{\cdot}k_Y{\cdot}k_Z{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \end{aligned}$$

where $u(x_1, y_1, z_1) = 0$ and $u(x_2, y_2, z_2) = 1$,

$$\begin{array}{lll} u_X(x_1) = 0 & u_Y(y_1) = 0 & u_Z(z_1) = 0 \\ u_X(x_2) = 1 & u_Y(y_2) = 1 & u_Z(z_2) = 1 \end{array}$$

$$k_X = u(x_2, y_1, z_1)$$
$$k_Y = u(x_1, y_2, z_1)$$
$$k_Z = u(x_1, y_1, z_2)$$

$k = \ldots$

Scaling constants

The multiplicative utility function over n attributes requires the assessment of n scaling constants.

Example:

Let X, Y, and Z be the attributes with utility function $u(X,Y)$ from the previous example ($u(x_1,y_1,z_1)=0$ and $u(x_2,y_2,z_2)=1$).

Suppose the decision maker now indicates the following indifferences:

$$(x_2,y_1,z_1) \sim [0.2,(x_1,y_1,z_1);0.8,(x_2,y_2,z_2)]$$
$$(x_1,y_2,z_1) \sim [0.5,(x_1,y_1,z_1);0.5,(x_2,y_2,z_2)]$$
$$(x_1,y_1,z_2) \sim [0.7,(x_1,y_1,z_1);0.3,(x_2,y_2,z_2)]$$

Then,

$$\begin{aligned} u(X,Y,Z) \;=\; & 0.8{\cdot}u_X(X)+0.5{\cdot}u_Y(Y)+0.3{\cdot}u_Z(Z) \\ & +k{\cdot}0.4{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y) \\ & +k{\cdot}0.24{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Z(Z) \\ & +k{\cdot}0.15{\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \\ & +k^2{\cdot}0.12{\cdot}u_X(X){\cdot}u_Y(Y){\cdot}u_Z(Z) \end{aligned}$$

where $k=-0.88$ is the solution to

$$1+k=(1+k{\cdot}0.8)\cdot(1+k{\cdot}0.5)\cdot(1+k{\cdot}0.3)$$

Additive independence revisited

Let $X=\{X_1,\ldots,X_n\}$, $n\geq 2$, be a set of attributes.

The attributes $X_1,\ldots,X_n$ are additive independent if X_i is additive independent of $\overline{X}_i$ for all X_i, where

X_i is additive independent of $\overline{X}_i$, iff

$$[0.5,(x_i,\overline{x}_i);0.5,(x_i',\overline{x}_i')] \sim [0.5,(x_i,\overline{x}_i');0.5,(x_i',\overline{x}_i)]$$

for any chosen x_i' and $\overline{x}_i'$ and all $(x_i,\overline{x}_i)$.

Compare with the two attribute case where X additive independent of Y iff

$$[0.5,(x_i,y_k);0.5,(x_j,y_l)] \sim [0.5,(x_i,y_l);0.5,(x_j,y_k)]$$

for any chosen x_j and y_l and all (x_i,y_k).

Additive independence – an example

Let X, Y and Z be three attributes with values x_1,x_2, y_1,y_2, and z_1,z_2, respectively. Suppose we have the following utility function:

$$\begin{array}{ll} u(x_1,y_1,z_1)=0.1 & u(x_2,y_1,z_1)=0.3 \\ u(x_1,y_1,z_2)=0.2 & u(x_2,y_1,z_2)=0.4 \\ u(x_1,y_2,z_1)=0.4 & u(x_2,y_2,z_1)=0.6 \\ u(x_1,y_2,z_2)=0.6 & u(x_2,y_2,z_2)=0.8 \end{array}$$

- X is additive independent of $\{Y,Z\}$:

  $[0.5,(x_1,y_j,z_k);0.5,(x_2,y_2,z_2)] \sim$

  $[0.5,(x_1,y_2,z_2);0.5,(x_2,y_j,z_k)]$ for all y_j,z_k

- Y is not additive independent of $\{X,Z\}$:

  $[0.5,(x_1,y_1,z_1);0.5,(x_2,y_2,z_2)] \not\sim$

  $[0.5,(x_2,y_1,z_2);0.5,(x_1,y_2,z_1)]$

- Z is not additive independent of $\{X,Y\}$

The additive utility function

Let $X=\{X_1,\ldots,X_n\}$, $n\geq 2$, be a set of attributes.

$X_1,\ldots,X_n$ are additive independent, iff

$$\begin{aligned} u(X) &= \sum_{i=1}^{n} u(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,\ X_i,\ x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i{\cdot}u_i(X_i) \end{aligned}$$

where

- $u(X)$ is normalised by $u(x_1^0,\ldots,x_n^0)=0$ and $u(x_1^+,\ldots,x_n^+)=1$;
- each $u_i(X_i)$ is a conditional utility function on X_i, normalised by $u_i(x_i^0)=0$ and $u_i(x_i^+)=1$;
- $k_i=u(x_1^0,\ldots,x_j^0,\ x_i^+,\ x_i^0,\ldots,x_j^0)$ for each i;
- $\sum_{i=1}^{n} k_i=1$.

An example

Let X, Y, and Z be attributes with values $x_1 \prec x_2$, $y_1 \prec y_2$, and $z_1 \prec z_2$, respectively.

If X is additive independent of $\{Y, Z\}$,
Y is additive independent of $\{X, Z\}$, and
Z is additive independent of $\{X, Y\}$,
then

$$u(X, Y, Z) = k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y) + k_Z \cdot u_Z(Z)$$

where

$u(x_1, y_1, z_1) = 0$ and $u(x_2, y_2, z_2) = 1$

$u_X(x_1) = 0,\ u_Y(y_1) = 0,\ u_Z(z_1) = 0$

$u_X(x_2) = 1,\ u_Y(y_2) = 1,\ u_Z(z_2) = 1$

$k_X = u(x_2, y_1, z_1)$

$k_Y = u(x_1, y_2, z_1)$

$k_Z = u(x_1, y_1, z_2) = 1 - k_X - k_Y$

Scaling constants

The additive utility function over n attributes requires the assessment of $n - 1$ scaling constants.

Example:

Let X, Y, and Z be attributes with values $x_1 \prec x_2$, $y_1 \prec y_2$, and $z_1 \prec z_2$, respectively. Suppose

$$u(X, Y, Z) = k_X \cdot u_X(X) + k_Y \cdot u_Y(Y) + k_Z \cdot u_Z(Z)$$

where $u(x_1, y_1, z_1) = 0$ and $u(x_2, y_2, z_2) = 1$.

Suppose the decision maker now indicates the following indifferences:

$$(x_2, y_1, z_1) \sim [0.7, (x_1, y_1, z_1); 0.3, (x_2, y_2, z_2)]$$

$$(x_1, y_2, z_1) \sim [0.5, (x_1, y_1, z_1); 0.5, (x_2, y_2, z_2)]$$

Then,

$$u(X, Y, Z) = 0.3 \cdot u_X(X) + 0.5 \cdot u_Y(Y) + 0.2 \cdot u_Z(Z)$$

Multiattribute decisionmaking under certainty: The analytic hierarchy process

(college 13)

The Job example

Suppose you have the choice between four job offers (alternatives):

A : Acme Manufacturing

B : Bankers Bank

C : Creative Consulting

D : Dynamic Decision Making

Your choice between alternatives is to be based on how well they meet the following objectives for several attributes:

L : a nice *Location*

P : good (longterm) *Prospects*

R : large amount of *Risk Analysis* (which you like)

S : high *Salary*

How do you make your decision?

Saaty's Analytic Hierarchy Process (AHP) provides a powerful tool for making decisions in situations involving multiple objectives.

