

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

**Analyse microlocale et globale
en théorie des champs sur espace-temps courbe**

présenté à l'Université Grenoble Alpes par

Michał Wrochna

soutenu le 13 décembre 2018 après avis de :

Frédéric HÉLEIN Université Paris 7
Stefan HOLLANDS Universität Leipzig
András VASY Stanford University

devant le jury composé de :

Colin GUILLARMOU Université Paris-Sud 11
Jérémy FAUPIN Université de Lorraine
Christain GÉRARD Université Paris-Sud 11
Dietrich HÄFNER Université Grenoble Alpes
Frédéric HÉLEIN Université Paris 7
Jérémie SZEFTTEL Université Paris 6

Table des matières

Introduction	7
Travaux présentés	10
Chapitre 1. Construction pseudodifférentielle d'états de Hadamard	14
1. Champs scalaires sur espace-temps courbes	14
1.1. Espaces-temps globalement hyperboliques	14
1.2. Équation de Klein-Gordon et analyse microlocale	15
1.3. Champs quantiques linéaires	16
1.4. Front d'onde	17
1.5. États de Hadamard	18
2. Travaux [Wr1] et [Wr5] : Construction d'états de Hadamard	20
2.1. Hypothèses géométriques	20
2.2. Résultat principal	23
2.3. Construction de paramétrix pour l'évolution	24
Chapitre 2. Théories de jauge sur espace-temps courbes	26
1. Travail [Wr2] : États de Hadamard en théorie de Yang-Mills	26
1.1. Introduction	26
1.2. Équations de Yang-Mills	27
1.3. Hypothèses sur le fond	29
1.4. Résultat principal de [Wr2]	29
2. Travail [Wr4] : Formalisme BRST en espace-temps courbe	30
2.1. Introduction au formalisme BRST	30
2.2. Résultat principal de [Wr4]	31
2.3. Dégénération de la forme symplectique	32
2.4. États de Hadamard dans le formalisme BRST	33
Chapitre 3. États de vide asymptotiques	35
1. Travail [Wr3] : Problème de Cauchy caractéristique	36
1.1. Intérieurs de cônes	36
1.2. Problème de Cauchy caractéristique	37
1.3. Condition de Hadamard en termes de données caractéristiques	38
1.4. Calcul pseudo-différentiel de type produit	39
1.5. Construction d'états de Hadamard	40
2. Travaux [Wr10] et [Wr11] : Estimées de propagation radiales	41
2.1. Espaces asymptotiquement Minkowski	42
2.2. Inverses de P et espaces de phase	46
2.3. Scattering géométrique et états de Hadamard	47
2.4. Espace asymptotiquement de Sitter et extension conforme	48
2.5. Scattering géométrique sur l'espace de Sitter	52

3. Travail [Wr6] : Scattering et calcul Ψ DO dépendent du temps	54
3.1. État de vide asymptotique dans un cas modèle	54
3.2. Espace-temps asymptotiquement statiques	56
3.3. Théorie de diffusion et diagonalisation approximée	57
Chapitre 4. Propagateurs de Feynman globaux	59
1. Travaux [Wr7] et [Wr12] : Inverse de Feynman par scattering	61
1.1. Espaces asymptotiquement Minkowski	61
1.2. L'inverse de Feynman de P	61
2. Travail [Wr10] : Inverse de Feynman par estimées de propagation	63
2.1. Régularité des fonctions propres	63
Chapitre 5. Projecteurs de Calderón et rotation de Wick	64
1. Travail [Wr9] : Projecteurs de Calderón et rotation de Wick	64
1.1. Condition de Hadamard analytique	64
1.2. Construction par rotation de Wick	65
2. Travail [Wr13] : Rotation de Wick en deux variables	67
2.1. Motivation	67
2.2. Cadre géométrique pour rotation de Wick et résultat principal	68
Chapitre 6. Anti de Sitter et holographie	70
1. Travail [Wr8] : Champs linéaires sur espaces asymptotiquement AdS	72
1.1. Équation de Klein-Gordon sur espaces asymptotiquement AdS	72
1.2. Condition de Hadamard holographique	74
1.3. Théorie induite sur le bord conforme	76
2. Travail [Wr14] : Mécanisme holographique pour champs linéaires	77
2.1. Holographie en théorie des champs	77
2.2. Un mécanisme classique pour l'holographie	77
Bibliographie	80

Ταῦτα δὲ ἐγένετο μὲν οὐδέποτε, ἔστι δὲ αἰί
Saloustios, *De diis et mundo* IV,9 (Rochefort)

Remerciements

Je suis profondément reconnaissant à Frédéric Hélein, Stefan Hollands et András Vasy, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire. Je tiens aussi à remercier Jérémy Faupin, Christian Gérard, Colin Guillarmou, Dietrich Häfner et Jérémie Szeftel, qui ont accepté de participer au jury de ma soutenance.

J'ai beaucoup appris en travaillant avec Christian Gérard et András Vasy, que je remercie doublement pour m'avoir introduit à tout un spectre de techniques mathématiques, toujours avec grande patience et bienveillance. Je suis également reconnaissant à mes collaborateurs Wojciech Dybalski, Oran Gannot, Omar Oulghazi et Jochen Zahn pour tous les échanges et les discussions enrichissantes. J'ai aussi énormément profité de nombreuses discussions particulièrement avec Nguyen Viet Dang, Yves Colin de Verdière, Dietrich Häfner, Peter Hintz, Alexander Strohmaier et Françoise Truc, que je tiens à remercier très chaleureusement.

J'ai toujours pu compter sur ma directrice de thèse de doctorat, Dorothea Bahns, que je remercie pour le soutien apporté au cours de toutes ces années. Je ne peux remercier assez mon encadrant de master, Jan Dereziński, qui m'a introduit au monde de la physique mathématique et m'a toujours beaucoup inspiré et encouragé.

Je remercie mes collègues à l'Institut Fourier pour leur accueil très chaleureux, l'ambiance conviviale et toutes les activités et discussions stimulantes. Autant sur le plan scientifique que personnel, je suis redevable à tout un nombre de mes collègues du thème Physique Mathématique et au delà qui sauront se reconnaître. Un grand merci !

Je ne saurais conclure sans remercier à ma famille pour son affection et son soutien inconditionnel ainsi qu'à mes amis proches pour leur présence bienveillante et leur entrain.

Introduction

La théorie quantique des champs sur espace-temps courbe décrit des champs quantiques relativistes qui propagent sur une variété lorentzienne issue des lois classiques de la Relativité Générale. En supposant que l'influence du champs quantique sur l'espace-temps est négligeable, on obtient les fondements d'une théorie que l'on croit être une approximation à basse énergie d'une théorie hypothétique de gravité pleinement quantifiée. Bien que les degrés de liberté géométriques ne soient pas quantifiés, la théorie prédit des effets quantiques inattendus, tels que l'effet Unruh [149] et l'effet Hawking [79], qui ont largement étonné la communauté scientifique dans les années 1970.

La théorie s'appuie sur les principes de localité et de causalité, et à petite échelle elle doit nécessairement être cohérente avec la théorie des champs sur l'espace-temps plat de Minkowski, sur laquelle est basée notre connaissance de la physique des particules. Néanmoins, des aspects globaux entrent en jeu et leur interaction avec les conditions locales sont à l'origine d'effets quantiques induits par la géométrie.

Il a fallu de longs travaux pour comprendre comment démêler les problèmes issus de la configuration particulière du système quantique des aspects universels liés à la géométrie locale. Une étape essentielle a été d'incorporer le principe de causalité (qui est une condition sur le commutateur de champs quantiques) dans un formalisme où il devient une conséquence de la vitesse de propagation finie pour l'équation du champ classique (équation d'onde, de Klein-Gordon, Dirac, etc.). Au niveau de l'analyse de ces équations aux dérivées partielles, l'ingrédient clé sont le *propagateur retardé* et le *propagateur avancé*, qui sont des objets étroitement liés au problème de Cauchy.

Cela fixe une structure de *relations de commutation (ou d'anti-commutation) canoniques*, qui peut se codifier en termes d'une $*$ -algèbre. L'ambiguïté dans le choix de champs quantiques linéaires obéissant ces relations de commutation se ramène alors à un choix d'*état*. Ce choix a des implications physiques considérables : il donne un sens précis à la notion de particules et aux anti-particules, et il fournit une théorie libre sur laquelle on peut baser une théorie perturbative d'interaction (non linéaire). Sur l'espace de Minkowski, l'*état de vide*, défini comme l'état maximalement symétrique, donne un choix canonique et donc une interprétation non ambiguë de ce que sont les particules et les anti-particules. En absence de symétries, par contre, il n'y a pas forcément d'état canonique, ce qui semble remettre en cause l'interprétation même de la théorie. L'idée qui a émergé entre autres des travaux de Ashtekar [2], Kay [107] et Sewell [146], est qu'il faut plutôt considérer une classe d'états avec des propriétés physiques différentes, mais qui ressemblent

tous à l'état de vide à courtes distances. Cela a amené à formuler ce qu'on appelle la *condition de Hadamard*, qui précise le comportement à courtes distances demandé des *fonctions à deux points* qui définissent l'état [112].

Les implications de la condition de Hadamard ont été étudiées en détail depuis cela, aboutissant aujourd'hui à une bonne compréhension des aspects locaux de la théorie des champs sur espace-temps courbe. En particulier, un résultat clé dû à Radzikowski a permis de reformuler la condition de Hadamard comme une condition microlocale sur le front d'onde de noyaux de Schwartz de bi-solutions [133], et de faire le lien avec la théorie des opérateurs intégraux de Fourier de Duistermaat et Hörmander [48]. L'analyse basée sur le front d'onde a rendu possible la construction rigoureuse de la théorie perturbative des champs en interaction dans les années 2000, établie dans les travaux de Brunetti et Fredenhagen [25] et Hollands et Wald [84, 85].

Le point de départ des travaux présentés dans ce mémoire est l'observation que les outils d'analyse microlocale comme le front d'onde et les intégrales oscillantes ne suffisent pas pour étudier les questions où les aspects globaux sont importants. Le problème principal est qu'afin de pouvoir définir un produit scalaire hilbertien, les fonctions à deux points doivent vérifier une condition de *positivité* : la difficulté à assurer ce type de propriété globale exactement (plutôt que modulo des termes régularisants) pour des opérateurs de Fourier intégraux a déjà été constatée par Duistermaat et Hörmander [48] et est liée à la géométrie à l'infini spatial. À cela s'ajoutent les problèmes spécifiques au cadre considéré. Par exemple, la construction d'états de Hadamard distingués par des propriétés asymptotiques demande de contrôler la régularité C^∞ des solutions à partir d'informations à l'infini temporel. D'autres difficultés sont présentes dans le cas d'un bord à l'infini spatial, d'où des singularités des solutions peuvent se propager.

Les travaux présentés développent des outils d'analyse microlocale et globale dans le but de surmonter ces difficultés. Les résultats comprennent l'existence et la propriété de Hadamard des *états de vide asymptotiques* dans des situations géométriques différentes. Un autre travail donne une formulation rigoureuse de la *théorie des champs sur espaces asymptotiquement anti de Sitter* dans le cas scalaire et sans interaction. Finalement, différents résultats discutés ici fournissent une preuve de phénomènes de type «local-to-global» : la *propriété de Reeh-Schlieder* sur des espaces-temps analytiques, ainsi qu'un isomorphisme entre les observables dans un espace asymptotiquement anti de Sitter et une théorie sur son bord conforme, ce qui s'interprète comme un résultat rigoureux d'*holographie*.

Tous ces ingrédients pourront être utilisés dans le futur pour s'attaquer à des problèmes ouverts en théorie des champs sur espaces-temps de type trou noir en rotation, et possiblement donner une formulation rigoureuse de théorie perturbative d'interaction sur des espace-temps comme anti de Sitter.

Bien que le contexte physique considéré ici soit toujours celui de la théorie des champs sur espace-temps courbe, les situations géométriques particulières et la nature différente des problèmes mentionnés motivent l'usage

de techniques diverses. En particulier, les résultats font usage des outils suivants :

- les *variétés à géométrie bornée* et le *calcul pseudo-différentiel* uniforme dans ce cadre ([Wr5], [Wr6]),
- la *théorie de la diffusion* en relation avec des phénomènes à haute fréquence ([Wr6], [Wr7], [Wr12]),
- les *estimées de propagation* près de *points radiaux* ([Wr10], [Wr11]),
- la géométrie de *compactifications d'espace-temps* ([Wr10], [Wr11], [Wr3]), ainsi que le *problème de Cauchy caractéristique* ([Wr3]),
- le *b-calculus* de Melrose ([Wr10], [Wr8], [Wr14]),
- les *problèmes elliptiques sur variétés à bord* et le *projecteur de Calderón* ([Wr9], [Wr13]),
- le *front d'onde analytique* et sa caractérisation en termes de valeurs au bord de fonctions holomorphes ([Wr9], [Wr13]),
- les théorèmes de continuation unique à travers une surface, comme le *théorème d'Holmgren* ([Wr14]),
- les aspects *C^* -algébriques* de la théorie des champs ([Wr14]).

Un thème commun qui relie les outils ici les plus essentiels est le mariage de techniques microlocales à l'analyse asymptotique, ainsi que le développement d'approches globales à des problèmes non elliptiques. Cela s'inscrit dans le cadre d'un programme plus large qui a déjà eu des succès considérables en Relativité Générale [153, 80] et en systèmes dynamiques [53, 54, 52], et a aussi récemment été appliqué à l'étude des ondes internes dans un milieu fluide stratifié [30, 55]. L'implémentation de ces méthodes en théorie des champs ouvre maintenant une nouvelle perspective et permettra de profiter plus pleinement des interactions avec toutes ces thématiques très variées en physique mathématique.

Travaux présentés

Les résultats présentés ont été obtenus dans les articles et prépublications suivants (listés en commençant par les plus récents).

- [Wr14] W. DYBALSKI, M. WROCHNA, A mechanism for holography for non-interacting fields on Anti-de Sitter spacetimes, [arXiv:1809.05123](#), (2018);
- [Wr13] M. WROCHNA, Wick rotation in two variables on analytic backgrounds, [arXiv:1711.04011](#), (2018);
- [Wr12] C. GÉRARD, M. WROCHNA, The massive Feynman propagator on asymptotically Minkowski spacetimes II, [arXiv:1806.05076](#), (2018);
- [Wr11] M. WROCHNA, Conformal extension of the Bunch-Davies state across the de Sitter boundary, [arXiv:1711.04011](#), (2017);
- [Wr10] A. VASY, M. WROCHNA, Quantum fields from global propagators on asymptotically Minkowski and extended de Sitter spacetimes, *Annales Henri Poincaré*, 19 (5), 1529-1586 (2018), [arXiv:1512.08052](#);
- [Wr9] C. GÉRARD, M. WROCHNA, Analytic Hadamard states, Calderón projectors and Wick rotation near analytic Cauchy surfaces, accepté dans *Communications in Mathematical Physics*, [arXiv:1706.08942](#), (2017);
- [Wr8] M. WROCHNA, The holographic Hadamard condition on asymptotically Anti-de Sitter spacetimes, *Letters in Mathematical Physics*, 107 (12), 2291-2331 (2017), [arXiv:1612.01203](#);
- [Wr7] C. GÉRARD, M. WROCHNA, The massive Feynman propagator on asymptotically Minkowski spacetimes I, accepté dans *American Journal of Mathematics*, (2016), [arXiv:1609.00192](#);
- [Wr6] C. GÉRARD, M. WROCHNA, Hadamard property of the *in* and *out* states for Klein-Gordon fields on asymptotically static spacetimes, *Annales Henri Poincaré*, 18 (8), 2715-2756 (2017), [arXiv:1609.00190](#);
- [Wr5] C. GÉRARD, O. OULGHAZI, M. WROCHNA, Hadamard states for the Klein-Gordon equation on Lorentzian manifolds of bounded geometry, *Communications in Mathematical Physics*, 352 (2), 519-583 (2017), [arXiv:1602.00930](#);
- [Wr4] M. WROCHNA, J. ZAHN, Classical phase space and Hadamard states in the BRST formalism for gauge field theories on curved spacetime, *Reviews in Mathematical Physics*, 29 (4), 1750004 (2017), [arXiv:1407.8079](#);

- [Wr3] C. GÉRARD, M. WROCHNA, Construction of Hadamard states by characteristic Cauchy problem, *Analysis & PDE*, 9 (1), (2016), [arXiv:1409.6691](#) ;
- [Wr2] C. GÉRARD, M. WROCHNA, Hadamard states for the linearized Yang-Mills equation on curved spacetimes, *Communications in Mathematical Physics*, 337 (1), (2015), [arXiv:1403.7153](#) ;
- [Wr1] C. GÉRARD, M. WROCHNA, Construction of Hadamard states by pseudo-differential calculus, *Communications in Mathematical Physics*, 325 (2), 713-755 (2013), [arXiv:1209.2604](#) ;

Les résultats présentés ont été obtenus dans la période d'août 2013 à septembre 2018, après ma thèse de doctorat. Une exception est l'article [Wr1], né en parallèle de ma thèse, mais qui n'en fait pas partie. Les articles issus de ma thèse ou antécédents sont omis dans ce mémoire (à savoir : [163], sur des problèmes d'énergie conservée non positive en théorie des champs avec potentiel électro-magnétique externe, [9] avec D. Bahns, sur la renormalisation par extension de distributions, et [39] avec J. Dereziński, sur les opérateurs de Schrödinger exactement solubles). Il en est de même pour l'article [40] avec J. Dereziński, qui traite des sujets très différents (analyse fonctionnelle abstraite dans les espaces de Banach) des thèmes abordés ici.

Le mémoire est organisé de façon suivante :

Contenu du Chapitre 1

Construction pseudo-différentielle d'états de Hadamard (travaux [Wr1] et [Wr5], en collaboration avec C. Gérard / O. Oulghazi)

La construction de champs quantiques linéaires repose sur l'existence de distributions en deux variables spatio-temporelles qui vérifient l'équation de Klein-Gordon, les *fonctions à deux points*. La difficulté en espace-temps courbe c'est qu'il est essentiel d'assurer en même temps une condition globale de positivité ainsi qu'une condition microlocale sur le front d'onde, la *condition de Hadamard*.

Dans [Wr1] et [Wr5] nous montrons une construction explicite basée sur une paramétrix pour l'équation de Klein-Gordon qui distingue entre fréquences positives et négatives. L'outil essentiel est le calcul pseudo-différentiel.

Ce chapitre contient aussi une brève introduction à la théorie des champs sur espace-temps courbe ; il contient les rappels et définitions importantes pour la suite.

Contenu du Chapitre 2

Théories de jauge sur espace-temps courbes (travaux [Wr2] et [Wr4], en collaboration avec C. Gérard / J. Zahn)

Les théories de jauge en espace-temps courbe présentent des difficultés absentes dans le cas plat. Le problème est lié au fait que les équations ne

sont pas hyperboliques, et que les procédures de réduction à une équation d'onde vectorielle nécessitent d'imposer des symétries difficiles à contrôler avec des méthodes purement microlocales.

Dans [Wr2], nous donnons néanmoins une construction d'état de Hadamard pour les équations de Maxwell et les équations de Yang-Mills linéarisés autour d'une solution non triviale. Le travail [Wr4] traite rigoureusement un procédé de réduction plus général, la méthode BRST, et fournit les ingrédients nécessaires à la quantification sur espace-temps courbe dans ce formalisme.

Contenu du Chapitre 3

États de vide asymptotiques (travaux [Wr3], [Wr6], [Wr10], [Wr11], incluant collaborations avec C. Gérard / A. Vasy)

Les articles [Wr3], [Wr6] et [Wr10] établissent l'existence, la pureté et la propriété de Hadamard des états de vide asymptotiques dans des situations géométriques différentes. Cela inclut le cas des espaces asymptotiquement Minkowski, asymptotiquement statiques et asymptotiquement de Sitter. Le travail [Wr11] étudie ce dernier cas en plus de détails sur l'exemple de l'espace de Sitter exact, et démontre que la construction donne l'état de Bunch-Davies et son prolongement à travers le bord conforme.

Contenu du Chapitre 4

Propagateurs de Feynman globaux (travaux [Wr7], [Wr12] et [Wr10], en collaboration avec C. Gérard / A. Vasy)

Dans les travaux [Wr7] et [Wr12] nous considérons des espace-temps de type asymptotiquement Minkowski. Nous démontrons que l'opérateur de Klein-Gordon est inversible comme opérateur entre deux espaces de Hilbert choisis de façon à ce que l'inverse ait un front d'onde de type Feynman. Cela fournit une construction rigoureuse de propagateur de Feynman global dans le cas massif. Le travail [Wr10] contient aussi un résultat de régularité de fonctions propres dans le cas sans masse.

Contenu du Chapitre 5

Projecteurs de Calderón et rotation de Wick (travaux [Wr9] et [Wr13], incluant collaboration avec C. Gérard)

L'article [Wr9] démontre l'existence et donne une construction générale d'états de Hadamard analytiques. La démonstration fait usage d'une réduction à un problème elliptique par *rotation de Wick* (sans hypothèses de staticité), et est basée sur la notion de *projecteur de Calderón*. Cela permet ensuite de démontrer que la fonction de Green du problème elliptique se prolonge analytiquement jusqu'à donner comme valeur au bord la fonction à deux points du problème hyperbolique [Wr13].