AHP – Pairwise comparisons

Let i and j be objectives. The relative importance of these objectives can be scored on a 9 point interval-valued scale using the following table:

value	interpretation
1	i and j are of equal importance
3	i is weakly more important than j
5	experience and judgment indicate that i is strongly more important than j
7	i is very strongly or demonstrably more important than j
9	i is absolutely more important than j
$2, 4, 6, 8$	intermediate values

Example

A value of 8 means that objective i is about 8 times as important as objective j, or

> objective i is midway between very strongly and absolutely more important than objective j.

An example

Exercise

Consider the previous Job example describing a choice between four jobs.

How would you compare the following objectives?

- nice Location,
- good (longterm) Prospects,
- large amount of Risk Analysis
- high Salary

(Use the table on the previous transparency)

The pairwise comparison matrix

Let $O_1, \ldots, O_n$, $n \geq 2$, be objectives.

A pairwise comparison matrix is an $n \times n$ matrix A with elements a_{ij}, indicating the value of objective i relative to objective j:

$$\begin{array}{c} \\ O_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ O_j \\ \cdot \\ \cdot \\ O_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} O_1 & \ldots & O_j & \ldots & O_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & . \\ a_{ji} & a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jn} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nj} & . & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

A pairwise comparison matrix is consistent iff for all i, j, $k \in \{1, \ldots, n\}$:

- $a_{ii} = 1$;
- $a_{ij} = 1/a_{ji}$;
- $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}$

Which pairs to compare?

Let $O_1, \ldots, O_n$, $n \geq 2$, be objectives.
A consistent $n \times n$ pairwise comparison matrix can be constructed from only $n - 1$ comparisons:

$$\begin{array}{c} \\ O_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ O_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} O_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{l} a_{ii} = 1 \\ a_{ij} = 1/a_{ji} \\ a_{ik} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \cdot a_{jk} \end{array} \quad \Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ O_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ O_j \\ \cdot \\ \cdot \\ O_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} O_1 & \ldots & O_j & \ldots & O_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & . \\ a_{ji} & a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jn} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nj} & . & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Note that indeed $a_{ik} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \cdot a_{jk} = a_{ij} \cdot a_{jk}$.

An example

Suppose that for the Job example, we have the following pairwise comparison values, based on 3 pairwise comparisons:

	Location
Location	1
Prospects	2
Risk An.	3
Salary	5

$\Downarrow$ consistency

	L	P	R	S
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
P	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
R	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
S	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	1

Objective weights

Suppose we have n objectives in an AHP.
Let A be a consistent pairwise comparison matrix, then A is of the following form:

$$\begin{array}{c} \\ O_1 \\ O_2 \\ . \\ . \\ . \\ O_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O_1 & O_2 & \dots & O_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & . & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & . & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

where $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, denotes the weight of objective i.

The weight vector $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ for the n objectives is recovered from A by finding a (non-trivial) solution to a set of n equations with n unknowns:

$$A \cdot \mathbf{w}^T = n \cdot \mathbf{w}^T$$

For convenience, weights are taken to sum to 1, resulting in a unique non-trivial solution.

$$\boldsymbol{A \cdot \mathbf{w}^T = n \cdot \mathbf{w}^T}$$

Let A be an $n \times n$ consistent pairwise comparison matrix, then

$$A \cdot \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} \cdot w_1 + & \frac{w_1}{w_2} \cdot w_2 + & \cdots + & \frac{w_1}{w_n} \cdot w_n \\ & . & . & \\ & . & . & \\ & . & . & \\ \frac{w_n}{w_1} \cdot w_1 + & \cdots & \cdots + & \frac{w_n}{w_n} \cdot w_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n \cdot w_1 \\ n \cdot w_2 \\ . \\ . \\ . \\ n \cdot w_n \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix} = n \cdot \mathbf{w}^T$$

An example

Suppose that for the Job example, we have assessed the following consistent pairwise comparison matrix:

	L	P	R	S
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
P	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
R	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
S	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	1

The only non-trivial weight vector with weights summing to one is

$$\mathbf{w} = [\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}]$$

An example

Suppose that for the Job example, we have the following pairwise comparison values, based on $(4-1)!$ pairwise comparisons:

	L	P	R	S
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
P	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
R	3	3	1	$\frac{1}{2}$
S	5	4	2	1

The matrix displays slight inconsistencies:

- amount of Risk Analysis is about three times as important as good Prospects;
- good Prospects are twice as important as a nice Location;
- amount of Risk Analysis is only three times as important as the Location.

Objective weights revisited

Suppose we have n objectives in an AHP.

Let A be an inconsistent pairwise comparison matrix, then the weight vector $\mathbf{w}$ no longer follows from

$$A \cdot \mathbf{w}^T = n \cdot \mathbf{w}^T$$

We can, however, approximate the weight vector:

- normalise each column j in A such that

$$\sum_i a_{ij} = 1;$$

- denote the resulting matrix by A';
- for each row i in A', compute the average value

$$w_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_j a'_{ij};$$

- w_i is the weight of objective i in the weight vector.

Approximation of the weight vector

Consider approximating the weight vector of a consistent $n \times n$ pairwise comparison matrix A:

	O_1	O_2	$\cdots$	O_n
O_1	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_2}$	.	$\frac{w_1}{w_n}$
O_2	$\frac{w_2}{w_1}$	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
O_n	$\frac{w_n}{w_1}$	$\frac{w_n}{w_2}$	.	$\frac{w_n}{w_n}$

$\Downarrow$ normalise columns $(\rightarrow A')$

	O_1	O_2	$\cdots$	O_n
O_1	w_1	w_1		w_1
O_2	w_2	$\cdots$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$			
O_n	w_n	$\cdots$		w_n
	1	1	$\cdots$	1

Obviously, $w_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_j a'_{ij}$.

An example

Suppose that for the Job example we have assessed the following inconsistent pairwise comparison matrix:

	L	P	R	S
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
P	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
R	3	3	1	$\frac{1}{2}$
S	5	4	2	1
	11	8.5	3.67	1.95

$\Downarrow$ normalise columns

	L	P	R	S	Avg.
L	0.091	0.059	0.091	0.103	0.086
P	0.182	0.118	0.091	0.128	0.130
R	0.273	0.353	0.273	0.256	0.288
S	0.455	0.471	0.545	0.513	0.496
	1	1	1	1	1

We find the following approximate weight vector for the objectives L, P, R and S, respectively:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{w} & = & [0.086, 0.130, 0.288, 0.496] \\ & & (w_{\mathsf{L}}) \quad (w_{\mathsf{P}}) \quad (w_{\mathsf{R}}) \quad (w_{\mathsf{S}}) \end{array}$$

Checking for Consistency

Let A be a pairwise comparison matrix for n objectives. Let $\mathbf{w}$ be the weight vector computed for A.

Consistency of A can be checked using the following procedure:

1. Compute $A \cdot \mathbf{w}^T$
2. Compute $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i\text{th entry in } A\cdot\mathbf{w}^T}{i\text{th entry in } \mathbf{w}^T}$
3. Compute the consistency index CI

$$\text{CI} = \frac{(\text{result from step 2}) - n}{n-1}$$

4. If $\text{CI} = 0$ then A is consistent;
   If $\text{CI}/\text{RI}_n \leq 0.10$ then A is consistent enough;
   If $\text{CI}/\text{RI}_n > 0.10$ then A is seriously inconsistent.

   The random index RI_n is the average value of CI for randomly chosen entries in A (provided that $a_{ii} = 1$ and $a_{ij} = 1/a_{ji}$), and is given by

n	2	3	4	5	6	7	...
RI_n	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	...