Contenu du Chapitre 6

***Anti de Sitter et holographie* (travaux [Wr8] et [Wr14], incluant collaboration avec W. Dybalski)**

Le travail [Wr8] fournit les ingrédients nécessaires à la quantification sur espaces asymptotiquement anti de Sitter. Cela inclut en particulier la démonstration d'un théorème de type Duistermaat–Hörmander sur les paramétrices distinguées par leur front d'onde. Le cadre permet de démontrer un résultat rigoureux d'holographie [Wr14], basé sur des théorèmes classiques de continuation unique à travers une hypersurface de type temps.

Construction pseudodifférentielle d'états de Hadamard

1. Champs scalaires sur espace-temps courbes

1.1. Espaces-temps globalement hyperboliques. Introduisons en premier temps quelques définitions élémentaires.

Soit (M, g) une variété Lorentzienne de dimension $n \geq 2$. Rappelons que cela signifie que M est une variété lisse (que nous considérons toujours Hausdorff, paracompacte et connexe) et que g est une métrique lorentzienne lisse sur M , c'est-à-dire une application lisse $x \mapsto g(x)$ dans les formes symétriques de signature $(-, +, \dots, +)$ (à noter que dans d'autres chapitres nous utiliserons la convention $(+, -, \dots, -)$, chacune ayant des avantages particuliers).

Un vecteur $v \in T_x M$ est *de type temps* si $v \cdot g(x)v < 0$, *de type lumière* ou *nul* si $v \cdot g(x)v = 0$, et *de type espace* si $v \cdot g(x)v > 0$. Ces définitions se transportent naturellement aux champs de vecteurs et aux courbes (en considérant leurs vecteurs tangents).

Définition 1.1. *On dit que (M, g) est orientable temporellement s'il existe un champ de vecteurs continu de type temps sur M .*

Nous supposons à partir de maintenant que (M, g) est un espace-temps, c'est-à-dire (M, g) est orientable temporellement et muni d'un champs de vecteurs comme ci-dessus.

Définition 1.2. *Une hypersurface lisse Σ de M est appelée surface de Cauchy si chaque courbe de type temps maximale étendue intersecte Σ en exactement un point. Un espace-temps (M, g) est appelé globalement hyperbolique s'il existe une surface de Cauchy.*

L'existence d'une surface de Cauchy implique une forme particulière de la métrique.

Théorème 1.3 ([17, 18, 69]). *Un espace-temps est globalement hyperbolique si et seulement s'il est isométrique à $\mathbb{R} \times \Sigma$ muni d'une métrique de forme $-\vartheta dt^2 + h_t$, avec $\vartheta > 0$ une fonction lisse, h_t une famille lisse de métriques riemanniennes sur Σ , et $\{t\} \times \Sigma$ une surface de Cauchy pour chaque $t \in \mathbb{R}$.*

Une courbe γ est dite *causale* si le vecteur tangent le long de γ est de type temps ou lumière. L'orientation temporelle donne une notion de courbes causales *dirigées vers le futur* ou *vers le passé*.

Rappelons que le *futur causal* $J_+(x)$ d'un point $x \in M$ (resp. le *passé causal* $J_-(x)$) est par définition l'ensemble de tous les points $x' \in M$ que

l'on peut joindre par une courbe causale dirigée vers le futur (resp. vers le passé). Pour des sous-ensembles $U \subset M$ on pose aussi

$$J_{\pm}(U) := \bigcup_{x \in U} J_{\pm}(x).$$

Un fait bien connu dit que (M, g) est globalement hyperbolique si et seulement si pour tous ensembles compacts $K, K' \subset M$, l'intersection $J_-(K) \cap J_+(K')$ est compacte (voir e.g. [11]).

1.2. Équation de Klein-Gordon et analyse microlocale. Nous considérons un potentiel lisse $V : M \rightarrow \mathbb{R}$. L'opérateur de Klein-Gordon est l'opérateur différentiel

$$P = -\square_g + V(x).$$

Si (M, g) est globalement hyperbolique, alors un fait bien connu (qui remonte à Leray [117]) est que le problème de Cauchy pour P est bien posé.

Plus précisément, soit $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un feuilletage de M par des surfaces de Cauchy et soit

$$\varrho(t) : C^\infty(M) \ni u \mapsto (u|_{\Sigma_t}, i^{-1}\partial_n u|_{\Sigma_t}) \in C^\infty(\Sigma; \mathbb{C}^2)$$

l'opérateur attribuant les données de Cauchy sur Σ_t . Alors, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, il existe une solution unique u au problème de Cauchy

$$(1.1) \quad \begin{cases} Pu = 0, \\ \varrho(s)u = f \end{cases}$$

pour $f \in C_0^\infty(\Sigma; \mathbb{C}^2)$ donné (et de plus, $\varrho(t)u \in C_0^\infty(\Sigma; \mathbb{C}^2)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$).

Un fait étroitement lié (et essentiellement équivalent dans ce contexte) est l'existence et l'unicité de *propagateurs retardés/avancés* de $Pu = 0$, c'est-à-dire d'opérateurs $G_{\pm} : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ qui sont des inverses de P au sens que

$$P \circ G_{\pm} = G_{\pm} \circ P = \mathbf{1} \text{ sur } C_c^\infty(M),$$

et qui en plus vérifient $\text{supp } G_{\pm}u \subset J_{\pm}(\text{supp } u)$. Un rôle fondamental en théorie des champs est joué par le *propagateur causal* (ou *propagateur de Pauli-Jordan*)

$$G := G_+ - G_-.$$

L'opérateur différentiel P est formellement autoadjoint par rapport au produit

$$(1.2) \quad (v|w)_M := \int_M \bar{v}w \, d\text{vol}_g, \quad v, w \in C_c^\infty(M),$$

et on peut montrer que l'adjoint formel de G est égal $G^* = -G$. Ce fait permet de munir l'espace de solutions de Pu d'une forme symplectique (ou une forme hermitienne, puisqu'on préfère de travailler dans un cadre complexe plutôt que réel) par intermédiaire du résultat suivant, dû essentiellement à Lichnerowicz [118] et Dimock [41]. On note $\text{Sol}(P)$ l'espaces de solutions lisses de $Pu = 0$ *compactes en espace*, c'est-à-dire vérifiant $\text{supp } u \subset J(K)$ pour un K compact.

Théorème 1.4. *Le propagateur causal $G := G_+ - G_-$ induit une bijection*

$$[G] : \frac{C_c^\infty(M)}{PC_c^\infty(M)} \rightarrow \text{Sol}(P).$$

De plus, $i(\cdot|[G]\cdot)_M$ est une forme hermitienne non dégénérée sur l'espace quotient ci-dessus.

1.3. Champs quantiques linéaires. Nous appellerons *espace de phase* une paire (\mathcal{V}, q) formée d'un espace vectoriel \mathcal{V} et d'une forme hermitienne q sur \mathcal{V} . (Nous utiliserons la notation $\mathcal{V}^2 \ni (v, w) \mapsto \bar{v} \cdot qw$ pour l'évaluation de q sur des éléments de \mathcal{V}).

Étant donné un espace de phase (\mathcal{V}, q) on peut définir son *CCR $*$ -algèbre* $\text{CCR}(\mathcal{V}, q)$ (voir e.g. [36, Sect. 8.3.1]). Celle-ci est définie comme la $*$ -algèbre générée par l'unité $\mathbf{1}$ et tous les éléments de forme $\psi(v)$ et $\psi^*(v)$ avec $v \in \mathcal{V}$, où $\mathcal{V} \ni v \mapsto \psi(v)$ est une application anti-linéaire et $\mathcal{V} \ni v \mapsto \psi^*(v)$ une application linéaire qui vérifient les *relations de commutation canoniques* :

$$(1.3) \quad [\psi(v), \psi(w)] = [\psi^*(v), \psi^*(w)] = 0, \quad [\psi(v), \psi^*(w)] = \bar{v} \cdot qw \mathbf{1}, \quad v, w \in \mathcal{V}.$$

Pour passer de là à une représentation dans un espace de Hilbert concret, et donc avoir des opérateurs $\hat{\psi}(v)$, $v \in \mathcal{V}$, vérifiant les relations de commutation canoniques, il faut d'abord choisir un *état*. Rappelons la définition :

Définition 1.5. *Un état sur une $*$ -algèbre \mathfrak{A} (à unité que l'on note $\mathbf{1}$) est une fonctionnelle linéaire $\omega : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\omega(\mathbf{1}) = 1$ et $\omega(a^*a) \geq 0$ pour tous $a \in \mathfrak{A}$. Les états purs sur \mathfrak{A} sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des états sur \mathfrak{A} .*

Étant donné un état ω , la *construction GNS* fournit ce qu'on appelle le *triple GNS* $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, formé d'un espace de Hilbert \mathcal{H}_ω , un vecteur $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$, et une *représentation* $\pi_\omega : \psi \mapsto \hat{\psi}$ qui associe des opérateurs sur \mathcal{H}_ω et vérifie

$$\omega(a) = (\Omega_\omega | \pi_\omega(a) \Omega_\omega)_{\mathcal{H}_\omega}$$

pour tous $a \in \mathfrak{A}$, en termes du produit scalaire de \mathcal{H}_ω .

Les *covariances complexes* Λ^\pm d'un état ω sur $\text{CCR}(\mathcal{V}, q)$ sont les deux formes hermitiennes :

$$(1.4) \quad \bar{v} \cdot \Lambda^+ w := \omega(\psi(v)\psi^*(w)), \quad \bar{v} \cdot \Lambda^- w := \omega(\psi^*(w)\psi(v)), \quad v, w \in \mathcal{V}.$$

Observons que nécessairement $\Lambda^\pm \geq 0$ par définition d'un état et $\Lambda^+ - \Lambda^- = q$ par (1.3). Inversement, si Λ^\pm est une forme hermitienne sur \mathcal{V} qui vérifie

$$(1.5) \quad \Lambda^+ - \Lambda^- = q, \quad \Lambda^\pm \geq 0,$$

alors il existe un état ω sur $\text{CCR}(\mathcal{V}, q)$ tel que (1.4) est vrai (voir e.g. [36, Sect. 17.1]). Cet état est unique dans la classe des *états quasi-libres* qu'on obtient de cette manière. Les états quasi-libres forment une vaste classe, dont typiquement seulement une partie possède une interprétation physique.

Expliquons maintenant comment ce cadre s'applique au cas de champs scalaires linéaires sur un espace-temps globalement hyperbolique (M, g) . L'espace de phase (\mathcal{V}, q) rélevant pour la quantification est alors

$$(1.6) \quad \mathcal{V} := \frac{C_c^\infty(M)}{PC_c^\infty(M)}, \quad \overline{[v]} \cdot q[w] := i(v|Gw)_M.$$

Remarquons que dû au fait que \mathcal{V} est un quotient, l'application $C_c^\infty(M; \mathbb{R}) \ni v \mapsto \psi([v])$ possède les mêmes propriétés formelles qu'une distribution sur M (à valeurs dans $\text{CCR}(\mathcal{V}, q)$) qui résout l'équation de Klein-Gordon. De même, la famille d'opérateurs $v \mapsto \hat{\psi}([v])$ obtenue par construction GNS à partir d'un état est formellement une distribution à valeurs dans les opérateurs non bornés qui résout l'équation de Klein-Gordon. Cela explique pourquoi on parle de *champs quantiques linéaires*, dont l'étude et la construction sont le sujet principal de ce mémoire. La propriété physique fondamentale provenant des relations de commutation et du support du noyau de Schwartz de G est que si $\text{supp } v$ et $\text{supp } w$ sont causalement disjoints, c'est-à-dire

$$J(\text{supp } v) \cap \text{supp } w = \emptyset,$$

(ce qui est équivalent à $\text{supp } v \cap J(\text{supp } w) = \emptyset$) alors «les opérateurs de champs étalés avec v et w commutent» :

$$[\hat{\psi}([v]), \hat{\psi}([w])] = 0.$$

Nous avons déjà vu que pour construire des champs il suffit de sélectionner un état en trouvant une paire de formes hermitiennes Λ^\pm vérifiant (1.5). Dans le cas de l'espace de phase (1.6) il est plus pratique de travailler avec des opérateurs continus et de faire la définition suivante :

Définition 1.6. *On appelle une paire d'applications continues*

$$\Lambda^\pm : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

une paire de fonctions à deux points pour P si elles vérifient

$$(1.7) \quad \begin{aligned} i) & \quad \Lambda^\pm \geq 0 \text{ pour } (\cdot|\cdot)_M \text{ sur } C_c^\infty(M), \\ ii) & \quad \Lambda^+ - \Lambda^- = iG, \\ iii) & \quad P\Lambda^\pm = \Lambda^\pm P = 0. \end{aligned}$$

Si Λ^\pm sont une paire de fonctions à deux points, on obtient automatiquement une paire de covariances complexes (notées aussi Λ^\pm) en posant

$$\bar{u} \cdot \Lambda^\pm v := (u|\Lambda^\pm v)_M, \quad u, v \in C_c^\infty(M).$$

Dans ce texte nous nous concentrerons sur la construction et l'étude des propriétés de fonctions à deux points. Bien que les propriétés *i)-iii)* soient faciles à vérifier, le problème devient nettement plus compliqué lorsqu'on impose en plus la *condition de Hadamard* que nous expliquons dans la suite.

1.4. Front d'onde. Rappelons d'abord quelques notions élémentaires en analyse microlocale (voir e.g. [96, 97] pour plus de détails). Le front d'onde d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ décrit ses singularités, c'est-à-dire indique les points x où elle n'est pas lisse ainsi que les directions responsables ξ dans la transformée de Fourier localisée en x :

Définition 1.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Un point $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ n'appartient pas au front d'onde $\text{WF}(u)$ de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ s'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\varphi(x_0) \neq 0$ et un cône ouvert t.q. $\xi_0 \in V_{x_0}$ et pour tous $N \in \mathbb{N}_0$,*

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}, \quad \xi \in \Gamma_{x_0}.$$

Le front d'onde se transforme par changement de coordonnées de façon qui permet de généraliser sa définition aux distributions sur une variété M , en tant que sous-ensemble $\text{WF}(u) \subset T^*M \setminus o$ du fibré cotangent privé de sa section zéro.

En pratique il est souvent utile de se servir d'une définition équivalente qui utilise le *calcul pseudo-différentiel* $\Psi(M)$ sur la variété M . Rappelons qu'on a une notion de *symbole principal* $\sigma_{\text{pr}}(A)$ de $A \in \Psi^m(M)$, et que A est *elliptique* en $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus o$ si

$$\sigma_{\text{pr}}(A)(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

Proposition 1.8. *Soit $u \in \mathcal{D}'(M)$. Alors $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus o$ n'est pas dans $\text{WF}(u)$ si et seulement s'il existe $A \in \Psi^0(M)$, elliptique en (x_0, ξ_0) et $\chi \in C_c^\infty(M)$ tel que $\chi(x_0) \neq 0$ et $\chi A \chi u \in C_c^\infty(M)$.*

Pour $x \in M$, notons par $V_{x\pm} \subset T_x M$ les cônes futur/passé et par $V_{x\pm}^* \subset T_x^* M$ les cônes duaux

$$V_{x\pm}^* = \{\xi \in T_x^* M : \xi \cdot v > 0, \forall v \in V_{x\pm}, v \neq 0\}.$$

Pour $X = (x, \xi) \in T^*M \setminus o$, soit $p(X) = \xi \cdot g^{-1}(x)\xi$ le symbole principal de l'opérateur de Klein-Gordon P et

$$\mathcal{N} = p^{-1}(\{0\}) \cap T^*M \setminus o$$

la variété caractéristique de P . On note H_p le champ de vecteurs hamiltonien de p . Les courbes intégrales de H_p dans \mathcal{N} sont appelées les *bicaractéristiques*. Le *théorème de propagation de singularités* de Hörmander dit que pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(M)$, l'ensemble $\text{WF}(u) \setminus \text{WF}(Pu)$ est un sous-ensemble de \mathcal{N} invariant sous le flot de H_p .

Remarquons que la variété caractéristique \mathcal{N} a deux composantes connexes :

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-, \quad \mathcal{N}^\pm = \mathcal{N} \cap \{\xi \in V_{x\pm}^*\}.$$

Nous allons étudier surtout des front d'ondes de noyaux de Schwartz d'opérateurs. Si M_i , $i = 1, 2$, sont deux variétés, on identifie $T^*(M_1 \times M_2)$ et $T^*M_1 \times T^*M_2$. Si $K : C_c^\infty(M_2) \rightarrow \mathcal{D}'(M_1)$ est continu, en notant de la même façon $K \in \mathcal{D}'(M_1 \times M_2)$ son noyau de Schwartz, on pose :

$$\text{WF}(K)' := \{(X_1, X_2) \in (T^*M_1 \times T^*M_2) \setminus o : (X_1, \overline{X_2}) \in \text{WF}(K)\},$$

où $\overline{(x, \xi)} = (x, -\xi)$. Cette notation est très naturelle : par exemple si $M_1 = M_2 = M$, alors $\text{WF}(\mathbf{1})'$ est simplement la diagonale dans $(T^*M \times T^*M) \setminus o$.

1.5. États de Hadamard. Les états quasi-libres sont considérés être physiquement raisonnables s'ils vérifient la condition suivante.

Définition 1.9. *Une paire de fonctions à deux points $\Lambda^\pm : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ vérifie la condition de Hadamard si*

$$(\text{Had}) \quad \text{WF}(\Lambda^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm.$$

L'état associé est alors dit un état de Hadamard.

Cette forme de la condition de Hadamard a été proposée par [140, 81]. La première formulation en termes de front d'onde est due à Radzikowski [133], qui a démontré l'équivalence avec les définitions plus anciennes (datant des années 70 du XX^e siècle), formalisées par Kay et Wald dans [112].

Expliquons quelques conséquences de la condition de Hadamard :

- La conséquence directe la plus importante est le *théorème de Radzikowski* [133] qui implique l'unicité de fonctions à deux points Λ^\pm de Hadamard *modulo des termes à noyau de Schwartz lisse*. On en déduit que les singularités sur la diagonale du noyau de Schwartz $\Lambda^+(x, x')$ sont des quantités locales et géométriques, qu'on peut enlever par un procédé de *renormalisation*. Cela permet de définir les *produits de Wick*, par exemple $:\psi(x)\psi^*(x):$, qui remplacent les produits de distributions mal définis, par exemple $\psi(x)\psi^*(x)$ (à cause du fait que $\omega(\psi(x)\psi^*(x)) = \Lambda^+(x, x)$ est mal défini).
- Les puissances de Wick donnent sens au terme non linéaire dans la *théorie perturbative en interaction*. Ensuite, la construction de champs d'interaction demande de multiplier des distributions à chaque terme du développement, ce qui en espace-temps courbe est fait en utilisant la condition de Hadamard. Ces produits peuvent être renormalisés aux points où les arguments basés sur le front d'onde ne suffisent pas. Cela permet de construire la théorie sur n'importe quel espace-temps globalement hyperbolique [25, 84, 85] et de formaliser des idées comme le groupe de renormalisation [86] dans ce contexte.
- Le condition de Hadamard permet aussi de définir le *tenseur d'énergie-impulsion quantique renormalisé* associé à Λ^\pm [86]. Si elle n'est donc pas vérifiée, cela s'interprète comme un champ quantique dont l'influence sur la métrique de l'espace-temps serait non seulement non négligeable, mais infinie, et donc bien au-delà de la validité de la théorie quantique des champs.
- La condition sur le front d'onde est utilisée pour démontrer les *inégalités d'énergie quantiques* qui donnent une borne inférieure sur des quantités liées au tenseur d'énergie-impulsion [57].
- Par un argument de Kay, Radzikowski et Wald, le tenseur d'énergie-impulsion d'un état de Hadamard explose sur chaque *horizon de Cauchy* généré dans une région compacte de l'espace-temps. Cela élimine des situations avec des courbes fermées de type temps et s'interprète donc comme un *mécanisme de protection de chronologie* [111].
- La condition de Hadamard est très délicate quand on tente de prolonger un état à travers l'horizon d'un trou noir, dans une région considérée physique. Si on cherche des états particulièrement symétriques qui se prolongent dans ce sens, les résultats de Kay et Wald [112] disent que c'est forcément un état thermique à la *température de Hawking*.
- Un argument de Fredenhagen et Haag montre que les états de Hadamard sur un espace-temps de type trou noir ressemblent à un état thermique loin de l'horizon [61]. Cela fournit une explication rigoureuse possible de l'effet Hawking, à condition d'avoir un état de Hadamard qui provient

de l'effondrement d'une étoile. La démonstration de l'existence d'un tel état exactement thermal à l'infini, dans des situations physiquement réalistes comme un trou noir en rotation, demande de faire le lien avec des arguments basés sur la théorie de la diffusion (voir les travaux de Bachelot [4], Häfner [76] et Drouot [47] pour une approche par théorie de diffusion qui n'utilise pas la condition de Hadamard).

L'existence des états de Hadamard est un fait connu depuis les années 1970 grâce à un argument de déformation de Fulling, Narcowich et Wald [64].

Théorème 1.10 ([64]). *Sur chaque espace-temps globalement hyperbolique (M, g) il existe des états de Hadamard.*

L'argument de [64] est cependant très indirect, ce qui le rend difficilement applicable en pratique.