Consistency checking: an example

Reconsider the Job example and the pairwise comparisons matrix A:

$$\begin{array}{c} \\ \text{L} \\ \text{P} \\ \text{R} \\ \text{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{L} & \text{P} & \text{R} & \text{S} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

We check matrix A for consistency:

1. $$A\cdot\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0.086 \\ 0.130 \\ 0.288 \\ 0.496 \end{bmatrix}}_{1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.346 \\ 0.522 \\ 1.184 \\ 2.022 \end{bmatrix}}_{4.074}$$

2. $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i\text{th entry in } A\cdot\mathbf{w}^T}{i\text{th entry in } \mathbf{w}^T} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{0.346}{0.086} + \frac{0.522}{0.130} + \frac{1.184}{0.288} + \frac{2.022}{0.496}\right) = 4.057$$

Consistency checking: an example

Reconsider the Job example and the pairwise comparisons matrix A:

$$\begin{array}{c} \\ \text{L} \\ \text{P} \\ \text{R} \\ \text{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{L} & \text{P} & \text{R} & \text{S} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

We check matrix A for consistency:

3. $$\text{CI} = \frac{(\text{result from step 2}) - n}{n-1} = \frac{4.057 - 4}{3} = 0.019$$

4. For $n = 4$ we find that $\text{RI}_4 = 0.90$, and thus

$$\text{CI}/\text{RI}_4 = \frac{0.019}{0.90} = 0.021 \leq 0.10$$

We conclude that matrix A is consistent enough.

The weight vector $\mathbf{w} = [0.086, 0.130, 0.288, 0.496]$ is therefore a good enough approximation.

Scoring alternatives on objectives

Suppose we have n objectives and m alternatives in an AHP. How do the alternatives score on the different objectives? What is the best alternative?

1. For each objective i, assess an $m \times m$ pairwise comparison matrix A_i over the m alternatives;
2. find the weight vector for each A_i; this vector represents the relative weights or scores s_{ij} of each alternative j with respect to objective i;
3. compute for each alternative j the overall score:

$$s_j = \sum_i s_{ij} \cdot w_i$$

4. select the alternative with the highest overall score.

An example (I)

What is the best alternative in the Job example?

For the different jobs (A, B, C, and D), we assess the following pairwise comparison matrix for the objective L (nice Location):

	A	B	C	D
A	1	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{3}$
B	2	1	7	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{9}$
D	3	2	9	1
	$6\frac{1}{5}$	$3\frac{9}{14}$	22	$1\frac{17}{18}$

(Location)

⇓ normalise

	A	B	C	D	Avg.
A	0.161	0.137	0.227	0.171	0.174
B	0.322	0.275	0.312	0.257	0.293
C	0.320	0.040	0.045	0.057	0.044
D	0.484	0.549	0.409	0.514	0.489

The scores (relative weights) of the alternatives A, B, C and D on objective L are:

$s_{\mathsf{LA}} = 0.174;\ s_{\mathsf{LB}} = 0.293;\ s_{\mathsf{LC}} = 0.044;\ s_{\mathsf{LD}} = 0.489$

An example (II)

What is the best alternative in the Job example?

For the different jobs (A, B, C, and D), we assess the following pairwise comparison matrix for the objective P (good Prospects):

	A	B	C	D
A	1	9	5	2
B	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
C	$\frac{1}{5}$	9	1	$\frac{1}{2}$
D	$\frac{1}{2}$	9	2	1
	$1\frac{73}{90}$	28	$8\frac{1}{9}$	$3\frac{11}{18}$

(Prospects)

⇓ normalise

	A	B	C	D	Avg.
A	0.552	0.321	0.616	0.554	0.511
B	0.061	0.036	0.014	0.031	0.035
C	0.110	0.321	0.123	0.138	0.173
D	0.276	0.321	0.247	0.277	0.280

The scores (relative weights) of the alternatives A, B, C and D on objective P are:

$s_{\mathsf{PA}} = 0.511;\ s_{\mathsf{PB}} = 0.035;\ s_{\mathsf{PC}} = 0.173;\ s_{\mathsf{PD}} = 0.280$

An example (III)

What is the best alternative in the Job example?

For the different jobs (A, B, C, and D), we assess the following pairwise comparison matrix for the objective R (amount of Risk Analysis):

	A	B	C	D
A	1	6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
C	2	6	1	2
D	2	8	$\frac{1}{2}$	1
	$5\frac{1}{6}$	21	$2\frac{1}{6}$	$3\frac{5}{8}$

(Risk An.)

⇓ normalise

	A	B	C	D	Avg.
A	0.194	0.286	0.231	0.138	0.212
B	0.032	0.048	0.077	0.034	0.048
C	0.387	0.286	0.462	0.552	0.422
D	0.387	0.381	0.231	0.276	0.319

The scores (relative weights) of the alternatives A, B, C and D on objective R are:

$s_{\mathsf{RA}} = 0.212;\ s_{\mathsf{RB}} = 0.048;\ s_{\mathsf{RC}} = 0.422;\ s_{\mathsf{RD}} = 0.319$

An example (IV)

What is the best alternative in the Job example?

For the different jobs (A, B, C, and D), we assess the following pairwise comparison matrix for the objective S (high Salary):

	A	B	C	D
A	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
B	9	1	2	1
C	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
D	6	1	2	1
	20	$2\frac{11}{18}$	$5\frac{1}{4}$	$2\frac{2}{3}$

(Salary)

⇓ normalise

	A	B	C	D	Avg.
A	0.050	0.043	0.048	0.063	0.051
B	0.450	0.383	0.381	0.375	0.397
C	0.200	0.191	0.190	0.188	0.192
D	0.300	0.383	0.381	0.375	0.360

The scores (relative weights) of the alternatives A, B, C and D on objective S are:

$s_{\mathsf{SA}} = 0.051;\ s_{\mathsf{SB}} = 0.397;\ s_{\mathsf{SC}} = 0.192;\ s_{\mathsf{SD}} = 0.360$

An example (V)

What is the best alternative in the Job example?

From the computed scores of the alternatives on all objectives, we construct the following scoring matrix:

$$S = \begin{array}{c} \\ \mathsf{L} \\ \mathsf{P} \\ \mathsf{R} \\ \mathsf{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.174 & 0.293 & 0.044 & 0.489 \\ 0.511 & 0.035 & 0.173 & 0.280 \\ 0.212 & 0.048 & 0.422 & 0.319 \\ 0.051 & 0.397 & 0.192 & 0.360 \end{bmatrix} \end{array}$$

Recall that the objective weights were:

$w_{\mathsf{L}} = 0.086;\ w_{\mathsf{P}} = 0.130;\ w_{\mathsf{R}} = 0.288;\ w_{\mathsf{S}} = 0.496$

The overall score for each of the jobs now is:

$$\begin{aligned} s_{\mathsf{A}} &= 0.174 \cdot 0.086 + 0.511 \cdot 0.130 \\ &\quad + 0.212 \cdot 0.288 + 0.051 \cdot 0.496 = 0.168 \\ s_{\mathsf{B}} &= 0.240 \\ s_{\mathsf{C}} &= 0.243 \\ s_{\mathsf{D}} &= 0.349 \end{aligned}$$

Dynamic Decision Making (job D) it is!

Concluding observations

(college 13)

Summary

General ingredients, and their formal representation, of decision problems are

◦ decision alternatives	decision variables
◦ uncertain events	chance variables and their probabilities
◦ consequences	attribute tuples
◦ objectives	attributes and preference orders on their values
◦ preferences and risk attitudes	(decomposed) (utility) function(s)

Summary (II)

When uncertain events are disregarded or are assumed to have uniform distributions, other methods for decision making are:

- in the case of a single attribute:
  - the maximin criterion;
  - the maximax criterion;
  - the minimax regret criterion;
  - ...
- in the multi-attribute case:
  - the analytic hierarchy process (deterministic outcomes);
  - trade-off curves (deterministic outcomes);
  - ...

Summary (III)

A decision problem is often structured using a decision tree; decision making can then be based on several techniques:

- deterministic and stochastic dominance to reduce number of strategies;
- foldback analysis to compute expected utility/reward of a strategy;
- value of information

What more can we do?

Subjects we have not touched upon are:

- value functions, additive preferences (deterministic outcomes only);
- preferences over time;
- group decision making/ negotiating;
- behavioural decision making;
- structuring and evaluating decisions using: (see Clemen, Ch. 3 + references)
  - influence diagrams;
  - valuation networks;
  - sequential decision diagrams;
  - ...
- ...

Exercises:
Risk attitudes, multiple objectives

1.

Solve the following exercises from Clemen's book:

a. Exercise 13.6, page 489;

b. Exercise 13.17, page 491.

2. (W.L. Winston, 1994)

Suppose my utility function for *asset position* x is given by $u(x) = \ln x$.

a. Am I risk-averse, risk-neutral, or risk-prone?

b. I now have € 20.000 and am considering the following two (unfortunate) lotteries:

L_1: with probability 1, I lose € 1000.
L_2: with probability 0.9, I gain € 0,
and with probability 0.1, I lose € 10,000

Determine which lottery I prefer. In addition, determine the risk premium of L_2.

3. (W.L. Winston, 1994)

Show that a decision maker who has a linear utility function will rank two lotteries according to their expected (monetary) value.

4. (adapted from W.L. Winston, 1994)

A decision maker has a utility function for monetary *gains* x given by $u(x) = \sqrt{(x + 10.000)}$.

a. Is the decision maker risk-averse, risk-neutral, or risk-prone?

b. Give a lottery that models the decision maker's status quo.

c. Show that the person is indifferent between the status quo and lottery L:

L: with probability $\frac{1}{3}$, he or she gains € 80.000

with probability $\frac{2}{3}$, he or she loses € 10.000

d. There is a 10% chance that a painting valued at € 10.000 will be stolen during the next year.

- What is the risk-premium of this "lottery"?
- What is the most (per year) that the decision maker would be willing to pay for insurance covering the loss of the painting?
- Explain the difference between your previous two answers.

5. (adapted from W.L. Winston, 1994)

We now have € 5000 in assets and are given a choice between investment 1 and investment 2. With investment 1, 80% of the time we increase of asset position by € 295.000 and 20% of the time we increase our asset position by € 95.000. With investment 2, 50% of the time we increase of asset position by € 595.000 and 50% of the time we increase our asset position by € 5.000. Our utility function for final asset position x is $u(x)$. We are given the following values for $u(x)$: $u(0) = 0$, $u(90.000) = 0.30$, $u(490.000) = 0.7$, $u(640.000) = 0.80$, $u(810.000) = 0.90$, $u(1.000.000) = 1$.

a. Are we risk-averse, risk-neutral, or risk-prone? Explain.

b. Will we prefer investment 1 or investment 2?

c. Give the risk premium of both investments.

6.

Solve *two* of the exercises on transparancy nr. 137.

7.

Consider two attributes X and Y with values $x_1 \preceq \ldots \preceq x_n$, $n \geq 1$, and $y_1 \preceq \ldots \preceq y_m$, $m \geq 1$. Prove that if X is utility independent of Y, then for each value y_l of Y, there exist real functions $g > 0$ and h, such that for all x_i and y_j we have that

$$u(x_i, y_j) = g(y_j) \cdot u(x_i, y_l) + h(y_j)$$

8. (adapted from W.L. Winston, 1994)

Public service Indiana (PSI) is considering two sites for a nuclear power plant. The following two attributes will influence its determination about where to build the plant:

Attribute C Cost of the plant (in millions of euros)

Attribute A Acres of land damaged by building the plant

Assume that PSI's multiattribute utility function for any value c of C and any value a of A is given by

$$u(c, a) = 0.70 \cdot u_C(c) + 0.20 \cdot u_A(a) + 0.10 \cdot u_C(c) \cdot u_A(a), \text{ where}$$
$$u_C(c) = 0.1 + e^{-0.1 \cdot c} \quad \text{and} \quad u_A(a) = 2.5 - 2.5 \cdot e^{0.0006 \cdot a - 0.48}$$

Two locations for the power plant are under consideration. Location 1 is equivalent to the lottery $[0.50, (50, 300); 0.50, (30, 400)]$ and location 2 is equivalent to the lottery $[0.50, (60, 200); 0.50, (15, 600)]$.

Which location should be chosen?

9.

Solve the following exercises from Clemen's book:

a. Exercises 16.1 - 16.4, page 599;

b. Exercise 15.6, page 561;

Answers for assistants

1.

a. $u(x_C) = u(L) = 0.93 \implies x_C = 1000$; RP $= 1236 - 1000 = 236$.

b. $a \cdot 3.0 + b = 1.00$ and $a \cdot 1.0 + b = 0.00$ gives $a = 0.5$ and $b = -0.5$. The values $(3.0, 2.9, 2.8, 2.6, 1.0)$ are then transformed to $(1.00, 0.95, 0.90, 0.80, 0.00)$.

2.

a. $u''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, so risk-averse.

b. u describes asset *position*.

$$\begin{aligned} u(L_1) &= 1 \cdot u(20.000 - 1.000) \\ &= u(19.000) = \ln 19.000 = 9.852 \\ u(L_2) &= 0.9 \cdot u(20.000 + 0) + 0.1 \cdot u(20.000 - 10.000) \\ &= 9.834 \end{aligned}$$

You slightly prefer L_1. u is an increasing function so the risk premium for L_2 is $x_E - x_C$.

$$x_E = 0.9 \cdot 20.000 + 0.1 \cdot 10.000 = 19.000$$

$$\ln(x) = 9.834 \implies x_C = e^{9.834} = 18.660,66$$

The risk premium thus is $19.000 - 18.660,66 = 339,34$.

3.

Let x_i, x_j, x_k, and x_l be values of X. Let $L_1 = [p, x_i; (1-p), x_j]$ and $L_2 = [q, x_k; (1-q), x_l]$ be lotteries over X. Suppose $P = p \cdot x_i + (1-p) \cdot x_j$ and $Q = q \cdot x_k + (1-q) \cdot x_l$, then $P = EV(L_1)$ and $Q = EV(L_2)$.

$$\begin{aligned} u(L_1) &= p \cdot u(x_i) + (1-p) \cdot u(x_j) \\ &= u(p \cdot x_i + (1-p) \cdot x_j) \text{ \{risk neutral\}} \\ &= u(P) \\ &= u(EV(L_1)) \\ u(L_2) &= q \cdot u(x_k) + (1-q) \cdot u(x_l) \\ &= u(q \cdot x_k + (1-q) \cdot x_l) \text{ \{risk neutral\}} \\ &= u(EV(L_2)) \end{aligned}$$

We conclude that $u(L_1) \geq u(L_2) \iff u(EV(L_1)) \geq u(EV(L_2)) \iff EV(L_1) \geq EV(L_2)$; the latter step holds for increasing u and is $\leq$ for decreasing u; rankordering is thus done according to EV.

4.

a. $u''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x+10000}} < 0$, so risk-averse.

b. u describes *gains*. Statusquo (no loss, no gain) can be modelled by the lottery $S = [1.0, 0]$.

c. Using above lottery S, we now have:

$$\begin{aligned} u(S) &= 1.0 \cdot u(0) = 100 \\ u(L) &= 1/3 \cdot u(80.000) + 2/3 \cdot u(-10.000) = 100 \end{aligned}$$

We conclude that $S \sim L$.

d. The possible loss of the painting can be modelled by the lottery $L = [0.1, -10.000; 0.9, 0]$.