Un argument constructif a été fourni par Junker [103, 104, 105] et Junker et Schrohe [106] dans le cas spécial d'une surface de Cauchy compacte, utilisant le calcul pseudo-différentiel sur Σ . Le bien-fondé d'une construction similaire dans le cas non compact a longtemps été considéré comme un problème difficile. Le travail [Wr1] en collaboration avec Gérard donne une telle construction sous l'hypothèse que Σ est difféomorphe à \mathbb{R}^d . Finalement, le travail [Wr5] en collaboration avec Gérard et Oulghazi étend ce résultat à un cadre géométrique bien plus général, qui contient comme cas particulier des espaces-temps de type trou noir comme Kerr et Kerr-de Sitter. Ce résultat est expliqué en plus de détails dans la suite.

2. Travaux [Wr1] et [Wr5] : Construction d'états de Hadamard

2.1. Hypothèses géométriques. Les aspects globaux du problème (en particulier la condition de positivité Λ^\pm) motivent des hypothèses de *géométrie bornée*. En gros, il s'agit d'avoir des cartes $\{\psi_x\}_{x \in M}$ telles que le tiré en arrière $(\psi_x^{-1})^*g$ est borné inférieurement et supérieurement avec toutes ses dérivées, et équivalent à la métrique plate (avec toutes ses dérivées), uniformément en $x \in M$.

La formulation précise de nos hypothèses demande d'abord d'introduire quelques définitions géométriques.

Notons $B_d(y, r) \subset \mathbb{R}^d$ la boule ouverte de centre y et de rayon r . Pour $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on note $BT_q^p(U)$ l'espace de Fréchet des (p, q) -tenseurs sur U bornés avec toutes les dérivées. Le cas spécial $p = q = 0$ sera noté simplement $C_{\text{bd}}^\infty(U)$, comme il s'agit de fonctions lisses bornées avec toutes les dérivées.

Définition 1.11. *Une variété riemannienne (Σ, h) est à géométrie bornée si et seulement si pour chaque $x \in \Sigma$ il existe un voisinage ouvert de x , noté U_x , et un difféomorphisme*

$$\psi_x : U_x \xrightarrow{\sim} B_d(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$$

avec $\psi_x(x) = 0$, et tel que si $h_x := (\psi_x^{-1})^*h$ alors :

- (1) la famille $\{h_x\}_{x \in \Sigma}$ est bornée dans $BT_2^0(B_d(0, 1), \delta)$,

(2) il existe $c > 0$ tel que :

$$c^{-1}\delta \leq h_x \leq c\delta, \quad x \in \Sigma.$$

On appellera une famille $\{U_x\}_{x \in \Sigma}$, resp. $\{\psi_x\}_{x \in \Sigma}$, comme ci-dessus une famille de bons voisinages, resp. de bons difféomorphismes.

Il est montré dans [Wr5] (voir aussi [132]) que cette définition est équivalente à la définition standard de courbure bornée et de rayon d'injectivité uniformément positif pour l'application exponentielle (voir [27, 138]).

Un résultat bien connu ([147, Lemme 1.2]) dit qu'on peut toujours trouver un recouvrement $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ par de bons voisinages $U_i = U_{x_i}$ ($x_i \in \Sigma$) qui est uniformément fini, c'est-à-dire il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset$ si $\#I > N$. On pose alors $\psi_i = \psi_{x_i}$ et on appelle la suite $\{U_i, \psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un bon recouvrement par cartes de Σ .

Définition 1.12. Soit (Σ, h) à géométrie bornée. On note $BT_q^p(\Sigma, h)$ l'espace de Fréchet des (q, p) -tenseurs lisses X sur Σ tels que si $X_x = (\psi_x)^* X$, alors la famille $\{X_x\}_{x \in \Sigma}$ est bornée dans l'espace $BT_q^p(B_d(0, \frac{r}{2}), \delta)$.

On note par $C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_q^p(\Sigma, h))$ l'espace des applications lisses $\mathbb{R} \in t \mapsto X(t)$ telles que $\partial_t^n X(t)$ est uniformément borné dans $BT_q^p(\Sigma, h)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.13. Soit (Σ, h) une variété riemannienne de dimension d et $\chi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un difféomorphisme. On dit que χ est un difféomorphisme borné de (Σ, h) si pour une famille de bons difféomorphismes $\{U_x, \psi_x\}_{x \in \Sigma}$, les applications

$$\chi_x = \psi_{\chi(x)} \circ \chi \circ \psi_x^{-1}, \quad \chi_x^{-1} = \psi_{\chi^{-1}(x)} \circ \chi^{-1} \circ \psi_x : B_d(0, 1) \rightarrow B_d(0, 1)$$

sont bornées dans $C_b^\infty(B_d(0, 1))$ uniformément en $x \in \Sigma$.

Considérons maintenant le cadre d'une variété lorentzienne (M, g) . Pour pouvoir utiliser la notion de géométrie bornée il faut se servir d'une métrique riemannienne \hat{g} de référence.

Définition 1.14 ([132]). Une variété lorentzienne (M, g) est à géométrie bornée s'il existe une métrique riemannienne \hat{g} sur M telle que :

- (1) (M, \hat{g}) est à géométrie bornée ;
- (2) $g \in BT_2^0(M, \hat{g})$ et $g^{-1} \in BT_0^2(M, \hat{g})$.

Définition 1.15. Nous disons que Σ est une surface de Cauchy à géométrie bornée si :

- (1) l'injection $i : \Sigma \rightarrow M$ est à géométrie bornée pour \hat{g} ,
- (2) en notant n le vecteur normal à Σ dirigé vers le futur, on a :

$$\sup_{y \in \Sigma} n(y) \cdot \hat{g}(y)n(y) < \infty.$$

L'intérêt provient du théorème suivant.

Théorème 1.16 ([Wr5]). Soit (M, g) une variété lorentzienne à géométrie bornée avec une surface de Cauchy à géométrie bornée Σ . Alors :

(1) il existe un $\delta > 0$ tel que le flot géodésique normal à Σ ,

$$\chi : \begin{array}{l}] - \delta, \delta[\times \Sigma \rightarrow M \\ (s, y) \mapsto \exp_y^g(sn(y)) \end{array}$$

est bien défini et est un difféomorphisme sur son image ;

(2) $\chi^*g = -ds^2 + h_s$, où $\{h_s\}_{s \in]-\delta, \delta[}$ est une famille lisse de métriques riemanniennes sur Σ avec

- i) (Σ, h_0) à géométrie bornée,
- ii) $s \mapsto h_s \in C_b^\infty(] - \delta, \delta[, BT_2^0(\Sigma, h_0))$,
- iii) $s \mapsto h_s^{-1} \in C_b^\infty(] - \delta, \delta[, BT_0^2(\Sigma, h_0))$.

Nous voyons en particulier qu'on a des bornes dans un voisinage de Σ de largeur uniforme 2δ , ce qui est pratique pour considérer des équations d'évolution. Cependant, dans beaucoup d'exemples intéressants ceci n'est pas réaliste. En revanche, il est très souvent possible de se réduire à une telle situation en appliquant une transformation conforme à la métrique. Cela veut dire qu'il est mieux d'appliquer la Définition 1.15 à une métrique non physique \tilde{g} obtenue en multipliant g par une fonction lisse strictement positive \tilde{c}^2 .

Cela motive l'hypothèse suivante, qui est l'hypothèse géométrique principale dans [Wr5] :

Hypothèse 1.17. *Supposons qu'il existe un voisinage U d'une surface de Cauchy Σ dans (M, g) , tel que :*

- (1) (U, g) est conformément inséré dans une variété lorentzienne à géométrie bornée (M, \tilde{g}) et le facteur conforme \tilde{c}^2 est tel que $\nabla_{\tilde{g}} \ln \tilde{c}$ est un $(1, 0)$ -tenseur borné, et de plus Σ est une surface de Cauchy à géométrie bornée dans (M, \tilde{g}) ;
- (2) $\tilde{c}^2 V$ est un $(0, 0)$ -tenseur borné.

En particulier, les calculs dans [Wr5] montrent que cette hypothèse est vérifiée dans les exemples suivants :

Exemple 1.18 (Espace-temps cosmologiques). Si (Σ, h) est à géométrie bornée, $a \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $M = \mathbb{R}_t \times \Sigma_y$ est munie de la métrique

$$g = -dt^2 + a^2(t)h_{ij}(y)dy^i dy^j,$$

alors l'hypothèse est vérifiée avec $\Sigma = \{t = 0\}$, $\tilde{c} = 1$, $U = I \times \Sigma$, I un intervalle et $V = m^2$, $m \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.19 (Région extérieur de trou noir). L'hypothèse est vérifiée dans la région extérieure de l'espace-temps de Kerr et de Kerr-de Sitter (en rotation lente). Comme surface de Cauchy Σ il est possible de prendre $\{t = 0\}$ dans les coordonnées de Boyer-Lindquist (voir e.g. [131]).

Exemple 1.20 (L'extension de Kerr-Kruskal). L'hypothèse est aussi vérifiée dans l'espace-temps obtenu comme extension maximale globalement hyperbolique de la région extérieure de Kerr, avec une surface de Cauchy qui étend l'hypersurface de l'exemple précédent

2.2. Résultat principal. l'Hypothèse 1.17 et le Théorème 1.16 permettent de se réduire à une EDP sur $I \times \Sigma$, qui modulo des conjugaisons par opérateurs de multiplication peut s'écrire sous forme

$$(2.8) \quad \partial_t^2 \phi + r(t, \mathbf{x}) \partial_t \phi + a(t, \mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}}) \phi = 0.$$

Ici, $r(t, \mathbf{x})$ est une fonction lisse à valeurs dans \mathbb{R} , et $a(t, \mathbf{x}, \partial_{\mathbf{x}})$ est un opérateur différentiel elliptique de second ordre.

Soit $U(t, s)$ l'opérateur d'évolution de Cauchy pour (2.8), c'est-à-dire l'opérateur qui associe $\varrho(s)\phi \mapsto \varrho(t)\phi$. La stratégie consiste à construire ce que nous appelons une *décomposition microlocale* de U , i.e. une décomposition

$$(2.9) \quad U(t, s) = U^+(t, s) + U^-(t, s),$$

où U^\pm vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $U^\pm(t, t')U^\pm(t', s) = U^\pm(t, s)$ pour tous $t, t', s \in I$; et $U^\pm(t, t) =: c^\pm(t)$ sont des projections,
- (2) $U^\pm(t, s)$ propage le front d'onde dans \mathcal{N}^\pm ,
- (3) les noyaux de $U^\pm(t, s)$ sont symplectiquement orthogonaux pour la forme symplectique canonique préservée par l'évolution.