- u is an increasing function, so the risk-premium for L is $x_E - x_C$.

$$x_E = 0.1 \cdot -10.000 + 0.9 \cdot 0 = -1000$$

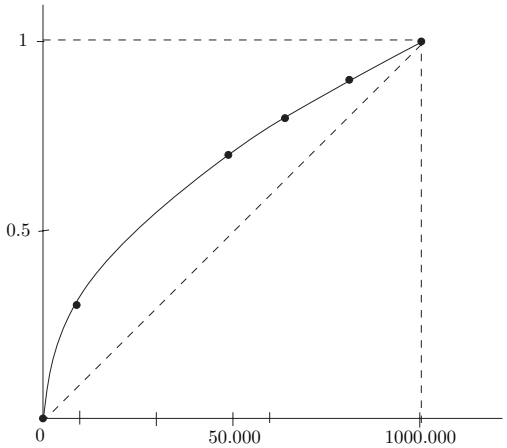
$$u(x_C) = u(L) = 0.1 \cdot u(-10.000) + 0.9 \cdot u(0) = 90 \implies x_C = -1900$$

The risk-premium thus is $-1000 - -1900 = 900$

- How much are we willing to pay on insurance premium (IP) to get rid of this lottery? We are willing to pay maximally what we would be losing if this loss were not compensated, that is, we are willing to pay the loss corresponding to the certainty equivalent of the above lottery: IP $= -x_C = 1900$.
- a positive RP is the amount you are willing *to give up from your expected payoff*; if you are willing to give up another 900 (RP) from the expected payoff of -1000, then in total you are willing to pay -1900 (IP) to avoid the consequences of the lottery.

5.

a. u models the utility of the *final asset position*.



The utility function is concave, so we are risk-averse.

b.

$$u(I_1) = 0.8 \cdot u(300.000) + 0.2 \cdot u(100.000)$$

$$\begin{aligned} &\approx 0.8 \cdot 0.55 + 0.2 \cdot 0.32 \text{ (from the figure)} \\ &\approx 0.50 \\ u(I_2) &= 0.5 \cdot u(600.000) + 0.5 \cdot u(10.000) \\ &\approx 0.5 \cdot 0.78 + 0.5 \cdot 0.05 \text{ (from the figure)} \\ &\approx 0.42 \end{aligned}$$

Investment 1 is preferred.

c. Investment 1:

$$x_E = 0.8 \cdot 300.000 + 0.2 \cdot 100.000 = 260.000$$
$$u(x_C) = u(I_1) \approx 0.50 \implies x_C \approx 25.000 \text{ (figure)}$$

The risk premium is $260.000 - 25.000 = 235.000$

Investment 2:

$$x_E = 0.5 \cdot 600.000 + 0.5 \cdot 10.000 = 305.000$$
$$u(x_C) = u(I_2) \approx 0.42 \implies x_C \approx 15.000 \text{ (figure)}$$

The risk premium is $305.000 - 15.000 = 290.000$

6.

all functions are increasing, so $R(X) = -\frac{u''(X)}{u'(X)}$; this gives the following functions:

- $R(X) = -\frac{0}{1} = 0$, is zero and constant;
- $R(X) = 0.2$, is zero and constant;
- $R(X) = -\frac{1}{x-1} > 0$, is positive and increasing for increasing x;
- $R(X) = \frac{1}{x+30} > 0$, is positive and decreasing for increasing x;
- $R(X) = -0.4$, is negative and constant;
- $R(X) = -\frac{2}{2x} < 0$, is negative and increasing (towards 0!);
- $R(X) = -\frac{2x^2+2}{x} < 0$, is zero and decreasing (towards more negative numbers!).

7.

Assume X is utility independent of Y. For each value x of X we have $x_1 \preceq x \preceq x_n$; by definition of utility independence we thus have that for all x there exists a p such that for all y

$$(x, y) \sim [p, (x_1, y); 1 - p, (x_n, y)]$$

We now have that for all x and y

$$u(x, y) = p \cdot u(x_1, y) + (1 - p) \cdot u(x_n, y) \qquad (1)$$

Solving p from formula (1) for a specific value y_l of Y gives us

$$p = \frac{u(x, y_l) - u(x_n, y_l)}{u(x_1, y_l) - u(x_n, y_l)}$$

Substitution of p back into formula (1) and doing some simplification gives us for all x and y

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{u(x_1, y) - u(x_n, y)}{u(x_1, y_l) - u(x_n, y_l)} \cdot u(x, y_l) - \frac{u(x_n, y_l) \cdot (u(x_1, y) - u(x_n, y))}{u(x_1, y_l) - u(x_n, y_l)} + u(x_n, y) \\ &= h(y) \cdot u(x, y_l) - g(y) \end{aligned}$$

where for all y

$$h(y) = \frac{u(x_1, y) - u(x_n, y)}{u(x_1, y_l) - u(x_n, y_l)} > 0$$

and for all y

$$g(y) = \frac{u(x_n, y_l) \cdot (u(x_1, y) - u(x_n, y))}{u(x_1, y_l) - u(x_n, y_l)} + u(x_n, y)$$

Note that the function *values* of h and g do not vary with X; more importantly, note that h and g will be different *functions* for each specific y_l!

8.

$$\begin{array}{ll} u_C(15) = 0.323 & u_A(200) = 0.756 \\ u_C(30) = 0.150 & u_A(300) = 0.648 \\ u_C(50) = 0.107 & u_A(400) = 0.533 \\ u_C(60) = 0.102 & u_A(600) = 0.283 \end{array}$$

$$\begin{aligned} u(Loc\ 1) &= 0.5 \cdot u(50, 300) + 0.5 \cdot u(30, 400) \\ &= 0.5 \cdot (0.7 \cdot u_C(50) + 0.2 \cdot u_A(300) + 0.1 \cdot u_C(50) \cdot u_A(300)) \\ &\quad + 0.5 \cdot (0.7 \cdot u_C(30) + 0.2 \cdot u_A(400) + 0.1 \cdot u_C(30) \cdot u_A(400)) \\ &= 0.2155 \\ u(Loc\ 2) &= 0.5 \cdot u(60, 200) + 0.5 \cdot u(15, 600) \\ &= 0.5 \cdot (0.7 \cdot u_C(60) + 0.2 \cdot u_A(200) + 0.1 \cdot u_C(60) \cdot u_A(200)) \\ &\quad + 0.5 \cdot (0.7 \cdot u_C(15) + 0.2 \cdot u_A(600) + 0.1 \cdot u_C(15) \cdot u_A(600)) \\ &= 0.261 \end{aligned}$$

Location 2 is slighlty preferred.

Tentamen Besliskunde

27 februari 2003, 14:00 - 17:00 uur

Het tentamen bevat vier opgaven. Met elk onderdeel is 10 punten te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1

RTL17 verdient gemiddeld 400 000 euro aan een succesvolle show en verliest gemiddeld 100 000 euro aan een flop. Van alle shows die RTL17 in de afgelopen jaren geproduceerd heeft, is 25% een succes gebleken en 75% een flop. Een marketing bedrijf heeft een offerte à 40 000 euro afgegeven om een proefpubliek een gedeelte van een nieuwe show te laten bekijken en te laten beoordelen. Als de show echt een succes zal worden, dan is er een 90% kans dat het marketing bedrijf ook zal voorspellen dat de show een succes wordt. Als de show een flop zal worden, dan is er een 80% kans dat het bedrijf de flop voorspelt.

a. Geef de beslisboom van het kernprobleem van RTL17, waarin de mogelijkheid om het marketing bedrijf in te huren nog niet is meegenomen.

b. Bereken de *expected value of information* van het inhuren van het marketing bedrijf. Is het voor RTL17 een goede beslissing om het bedrijf in te huren?

c. Leg uit waarom de *expected value of perfect information* groter is dan de *expected value of information* van het inhuren van het marketing bedrijf.

Opgave 2

Beschouw een beslisprobleem met de beslisvariabele $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$, $n \geq 1$, en de kansvariabele $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $m \geq 1$; de mogelijke opbrengsten van het beslisprobleem zijn beschreven door de functie $r(D, C)$ met $r(d_i, c_j) \neq r(d_k, c_l)$ voor alle $i, k = 1, \ldots, n, i \neq k$ en alle $j, l = 1, \ldots, m, j \neq l$.

a. Zij d_i de beste beslissing voor het beslisprobleem volgens het maximin besliscriterium; zij d_j de beste beslissing volgens het maximax criterium. Wordt de beslissing d_i deterministisch gedomineerd door de beslissing d_j? Verklaar je antwoord.

b. Geef een voorbeeld van een kansverdeling $\Pr(C)$ over de kansvariabele C waarvoor geldt dat met het maximax besliscriterium en met het Bayes criterium voor het gegeven beslisprobleem dezelfde beslissing wordt geselecteerd.

Opgave 3

Bart is tweedejaars student wiskunde en staat inmiddels bovenaan de wachtlijst voor een studentenkamer. Hij moet besluiten of hij nu daadwerkelijk op kamers wil. Op kamers gaan wonen brengt extra kosten met zich mee zoals voor huur en voor levensonderhoud, maar levert ook extra geld op door een studiebeurs en een bijdrage van z'n ouders. Op dit moment heeft Bart wel een OV-kaart maar reist hij met de auto omdat hij dat comfortabeler vindt; deze extra kosten zouden wegvallen als Bart op kamers gaat of als hij thuis blijft wonen en besluit voortaan met de trein te gaan. Bart schat in dat deze laatste optie de goedkoopste optie is en dat andere opties hem maximaal 200 euro per maand extra gaan kosten. Een ander attribuut dat meeweegt in Bart z'n beslissing is de hoeveelheid tijd die hij dagelijks in totaal kwijt zal zijn aan reizen en voor zichzelf zorgen (boodschappen, koken, etc.).

Bart wil een utiliteitsfunctie $u(C, T)$ schatten voor de extra kosten C (tussen 0 en 200 euro) en de tijd T (tussen 1.0 en 3.0 uur) die de verschillende alternatieven met zich mee zullen brengen. Als wiskundige besluit Bart dat, als hij 3 uur per dag kwijt is met reizen en/of voor zichzelf zorgen, zijn utiliteitsfunctie voor de extra kosten de volgende vorm heeft:

$$u(C, 3.0) = e^{-\frac{1}{50} \cdot C}$$

Bart schat tevens een iso-preferentie (indifferentie) curve $c(T)$ met een utiliteit van 0.2, d.w.z. $u(c(T), T) = 0.2$.

a. Bereken de *risico-aversie functie* voor de utiliteitsfunctie $u(C, 3.0)$. Is Bart wat betreft de kosten risico aversief of risico zoekend? En in welke mate is hij dat (toenemend, afnemend, of constant)? Verklaar je antwoord.

b. Veronderstel dat Bart aanneemt dat de attributen C en T *additief onafhankelijk* zijn. Laat zien dat Bart z'n complete utiliteitsfunctie als volgt opgebouwd kan worden:

$$u(C, T) = u(C, 3.0) - u(c(T), 3.0) + 0.2$$

Welke extra aannamen heb je hierbij moeten gebruiken?

c. Zij (150, 1.0) een punt in $C \times T$ dat deel uitmaakt van de iso-preferentie curve $c(T)$. Bereken de utiliteit van de volgende loterij, gebruikmakend van Bart z'n utiliteitsfunctie $u(C, T)$:

$$[0.5, (200, 1.0); 0.5, (0, 3.0)]$$

Opgave 4

Beschouw twee attributen X en Y.

a. Veronderstel dat X en Y wederzijds utiliteit-onafhankelijk zijn en dat de volgende informatie gegeven is:

   1. een conditionele utiliteitsfunctie $u(X, y_l)$ voor een vaste waarde y_l van Y;
   2. een conditionele utiliteitsfunctie $u(x_k, Y)$ voor een vaste waarde x_k van X;
   3. de utiliteit van een punt (x_s, y_t), waarbij $x_s \neq x_k$ een waarde van X is en $y_t \neq y_l$ een waarde van Y.

   Leg uit hoe uit deze informatie de utiliteit $u(x_i, y_j)$ voor willekeurige waarden x_i van X en y_j van Y afgeleid kan worden.

b. Veronderstel nu dat X en Y bovendien additief onafhankelijk zijn. Leg uit waarom van bovenstaande informatie de utiliteit van een punt (x_s, y_t) niet meer nodig is om een willekeurige utiliteit $u(x_i, y_j)$ te bepalen.

Hertentamen Besliskunde

7 mei 2003, 14:00 - 17:00 uur

Het tentamen bevat vier opgaven. Met elk onderdeel is 10 punten te verdienen; in totaal kunnen 100 punten verkregen worden.

Succes!

Opgave 1 (20 punten)

Viola overweegt een rechtzaak aan te spannen tegen het tijdschrift *Privézaken*. Viola kan de rechtzaak laten voorkomen, of ze kan schikken voor € 40 000. Als ze besluit om de zaak te laten voorkomen, dan heeft ze een kans van 0.30 dat ze de rechtzaak wint. Als ze wint, dan is het even waarschijnlijk dat ze € 90 000 krijgt toegewezen als dat ze € 360 000 krijgt toegewezen. Welke beslissing Viola ook neemt, haar kosten zijn altijd dezelfde.

a. Veronderstel dat Viola een toename van haar kapitaal met € x waardeert volgens de functie $u(x) = \sqrt{x}$. Moet ze de zaak dan laten voorkomen, of kan ze beter besluiten te schikken ?

b. Veronderstel nu dat Viola risico-neutraal is. Viola heeft de mogelijkheid om een juridisch expert in te huren. Deze expert doet met een kans van 0.90 een correcte voorspelling over winst danwel verlies van Viola's rechtzaak als deze zou voorkomen. Wat is het hoogste honorarium waarbij Viola nog zou moeten besluiten om deze expert in te huren?

Opgave 2 (30 punten)

Beschouw een beslisprobleem met de beslisvariabele $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$, $n \geq 1$, en de kansvariabele $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $m \geq 1$, met de bijbehorende kansverdeling $\Pr(C)$; de mogelijke opbrengsten van het probleem zijn beschreven door de functie $r(D, C)$.

a. Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder het maximin besliscriterium en het maximax criterium dezelfde beslissing prefereren. Verklaar uw antwoord.

b. Zij d_i de beste beslissing voor het beslisprobleem volgens het Bayes besliscriterium, en zij d_j de beste beslissing volgens het maximax criterium. Wordt de beslissing d_i deterministisch gedomineerd door de beslissing d_j? Verklaar uw antwoord.

c. Veronderstel nu dat de kansvariabele C eigenlijk een continue variabele is. Voor het discretiseren van zo'n continue kansvariabele wordt vaak gebruik gemaakt van de *Pearson-Tukey methode*. Een alternatieve methode is de *Swanson-Megill methode*. Deze methode construeert, net als de Pearson-Tukey methode, een driepuntsbenadering van de kansverdeling over een continue variable. Met de Swanson-Megill methode worden echter de volgende kansen aan de volgende waarden toegekend:

   – de mediaan krijgt de kans 0.4;
   – het 10de percentiel krijgt de kans 0.3;
   – het 90ste percentiel krijgt de kans 0.3.

   Schets een voorbeeld van een kansverdeling waarbij de toepassing van de Pearson-Tukey methode en van de Swanson-Megill methode in een andere verwachte waarde voor de kansvariabele zullen resulteren. Verklaar uw antwoord.