Nous appelons un état *régulier* si les données de Cauchy de ses fonctions à deux points sont des opérateurs pseudo-différentiels dans le sens du calcul global que nous utilisons. Nous utilisons la notation $\Lambda^\pm(t, s)$ pour le noyau de Schwartz (à valeurs dans les opérateurs $C_c^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$) de Λ^\pm dans la première variable de $I \times \Sigma$. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 1.21 ([Wr5]). *Soit (M, g) un espace-temps vérifiant l'Hypothèse 1.17 et considérons l'équation de Klein-Gordon (2.8). Soit $t_0 \in I$. Il existe un état de Hadamard régulier dont les fonctions à deux points sont données par*

$$(2.10) \quad \Lambda^\pm(t, s) = \mp \pi_0 U^\pm(t, s) \pi_1^*,$$

où π_0, π_1 sont les projections sur les composantes respectives des données de Cauchy et $\{U^\pm(t, s)\}_{t, s \in I}$ est une décomposition microlocale telle que

$$(2.11) \quad U^\pm(t_0, t_0) = \begin{pmatrix} \mp(b^+ - b^-)^{-1} b^\mp & \pm(b^+ - b^-)^{-1} \\ \mp b^+ (b^+ - b^-)^{-1} b^- & \pm b^\pm (b^+ - b^-)^{-1} \end{pmatrix} (t_0)$$

pour une paire $b^\pm(t_0)$ d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques de premier ordre. De plus, les fonctions à deux points de chaque état de Hadamard régulier pur sont de cette forme.

Il est ensuite facile d'étendre cette construction à l'espace-temps (M, g) entier et à l'équation de Klein-Gordon $Pu = 0$, en implémentant le lien avec l'équation réduite (2.8), en résolvant le problème de Cauchy et en utilisant le théorème de propagation de singularités de Hörmander pour contrôler le front d'onde.

De plus, à partir d'un état régulier il est possible d'en obtenir beaucoup d'autres en appliquant aux données de Cauchy des *transformations de Bogoliubov* préservant la propriété de Hadamard [Wr1]. Cela donne donc une classe nombreuse d'états de Hadamard réguliers.

2.3. Construction de paramétrix pour l'évolution. Nous obtenons la décomposition microlocale de l'évolution en posant

$$U^\pm(t, s) := U(t, t_0)U^\pm(t_0, t_0)U(t_0, s)$$

où $U^\pm(t_0, t_0)$ est défini par la formule (2.11), avec $b^\pm(t)$ construit pour $t \in I$ comme solution approchée (i.e., une solution modulo des termes régularisants) de l'équation opératorielle suivante :

$$(2.12) \quad (\partial_t + ib^\pm(t) + r(t)) \circ (\partial_t - ib^\pm(t)) = \partial_t^2 + r(t)\partial_t + a(t).$$

L'idée d'utiliser une telle factorisation approchée est due à Junker [103, 104, 105].

Expliquons le rôle de l'équation opératorielle (2.12) dans notre situation. La première étape est d'observer que l'équation $(\partial_t^2 + r(t)\partial_t + a(t))\phi(t) = 0$ est équivalente à

$$(2.13) \quad i^{-1}\partial_t\psi(t) = H(t)\psi(t), \quad \text{où } H(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ a(t) & ir(t) \end{pmatrix},$$

en posant

$$(2.14) \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ i^{-1}\partial_t\phi(t) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $U(s, t)$ est donc l'évolution générée par $H(t)$. Si nous avons une paire d'opérateurs dépendants du temps $b^\pm(t)$ qui vérifient (2.12) modulo des termes régularisants nous pouvons alors diagonaliser (2.13) en posant

$$\tilde{\psi}(t) := \begin{pmatrix} \partial_t - ib^-(t) \\ \partial_t - ib^+(t) \end{pmatrix} \phi(t).$$

Cela donne effectivement

$$\begin{pmatrix} \partial_t + ib^-(t) + r(t) & 0 \\ 0 & \partial_t + ib^+(t) + r(t) \end{pmatrix} \tilde{\psi}(t) = 0$$

modulo des termes régularisants. Un calcul direct donne alors que $\tilde{\psi}(t) = S^{-1}(t)\psi(t)$, avec

$$S^{-1}(t) = i \begin{pmatrix} -b^-(t) & \mathbf{1} \\ -b^+(t) & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad S(t) = i^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ b^+(t) & -b^-(t) \end{pmatrix} (b^+(t) - b^-(t))^{-1}.$$

On voit donc que $\tilde{\psi}(t)$ résout un système diagonal modulo des termes régularisants. On peut démontrer que

$$U(t, s) = S(t)U_B(t, s)S(s)^{-1},$$

où $U_B(t, s)$ est l'évolution générée par un hamiltonien $B(t)$, qui modulo des erreurs régularisantes est égal à

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} -b^-(t) + ir(t) & 0 \\ 0 & -b^+(t) + ir(t) \end{pmatrix}.$$

Dans notre situation il est possible de construire une paire de solutions approchées de (2.13) telles que $b^- = -(b^+)^*$ et b^\pm est un opérateur pseudo-différentiel elliptique de degré 1. Nous avons donc diagonalisé l'évolution en termes d'une composante qui microlocalement se comporte comme $(i^{-1}\partial_t + b^+(t))$, et l'autre qui se comporte comme $(i^{-1}\partial_t + b^-(t))$. Ces deux composantes propagent le front d'onde dans les deux nappes différentes \mathcal{N}^\pm , ce qui

permet de construire la décomposition microlocale et de vérifier la condition d'Hadamard.

Remarquons que l'inversibilité de $S(t)$ entraîne des contraintes globales sur $b^\pm(t)$. Cela motive l'usage d'un calcul pseudo-différentiel global qui généralise le calcul pseudo-différentiel uniforme de Hörmander. Nous utilisons dans ce but le *calcul pseudo-différentiel sur les variétés à géométrie bornée* de Kordyukov [115] et Shubin [147]. Notons par $\Psi_{\text{bd}}^m(\Sigma)$ les opérateurs d'ordre m dans cette classe, et par $\mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma)$ les opérateurs régularisants dans les espaces de Sobolev associés à $\Psi_{\text{bd}}^m(\Sigma)$. La différence clé entre ce calcul et le calcul pseudo-différentiel $\Psi^m(\Sigma)$ qui existe sur n'importe quelle variété lisse est qu'en définissant les classes de symboles par réduction au cas d'ouverts de \mathbb{R}^d , on tire en arrière avec les bons difféomorphismes ψ_x et on demande de l'uniformité en x . Pour quantifier on utilise aussi un bon recouvrement par cartes.

La construction de b^\pm est résumée par le théorème suivant. Remarquons que l'équation opératorielle est équivalente à l'équation de Riccati

$$i\partial_t b^\pm - b^{\pm 2} + a + irb^\pm = 0.$$

Théorème 1.22 ([Wr5]). *Il existe $b \in C_b^\infty(I; \Psi_{\text{bd}}^1(\Sigma))$, unique modulo $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma))$, tel que :*

- i) $b = \epsilon + C_b^\infty(I; \Psi_{\text{bd}}^0(\Sigma))$,
- ii) $(b + b^*)^{-1} = (2\epsilon)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{1} + r_{-1})(2\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$, $r_{-1} \in C_b^\infty(I; \Psi_{\text{bd}}^{-1}(\Sigma))$,
- iii) $(b + b^*)^{-1} \geq c\epsilon^{-1}$, pour un $c \in C_b^\infty(I; \mathbb{R})$, $c > 0$,
- iv) $i\partial_t b^\pm - b^{\pm 2} + a + irb^\pm = r_{\pm\infty}^\pm \in C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma))$,
pour $b^+ := b$, $b^- := -b^*$.

L'étape principale de la démonstration est de substituer pour b une expansion poly-homogène et de résoudre par récurrence les équations de transport qui en suivent. Après resommation, on modifie la définition de b en découpant les basses fréquences afin d'assurer les propriétés d'inversibilité.

Un ingrédient important est une généralisation du *théorème de Seeley* [144] sur les puissances d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques (originellement formulé pour des variétés compactes) dans le cadre de la géométrie bornée et de familles dépendantes du temps. Nous le montrons par réduction à un cadre général proposé par Ammann, Lauter, Nistor et Vasy [1].

L'autre ingrédient clé généralise le *théorème d'Egorov*, qui permet de suivre le symbole principal d'opérateurs pseudodifférentiels transportés avec l'évolution générée par des familles comme $b(t)$. Il sert aussi à montrer que les termes d'erreur (régularisants en espace) transportés avec l'évolution sont régularisants au sens qu'ils appartiennent à $C_b^\infty(I; \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma))$.

Théories de jauge sur espace-temps courbes

1. Travail [Wr2] : États de Hadamard en théorie de Yang-Mills

1.1. Introduction. Dans une théorie de jauge linéarisée, la différence principale avec le cadre du Chapitre 1 c'est que l'opérateur de Klein-Gordon est remplacé par un opérateur différentiel P qui n'est pas hyperbolique. Cela engendre des difficultés déjà au tout début de la construction de champs : par exemple, il n'est pas clair quel objet remplace les propagateurs retardés et avancés. Il est donc essentiel de faire recours à une méthode de réduction à un problème hyperbolique.

Typiquement, la situation peut s'exprimer de manière suivante. Supposons que nous avons :

- (1) deux fibrés vectoriels V_0, V_1 sur un espace-temps globalement hyperbolique (M, g) , chacun muni d'une structure hermitienne,
- (2) un opérateur différentiel formellement autoadjoint $P \in \text{Diff}(M; V_1)$, qui décrit les équations de mouvement,
- (3) un opérateur non nul $K \in \text{Diff}(M; V_0, V_1)$ tel que $PK = 0$, ce qui s'interprète comme invariance sous les transformations de jauge $u \mapsto u + Kf$.

Une méthode efficace consiste à vérifier d'abord si $D_1 := P + KK^*$ est hyperbolique. Si c'est le cas, on peut utiliser tout le formalisme déjà introduit pour D_1 , et ensuite pour définir le sous-espace physique on identifie les solutions de P avec les solutions de D_1 qui vérifient la contrainte $K^*u = 0$. On appellera cette contrainte la *condition subsidiaire*.

L'exemple canonique est la théorie de Maxwell. Dans ce cas, K est la différentielle d agissant sur les 0-formes sur M , et $P = d^*d$, où d agit ici sur les 1-formes. L'opérateur $D_1 = d^*d + dd^*$ est l'opérateur d'onde sur les 1-formes. La contrainte $K^*f = 0$ correspond alors à la jauge de Lorenz.