Opgave 3 (30 punten)

Beschouw het FA (Film Aanbeveling) systeem dat draait bij een videotheek. Iedere keer als een klant een film terugbrengt kan hij/zij een *score* (0 tot 5 sterren) voor de gehuurde film in het systeem invoeren. Het systeem kan op basis van de scores die een klant gegeven heeft voor verschillende films bepalen wat voor 'soort' klant het is en door te vergelijken met 'soortgelijke' klanten voorspellen hoe de klant een nog niet door hem/haar gehuurde film zou scoren. Gebruikmakend van voorspelde scores kan het FA systeem een lijstje te huren films aan de klant suggereren; alleen films waarvan de score groter dan of gelijk aan een klantgebonden *drempelwaarde* is komen in dit lijstje voor.

a. Om te bepalen hoeveel waarde een klant hecht aan de scores die films krijgen, wordt voor elke klant i een utiliteitsfunctie $U_i(S)$ over de scores bepaald. Karel is klant bij de videotheek en zijn utiliteitsfunctie ziet er als volgt uit:

$$U_{\text{Karel}}(0 \text{ sterren}) = 0.00 \qquad U_{\text{Karel}}(3 \text{ sterren}) = 0.60$$
$$U_{\text{Karel}}(1 \text{ sterren}) = 0.15 \qquad U_{\text{Karel}}(4 \text{ sterren}) = 0.85$$
$$U_{\text{Karel}}(2 \text{ sterren}) = 0.35 \qquad U_{\text{Karel}}(5 \text{ sterren}) = 1.00$$

   – Welk risico gedrag (zoekend, aversief, neutraal, of combinaties hiervan) volgt uit de utiliteitsfunctie van Karel. Verklaar je antwoord.
   – De utiliteitsfunctie van Karel kan gebruikt worden om zijn klantgebonden drempelwaarde te bepalen. Geef aan wat een geschikte drempelwaarde voor Karel lijkt te zijn. Verklaar je antwoord.

b. Veronderstel dat de videotheek films in drie prijsklassen verhuurt: € 2, € 5, en € $7\frac{1}{2}$. Het FA systeem wil expliciet de prijs van de film in de utiliteitsfunctie van een klant meenemen. We hebben dus voor iedere klant i een twee-attribuut functie $U_i(S, P)$ over scores en prijzen van films. Karel heeft niet veel te besteden en zal bij films met een gelijk aantal sterren altijd voor de goedkoopste gaan.

– Welke vorm van utiliteitonafhankelijkheid spelen er voor Karel in dit domein waarschijnlijk een rol?

A. S is utiliteitonafhankelijk van P
B. P is utiliteitonafhankelijk van S
C. S en P zijn wederzijds utiliteitonafhankelijk
D. geen van deze eigenschappen geldt

Verklaar je keuze.

– Gegeven je vorige antwoord, wat is een algemeen functievoorschrift voor $U_{\text{Karel}}(S, P)$ dat hier goed bij past?

c. Leonie is ook klant bij de videotheek. Om haar utiliteitsfunctie over scores en prijs te bepalen wordt gebruik gemaakt van twee iso-preferentie curves $s_1(P)$ en $s_2(P)$. Bij de curve $s_1(P)$ behoort een utiliteit van 0.4 en bij $s_2(P)$ een utiliteit van 0.7. Van deze curves zijn de volgende punten bekend:

$s_1(€\ 2) = 1$ ster	$s_2(€\ 2) = 3$ sterren
$s_1(€\ 5) = 1$ ster	$s_2(€\ 5) = 4$ sterren
$s_1(€\ 7\frac{1}{2}) = 3$ sterren	$s_2(€\ 7\frac{1}{2}) = 5$ sterren

Veronderstel dat voor Leonie de attributen S en P *additief* onafhankelijk zijn. Bereken de utiliteit van een film met 1 ster voor $7\frac{1}{2}$ euro ($U_{\text{Leonie}}(1, 7\frac{1}{2})$).

Opgave 4 (20 punten)

De brandweer van Sydney krijgt ieder jaar te maken met bosbranden aan de rand van de stad. Deze branden kunnen bestreden worden op het moment dat ze optreden, maar kunnen ook tot op zekere hoogte voorkomen worden door de bossen rond de stad te kappen of al het groen gecontroleerd weg te branden. De burgemeester van Sydney moet besluiten welke van de *alternatieven* (niets doen, kappen, wegbranden), die schade door brand zouden kunnen beperken, het beste is. Met de keuze moeten vier (tegenstrijdige) *doelen* bereikt worden: de kosten moeten zo laag mogelijk zijn, bij brand mogen zo min mogelijk huizen en hun bewoners gevaar lopen, bij brand mogen zo min mogelijk brandweerlieden gevaar lopen, en er mag zo min mogelijk schade aan de natuur aangebracht worden. Merk op dat schade aan de natuur kan ontstaan zowel door brand, gecontroleerd wegbranden, als door kappen.

a. Het *Analytic Hierarchy Process* (AHP) wordt gebruikt om de burgemeester bij zijn beslissing te helpen. AHP maakt o.a. gebruik van *pairwise comparison matrices* om het beste alternatief te bepalen.

Hoeveel pairwise comparison matrices zijn er nodig om het bovenstaande beslisprobleem op te lossen en wat zijn de afmetingen van deze matrices? Verklaar je antwoord.

b. Gegeven zijn de volgende matrices A en B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 1/9 & 3 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1/9 & 4 \\ 1/5 & 3 & 9 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

– Bepaal, zonder berekeningen, door inspectie van de matrix of A consistent is. Verklaar je antwoord.

– De gewichtenvector voor B is $\mathbf{w} = [0.154, 0.640, 0.206]$. Bereken de *consistency index* CI voor B. Is matrix B consistent?

Cursus INFBK
Naam Besliskunde
Collegejaar 2002 − 2003

Student	Toetsdatum	TentRes.	Taak	Eindres.	Opmerkingen	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b
1	27−02−03	6.1	8.5	7.0		10	7	10	5	5		10	4	0	5	5
2	27−02−03	4.0	4.6	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	5	10	5	0		8	2	0	−	−
2	07−05−03	5.6		5.0	hertent.	10	7		10	0	3	8	10	0	2	6
3	27−02−03	4.8	6.3	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	2	10	5	10		7	2	2	−	0
3	07−05−03	5.1		6.0	hertent.	10	1		0	0	2	8	10	0	10	10
4	27−02−03	2.7	6.3	Onvoltooid	Tent. < 5.0	5	0	0	0	0		10	3	4	0	5
4	07−05−03	2.9		Onvoltooid	hertent. < 5.0	3	3		5	0	0	4	0	0	4	10
5	27−02−03	3.2	−	Onvoltooid	geen taak	10	0	5	10	5		2	−	−	−	−
5	07−05−03	4.0	−	Onvoltooid	hertent.	10	3		0	3	0	10	2	0	2	10
6	27−02−03	−	−	−	niet gedaan											
7	27−02−03	9.2	9.7	9.0		10	10	10	10	10		2	10	10	10	10
8	27−02−03	7.2	9.2	8.0		10	5	10	10	10		3	−	9	10	5
9	27−02−03	5.5	8.5	6.5		10	7	10	0	3		10	2	3	5	5
10	27−02−03	3.9	6.0	Onvoltooid	Tent. < 5.0	5	5	5	5	10		−	−	−	4	5
11	27−02−03	6.1	6.9	6.5		10	5	10	0	10		0	2	4	10	10
12	27−02−03	8.6	6.9	8.0		10	10	10	5	5		10	10	10	6	10
13	27−02−03	9.0	6.0	8.0		10	5	10	10	10		10	10	5	10	10
14	27−02−03	3.1	7.6	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	0	5	3	3		10	−	−	0	0
15	27−02−03	5.9	5.6	6.0		5	2	10	10	10		7	0	10	0	5
16	27−02−03	9.1	9.2	9.0		10	10	10	10	10		10	2	9	10	10
17	27−02−03	4.7	6.1	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	3	10	5	5		6	0	8	0	0
17	07−05−03	6.6		6.5	hertent.	3	7		5	5	0	8	10	10	8	10
18	27−02−03	4.3	6.7	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	2	0	5	5		10	0	1	5	5
18	07−05−03	4.6		Onvoltooid	hertent. < 5.0	4	4		3	1	1	8	3	10	2	10
19	27−02−03	8.2	6.1	7.5		10	10	10	10	10		10	2	0	10	10
20	27−02−03	5.6	6.4	6.0		10	5	0	10	−		10	10	10	1	0
21	27−02−03	5.9	6.7	6.0		10	5	10	10	5		7	2	5	5	0
22	27−02−03	5.3	6.5	6.0		5	2	10	10	3		10	10	3	0	−
23	27−02−03	6.9	7.9	7.5		10	2	10	5	5		10	3	4	10	10
24	27−02−03	4.5	6.0	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	2	10	3	10		8	2	0	−	0
24	07−05−03	6.2		6.0	hertent.	10	3		3	10	5	6	10	0	8	7
25	27−02−03	7.0	7.8	7.5		10	5	10	0	10		10	3	10	2	10
26	27−02−03	4.3	6.5	Onvoltooid	Tent. < 5.0	5	0	10	0	3		3	2	0	10	10
26	07−05−03	6.0		6.0	hertent.	5	1		10	10	8	6	5	0	8	7
27	27−02−03	5.8	5.9	6.0		10	4	5	10	5		10	4	0	5	5
28	27−02−03	6.5	5.9	6.5		10	7	10	10	10		3	4	2	4	5
29	27−02−03	5.7	5.9	6.0		10	2	10	5	0		8	3	8	6	5
30	27−02−03	−	6.2	Onvoltooid	geen tent.											
30	07−05−03	4.5		Onvoltooid	hertent. < 5.0	3	0		10	10	3	5	5	0	1	8
31	27−02−03	−	−	−	niet gedaan											
32	27−02−03	5.9	7.9	6.5		10	7	10	0	5		10	2	4	6	5
33	27−02−03	3.9	5.9	Onvoltooid	Tent. < 5.0	10	2	10	3	−		7	3	4	−	0
33	07−05−03	3.9		Onvoltooid	hertent. < 5.0	10	2		8	1	1	8	3	0	2	4

34	27-02-03	-	-	-	niet gedaan											
35	27-02-03	2.8	6.2	Onvoltooid	Tent. < 5.0	0	0	10	5	-		3	-	-	10	0
35	07-05-03	7.7		7.0	hertent.	10	10		5	10	3	6	5	10	8	10
36	27-02-03	9.5	7.8	9.0		10	10	10	10	10		10	10	10	10	5

aantal deelnemers dat vak heeft gehaald in dit studiejaar: 25
aantal deelnemers dat vak niet heeft gehaald: 7
aantal inschrijvers dat geen tentamen en/of taak heeft gedaan: 4

	taak:	1ste	2de
percentage ingeleverd werk met voldoende cijfer:	94%	50%	36%

Besliskunde

vraag 1 Vond je het vak relevant voor je studie?

1	niet	x	
2		x	
3		2 x	**
4		2 x	**
5	wel	1 x	*

vraag 2 Vond je het vak leuk?

1	niet	x	
2		1 x	*
3		1 x	*
4		2 x	**
5	wel	1 x	*

vraag 3 Hoeveel hoorcolleges heb je bezocht?

1	0-2	x	
2	3-5	x	
3	6-8	2 x	**
4	9-11	3 x	***
5	>11	x	

vraag 5 Hoe waren de praktische aspecten georganiseerd (beschikbaarheid literatuur, website, cijferregelingen enz)?

1	slecht	x	
2		1 x	*
3		1 x	*
4		2 x	**
5	goed	1 x	*

vraag 6 Had je genoeg voorkennis?

1	niet	x	
2		x	
3		x	
4		1 x	*
5	wel	3 x	***

vraag 7 Hoe vond je de gebruikte literatuur?

1	onduidelijk	x	
2		x	
3		x	
4		4 x	****
5	duidelijk	1 x	*

vraag 8 Werd het hoorcollege duidelijk gegeven?

1	onduidelijk	x	
2		x	
3		3 x	***
4		2 x	**
5	duidelijk	x	

vraag 9 Hoe was de presentatie van de docent?

1	saai	x	
2		x	
3		5 x	*****
4		x	
5	boeiend	x	

vraag 10 Heeft het werkcollege geholpen om de stof beter te begrijpen?

1	niet	x	
2		x	
3		2 x	**
4		2 x	**
5	veel	x	

vraag 11 Hoe was de begeleiding op het werkcollege?

1	slecht	x	
2		1 x	*
3		2 x	**
4		1 x	*
5	goed	x	

vraag 12 Heb je iets zinvols geleerd van het practicum?

1	nee	x	
2		x	
3		1 x	*
4		3 x	***
5	ja	1 x	*

vraag 13 Hoe was de begeleiding op het practicum?

1	slecht	1 x	*
2		x	
3		4 x	****
4		x	

5	goed	x	

vraag 14		Vond je de vraagstelling op het tentamen (of eindopdracht) redelijk?
1	nee	x
2		x
3		1 x *
4		3 x ***
5	ja	1 x *

Opmerkingen over het aantal uur

110
100
100
80

Opmerkingen over de organisatie vak

boek pas laat leverbaar [2000/ica]

Boek arriveerde door fout A-eskwadraat en onduidelijk toelichting docenten veel te laat. [2000/ica]

Opmerkingen over de literatuur

Boek had een groot blabla-gehalte, maar was dus wel makkelijk te lezen. Sommige tekstdelen van de slides waren na het uitprinten/kopieren erg slecht te lezen, dus misschien dat hier een andere kleur gebruikt kan worden. [1999/ica]

Slides waren goed, maar het nut van het boek was me niet helemaal duidelijk: de tentamenvragen waren allemaal oplosbaar zonder het boek te kennen. [2000/ica]

Opmerkingen over het hoorcollege

Linda geeft veel duidelijker college dan Silja. (sorry) [2000/ica]

De ene docent kon het erg duidelijk de ander niet [2000/ica]

Opmerkingen over het werkcollege

De opgaven waren niet moeilijk, maar het waren er veel. [1999/ica]

Duffe lui die weinig stuurden [2000/ica]

Opmerkingen over het practicum

Zeer nuttig. Zeker in het vak houden! [1999/ica]

Misschien was een voorbeeld van een uitgewerkt beslisprobleem handig geweest om de bedoeling van de opdracht duidelijk te maken. [2000/ica]

Practicum opdracht was erg vaag. Je wist niet goed wat er nu precies van je verwacht werd [2000/ica]

waren niet echt practicumuren in de universiteit. Maar als je problemen had kon je mailen en die uitleg was goed. [2000/ica/2]

Opmerkingen over het tentamen

De tentamenopgaven kwamen niet echt overeen met wat we op het werkcollege hebben gehad. Dit was een stuk moeilijker, maar wel goed te doen. [1999/ica]

Opmerkingen over wat er behouden moet blijven

Practicum, werkcollege. Vele voorbeelden, vaak een niet echt vrolijk onderwerp overigens. [1999/ica]

het "practicum". Past erg bij de stof en is leerzaam [2000/ica/2]

Opmerkingen over wat er moet veranderen

Sneller door het eerste gedeelte heen gaan, zodat er meer stof behandeld kan worden. Bij dit vak had ik voor het eerst het idee dat het een makkelijk vak was. Zeker omdat het tempo niet al te hoog lag en de stof niet moeilijk was. [1999/ica]

Opmerkingen over onderwerpen die men had verwacht

Iets meer de managementkant van besliskunde. Wat doen managers/bedrijfskundigen in bepaalde onzekere situaties? Dat komt vaak niet overeen met welke keuze medici maken. [1999/ica]

Bijlage C

Afstudeerverslagen

De onderstaande afstudeerverslagen zijn niet bijgesloten; exemplaren kunnen ingezien worden bij mijzelf of de tutor.

- M.A. Tas, *Vergelijking van κ-waarde-georiënteerde theorieën met het formalisme van de probabilistische netwerken*. November 1998 (CKI).
  (eindcijfer: ■)

- P.S. Pardieck, *Kappa Networks: combining kappa calculus with a graphical representation*. Januari 2002 (CKI).
  (eindcijfer: ■)

- J.H. Bolt, *Kwalitatieve probabilistische netwerken: verhoging van de informativiteit bij non-monotonie*. December 2002 (CKI).
  (eindcijfer: ■)

- F.A. van Kouwen, *Kwalitatieve modellen voor interactieve milieubeleidsadvisering*. Augustus 2003 (INF).
  (eindcijfer: ■)