Plutôt que d'essayer de donner un sens aux quantités directement liées à P , la stratégie est de travailler avec D_1 et de considérer ensuite la restriction à l'espace physique. Pour pouvoir quantifier il faut appliquer cette stratégie aux fonctions à deux points. On a donc besoin d'une paire d'opérateurs continus

$$\Lambda_1^\pm : \Gamma_c(M; V_1) \rightarrow \Gamma(M; V_1),$$

agissant sur les sections lisses à support compact de V_1 dans les sections lisses, qui vérifient

$$(1.15) \quad D_1 \Lambda_1^\pm = \Lambda_1^\pm D_1 = 0, \quad \Lambda_1^+ - \Lambda_1^- = iG_1,$$

où G_1 est le propagateur causal de D_1 (différence du propagateur retardé et avancé). De plus, on demande les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (\text{Had}) \quad & \text{WF}(\Lambda_1^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm, \\ (\text{g.i.}) \quad & (\Lambda_1^\pm)^* = \Lambda_1^\pm \text{ et } \Lambda_1^\pm : \text{Ran } K \rightarrow \text{Ran } K, \\ (\text{pos}) \quad & \Lambda_1^\pm \geq 0 \text{ sur } \text{Ker } K^*. \end{aligned}$$

La condition (Had) est exactement la même condition de Hadamard que pour les champs de Klein-Gordon, excepté qu'il faut préciser la définition du front d'onde $\text{WF}(\Lambda_1^\pm)$ pour les distributions sur un fibré vectoriel : cela se fait en prenant l'union des fronts d'ondes de toutes les composantes dans une trivialisatoin arbitraire. La condition d'*invariance de jauge* (g.i.) est nécessaire pour que Λ_1^\pm définisse une fonction à deux points sur l'espace physique. Remarquons aussi que la condition de positivité (pos) est imposée seulement sur le sous-espace physique $\text{Ker } K^*$. En effet, il ne serait pas réaliste d'essayer de trouver des paires d'opérateurs vérifiant toutes ces conditions, avec en plus $\Lambda_1^\pm \geq 0$ partout. La raison c'est que dans tous les exemples connus de théories de jauge, l'opérateur D_1 est formellement autoadjoint pour le produit sur M induit par une structure hermitienne *non positive*. Le seul espoir est donc de vérifier la condition plus faible (pos), qui néanmoins suffit pour construire les champs quantiques physiques.

En pratique, le problème est rendu difficile par le fait qu'on doit vérifier les conditions (g.i.) et (pos) *exactement*, tandis que les outils d'analyse microlocale naturelles pour étudier (Had) rajoutent des termes régularisant. Cela se superpose avec les difficultés engendrées par la nature de l'espace physique $\text{Ker } K^*$, dont la description analytique est liée au problème infrarouge.

1.2. Équations de Yang-Mills. Introduisons maintenant les notions utiles pour la théorie de Yang-Mills linéarisée autour d'une solution classique \bar{A} fixée (la *solution de fond*).

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie compacte, et notons par la même lettre \mathfrak{g} sa complexification. La complexification de la forme de Killing définit une forme sesquilinéaire positive que l'on notera κ .

Nous considérons le fibré trivial

$$V_0 := M \times \mathfrak{g},$$

muni de la structure hermitienne induite par κ , et V_1 le fibré de 1-formes correspondant :

$$V_1 := T^*M \times \mathfrak{g}.$$

On munit V_1 de la structure hermitienne donnée par le produit tensoriel de la structure hermitienne canonique sur T^*M avec κ . Ce fibré est trivial si M est parallélisable.

Notons $\mathcal{E}^p(M)$ l'espace des p -formes lisses sur M , et $\mathcal{E}^\oplus(M) = \bigoplus_p \mathcal{E}^p(M)$. Les espaces de sections $\Gamma(M; V_i)$, $i = 0, 1$, peuvent être identifiés avec respectivement $\mathcal{E}^0(M) \otimes \mathfrak{g}$ et $\mathcal{E}^1(M) \otimes \mathfrak{g}$. Le produit extérieur sur $\mathcal{E}^\oplus(M) \otimes \mathfrak{g}$ est donné par

$$(\alpha \otimes a) \wedge (\beta \otimes b) := (\alpha \wedge \beta) \otimes [a, b] \quad a, b \in \mathfrak{g}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^\oplus(M),$$

Le produit intérieur est défini par

$$(\alpha \otimes a) \lrcorner (\beta \otimes b) := (\alpha \lrcorner \beta) \otimes [b, a], \quad a, b \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathcal{E}^\oplus(M).$$

On définit aussi

$$A \lrcorner \cdot : \mathcal{E}^\oplus(M) \otimes \mathfrak{g} \ni B \mapsto B \lrcorner A \in \mathcal{E}^\oplus(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Alors,

$$(B \wedge \cdot)^* = \overline{B} \lrcorner \cdot, \quad B \in \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Soit $d : \mathcal{E}^p(M) \rightarrow \mathcal{E}^{p+1}(M)$ la différentielle usuelle et soit $\overline{A} \in \mathcal{E}^1(M) \otimes \mathfrak{g}$. La notation \overline{A} est utilisée ici pour contraster avec les variables dynamiques A , et ne doit pas être confondue avec la conjugaison complexe. La *dérivée covariante* $\overline{d} : \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{E}^{p+1}(M) \otimes \mathfrak{g}$ par rapport à \overline{A} est définie par

$$\overline{d}f := df + \overline{A} \wedge f, \quad f \in \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Contrairement à son nom, ce n'est pas en général une différentielle dans le sens que $\overline{d}\overline{d}$ soit identiquement nul, on a plutôt

$$(1.16) \quad \overline{d}\overline{d} = \overline{F} \wedge \cdot,$$

où $\overline{F} := d\overline{A} + \overline{A} \wedge \overline{A} \in \mathcal{E}^2(M) \otimes \mathfrak{g}$ est la *courbure* de \overline{A} . La co-différentielle covariante $\overline{\delta} : \mathcal{E}^{p+1}(M) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g}$ est par définition l'adjoint formel \overline{d}^* de \overline{d} . Elle vérifie :

$$\overline{d}(A \wedge B) = (\overline{d}A) \wedge B + (-1)^p A \wedge (\overline{d}B), \quad A \in \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g}, B \in \mathcal{E}^q(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Cela peut s'écrire comme une identité opératorielle, et en prenant son adjoint on obtient

$$(1.17) \quad A \lrcorner \overline{\delta}B = (\overline{d}A) \lrcorner B + (-1)^p \overline{\delta}(A \lrcorner B), \quad A \in \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathfrak{g}, B \in \mathcal{E}^q(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Une conséquence de la définition $\overline{F} = d\overline{A}$ est l'*identité de Bianchi*

$$(1.18) \quad \overline{d}\overline{F} = 0.$$

L'équation de Yang-Mills non linéaire pour \overline{A} s'écrit :

$$(1.19) \quad \overline{\delta}d\overline{A} (= \overline{\delta}\overline{F}) = 0.$$

Ce système peut se linéariser de façon suivante. On fixe une section $\overline{A} \in \mathcal{E}^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ à valeurs réelles et on suppose qu'elle est *on-shell*, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation de Yang-Mills (1.19). L'*opérateur de Yang-Mills linéarisé* autour de \overline{A} est alors

$$(1.20) \quad P := \overline{\delta}\overline{d} + \overline{F} \lrcorner \in \text{Diff}^2(M; V_1),$$

où \overline{d} , $\overline{\delta}$ et \overline{F} sont donnés par la solution de fond \overline{A} . Par l'équation de Yang-Mills linéarisée on entend l'équation

$$(1.21) \quad PA = 0.$$

Les transformations de jauge sont décrites par l'opérateur différentiel

$$K := \overline{d} \in \text{Diff}^1(M; V_0, V_1).$$

En effet, un calcul direct donne $PK = 0$. On trouve aussi que $D_1 = P + KK^*$ s'écrit comme

$$D_1 = \overline{d}\overline{\delta} + \overline{\delta}\overline{d} + \overline{F} \lrcorner \in \text{Diff}^2(M; V_1)$$

et est un opérateur hyperbolique.

1.3. Hypothèses sur le fond. Nous faisons les hypothèses suivantes sur la connection de fond \bar{A} et l'espace-temps (M, g) .

Hypothèse 2.1. *L'espace-temps (M, g) est globalement hyperbolique, avec surface de Cauchy Σ difféomorphe soit à \mathbb{R}^d avec $d \geq 3$, soit à une variété compacte parallélisable.*

Hypothèse 2.2. *Si $\Sigma = \mathbb{R}^d$, on suppose que $h_{ij}(x)dx^i dx^j$ est une métrique lisse riemannienne sur Σ telle que :*

$$c^{-1}\mathbf{1} \leq [h_{ij}(x)] \leq c\mathbf{1}, \quad c > 0, \quad |\partial_x^\alpha h_{ij}(x)| \leq C_\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Hypothèse 2.3. *Si $\Sigma = \mathbb{R}^d$, on suppose que \bar{A} est une solution (globale) lisse de l'équation de Yang-Mills non linéaire (1.19) sur $\mathbb{R}_t \times \Sigma$ telle que*

- i) \bar{A} est dans la jauge temporelle, i.e. $\bar{A}_t = 0$,
- ii) $|\partial_x^\alpha \bar{A}_\Sigma(t, x)| \leq C_\alpha$, localement uniformément en t ,
- iii) $|\partial_x^\alpha \bar{\delta}_\Sigma \bar{F}_\Sigma(0, x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1}$, $|\partial_x^\alpha \bar{F}_t(0, x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-2}$ $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$,

où les composantes \bar{A}_Σ , \bar{A}_t , \bar{F}_Σ , \bar{F}_t de \bar{A} et de la courbure $\bar{F} = d\bar{A}$ sont définies par

$$\bar{A} =: \bar{A}_t dt + \bar{A}_\Sigma, \quad \bar{F} =: dt \wedge \bar{F}_t + \bar{F}_\Sigma,$$

1.4. Résultat principal de [Wr2]. Le premier théorème traite des métriques statiques.

Théorème 2.4 ([Wr2]). *Supposons l'Hypothèse 2.1 et si $\Sigma = \mathbb{R}^d$ supposons de plus les Hypothèses 2.2 et 2.3. Supposons que la métrique est de forme $g = -dt^2 + h_{ij}(x)dx^i dx^j$ sur $M = \mathbb{R}_t \times \Sigma$. Il existe alors des états de Hadamard pour l'équation de Yang-Mills sur (M, g) linéarisée autour de \bar{A} .*

Le deuxième théorème traite des espaces-temps plus généraux à condition que la solution de fond \bar{A} soit compacte en espace. Nous la déduisons du Théorème 2.4 par un argument de déformation qui généralise la méthode de Fulling, Narcowich et Wald [64]. Cette méthode repose sur la résolubilité globale de l'équation de Yang-Mills *non linéaire*, ce qui nécessite l'hypothèse $\dim M \leq 4$ pour pouvoir utiliser des résultats déjà existant dans la littérature [29].

Théorème 2.5 ([Wr2]). *Supposons les Hypothèses 2.1 et $\dim M \leq 4$. Soit $\bar{A} \in \mathcal{E}_{\text{sc}}^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ une solution lisse et compacte en espace de l'équation de Yang-Mills non linéaire (1.19) sur (M, g) . Il existe alors des états de Hadamard pour l'équation de Yang-Mills sur (M, g) linéarisée autour de \bar{A} .*

Il existe dans la littérature d'autres constructions pour l'équation de Maxwell ou de Yang-Mills linéarisée autour de la solution triviale $\bar{A} = 0$.

Dans ce cas spécial, l'argument de déformation standard permet de se réduire à un problème indépendant du temps, pour lequel il est possible d'utiliser des arguments de théorie spectrale, du moins sous des hypothèses sur la surface de Cauchy Σ qui rendent les problèmes à basse fréquence moins sérieux. Pour les équations de Maxwell, cette stratégie a été utilisée par Fewster et Pfenning [58] pour Σ compact avec premier groupe de cohomologie nul (ce qui étend des résultats antécédents de Furlani [65]), et

par Finster et Strohmaier [60] pour Σ vérifiant une condition d'absence de résonance en zéro pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les 1-formes. L'équation de Yang-Mills avec $\bar{A} = 0$ a été considérée par Hollands dans [82] pour Σ compact avec premier groupe de cohomologie nul.

Une méthode différente a été étudiée par Dappiaggi et Siemssen [35] sur des espace-temps asymptotiquement plats, où l'usage d'arguments de théorie spectrale est possible par intermédiaire d'un problème de Cauchy caractéristique (voir aussi Chapitre 3).

Le cas de fond non nul, $\bar{A} \neq 0$, est bien plus difficile et nécessite une analyse dépendante du temps. Soulignons que ce cas est essentiel à comprendre avant de pouvoir construire une théorie de gravité quantique effective (au sens d'une théorie des champs de spin 2) linéarisée autour d'une métrique autre que la métrique plate.

La méthode de démonstration consiste d'abord à généraliser les résultats du Chapitre 3 à des opérateurs différentiels comme D_1 , et à démontrer que les propriétés demandées de Λ_1^\pm peuvent être vérifiées modulo des termes régularisants. Ensuite, les propriétés exactes d'invariance de jauge et de positivité sont obtenues en modifiant Λ_1^\pm par des projections sur l'espace physique au niveau des données de Cauchy.

Les difficultés techniques viennent du fait que ces projections contiennent des termes contenant la différentielle spatiale d_Σ , par exemple $(\bar{\delta}_\Sigma \bar{d}_\Sigma)^{-1} \bar{\delta}_\Sigma$, dont la définition et les propriétés analytiques sont très délicates. Les aspects en basses fréquences sont partiellement résolus en utilisant une inégalité de Hardy pour le Laplacien de Hodge sur les 0-formes. Ensuite, l'outil clé développé dans [Wr2] est un calcul pseudo-différentiel qui contient des troncatures infrarouges de taille ajustable, et qui donc permet d'obtenir des inverses dans des situations où le calcul usuel donne seulement des paramètres.

2. Travail [Wr4] : Formalisme BRST en espace-temps courbe

2.1. Introduction au formalisme BRST. Dans des théories de jauge générales, il n'est pas toujours possible de se réduire à un problème hyperbolique juste en rajoutant à P un terme bien choisi.

Le *formalisme BRST* (nommé après Becchi, Rouet, Stora, et Tyutin) permet de traiter certaines de ces situations. Il consiste à introduire des degrés de liberté auxiliaires, nommés les *multiplieurs de Lagrange* b , les *fantômes* c , et les *anti-fantômes* \bar{c} . Cela signifie qu'on considère un fibré agrandi V , typiquement obtenu en prenant la somme directe de V_1 et de trois copies d'un autre fibré V_0 . En plus, pour pouvoir suivre les différents types de degrés de liberté, on introduit une graduation $\#gh$ appelée le *nombre fantôme*. La convention est d'attribuer le nombre fantôme 0 aux degrés de libertés physiques et aux multiplieurs de Lagrange, le nombre fantôme 1 aux fantômes c , et le nombre fantôme -1 aux anti-fantômes \bar{c} .

On introduit ensuite des termes supplémentaires au lagrangien, à partir duquel on obtient des équations de mouvement linéarisées, données par un opérateur différentiel $L \in \text{Diff}(M; V)$ qui est *hyperbolique* et *préserve la graduation*.

Ensuite, dans le but de retrouver l'espace physique, on introduit l'opérateur BRST γ , qui par construction est une symétrie nilpotente de L dans le sens que

$$(2.22) \quad \gamma^2 = 0, \quad \gamma^* L = L\gamma,$$

et de plus, γ diminue la graduation de un (à noter que cela diffère de la convention souvent utilisée où par opérateur BRST on entend l'opérateur γ^* qui augmente la graduation). Formellement, les degrés de liberté physiques sont retrouvés en considérant les solutions de $Lu = 0$ avec nombre fantôme 0 et en prenant ensuite l'espace quotient $\text{Ker } \gamma / \text{Ran } \gamma$.

Dans le travail [Wr4] nous donnons un sens rigoureux à cette construction dans le cadre général d'espace-temps globalement hyperboliques. Nous montrons que l'espace physique s'exprime comme la restriction d'un espace quotient

$$(2.23) \quad \frac{\text{Ker } L|_{\Gamma_{\text{sc}}} \cap \text{Ker } \gamma|_{\Gamma_{\text{sc}}}}{\text{Ran } G_L \gamma^*|_{\Gamma_c}}$$

aux sections de nombre fantôme 0, où G_L est le propagateur causal de L . Ici, la notation $\Gamma_c, \Gamma_{\text{sc}}$ signifie les sections lisses à support compact, resp. compact en espace (ou 'space-compact').

De plus, nous montrons que cet espace de phase est isomorphe à la restriction au nombre fantôme 0 d'un espace quotient $\text{Ker } \gamma_\Sigma / \text{Ran } \gamma_\Sigma$ où γ_Σ est un opérateur différentiel agissant sur les données de Cauchy de L . Cela donne les ingrédients de base nécessaires pour construire des états de Hadamard dans le cadre du formalisme BRST. Nous donnons quelques résultats dans cette direction en faisant d'abord le lien entre le formalisme BRST et l'approche plus simple de condition subsidiaire dans le cas de champs de Maxwell et de Yang-Mills et de Rarita-Schwinger.

2.2. Résultat principal de [Wr4]. L'enjeu principal est de comprendre comment les propriétés algébriques de l'opérateur BRST γ imposent une structure au niveau des solutions de L qui permet de retrouver l'espace physique de manière cohérente avec la cinématique. Il se trouve que l'aspect algébrique clé est une condition d'homologie triviale au niveau du nombre fantôme -1 .

Rappelons qu'un *fibré hermitien V avec graduation* ou un *fibré hermitien gradué* (indexé par un ensemble fini $I \subset \mathbb{Z}$) est une somme directe de fibrés hermitiens $V = \bigoplus_{i \in I} V_{[i]}$ munie d'une graduation définie sur les fibres.

Définition 2.6. Une codifférentielle A sur un fibré vectoriel V avec graduation est un opérateur $A \in \text{Diff}(M; V)$ qui vérifie

$$A^2 = 0, \\ A\Gamma(M; V_{[i]}) \subset \Gamma(M; V_{[i-1]}), \quad i \in I.$$

Si $F \subset E \subset \Gamma(M; V)$ on écrit

$$E/F|_{[i]} := \frac{E \cap \Gamma(M; V_{[i]})}{F \cap \Gamma(M; V_{[i]})}.$$

Nous formulons une hypothèse qui résume le cadre algébrique qu'on obtient typiquement dans le formalisme BRST.

Hypothèse 2.7. *Supposons que nous avons :*

- (1) un fibré vectoriel hermitien V sur M (avec graduation $\#gh$);
- (2) une codifférentielle $\gamma \in \text{Diff}(M; V)$ t.q.

$$H_{-1,c}(\gamma) := \frac{\text{Ker } \gamma|_{\Gamma_c}}{\text{Ran } \gamma|_{\Gamma_c}} \Big|_{[-1]} = \{0\};$$

- (3) un opérateur hyperbolique $L \in \text{Diff}(M; V)$ (dans le sens qu'il possède des propagateurs retardés et avancés), t.q. $L = L^*$ et

- a) $\gamma^* L = L \gamma$
- b) $L\Gamma(M; V_{[i]}) \subset \Gamma(M; V_{[-i]})$, $i \in I = \{-1, 0, 1\}$.

Nous démontrons le résultat suivant, qui donne une implémentation rigoureuse du formalisme BRST en espace-temps courbe pour des théories de jauges linéarisées.

Théorème 2.8 ([Wr4]). *Supposons l'Hypothèse 2.7. L'application*

$$[G_L] : \frac{\text{Ker } \gamma^*|_{\Gamma_c}}{(\text{Ran } \gamma^*|_{\Gamma_c} + \text{Ran } L|_{\Gamma_c} \cap \text{Ker } \gamma^*|_{\Gamma_c})} \Big|_{[0]} \longrightarrow \frac{\text{Ker } L|_{\Gamma_{sc}} \cap \text{Ker } \gamma|_{\Gamma_{sc}}}{\text{Ran } G_L \gamma^*|_{\Gamma_c}} \Big|_{[0]}$$

induite sur le quotient est bien définie et bijective. De plus, le premier espace muni de la forme hermitienne $i(\cdot|[G_L])_V$ est un espace de phase bien défini.

Notons par ϱ_L l'opérateur qui à chaque solution de L attribue ses données de Cauchy, et par U_L son inverse.

Théorème 2.9 ([Wr4]). *Supposons l'Hypothèse 2.7. Soit $\gamma_\Sigma := \varrho_L \gamma U_L$. L'application induite*

$$[\varrho_L] : \frac{\text{Ker } L|_{\Gamma_{sc}} \cap \text{Ker } \gamma|_{\Gamma_{sc}}}{\text{Ran } G_L \gamma^*|_{\Gamma_c}} \Big|_{[0]} \longrightarrow \frac{\text{Ker } \gamma_\Sigma|_{\Gamma_c}}{\text{Ran } \gamma_\Sigma|_{\Gamma_c}} \Big|_{[0]}$$

est bien définie et bijective.

2.3. Dégénération de la forme symplectique. Il a été observé par Dappiaggi, Hack et Sanders que l'espace de phase pour la théorie de Maxwell peut être dégénéré si la surface de Cauchy Σ est non compacte et topologiquement non triviale [32]. Ce phénomène est lié à l'effet d'Aharanov-Bohm et peut être décrit en termes de relation entre différents types de cohomologie sur Σ (toutes définies avec la différentielle d_Σ sur Σ).

Pour des théories de jauge plus générales, ce résultat ne se généralise pas de manière évidente. Par exemple, la 'différentielle' \bar{d}_Σ en théorie de Yang-Mills linéarisée n'est pas forcément nilpotente et donc ne définit pas de cohomologie directement. Par contre, dans notre cadre, l'opérateur γ_Σ^* est bien nilpotent (et de plus, augmente la graduation), et donc on peut définir une cohomologie en prenant le quotient

$$\frac{\text{Ker } \gamma_\Sigma^*}{\text{Ran } \gamma_\Sigma^*} \Big|_{[0]},$$

qui est formellement le dual de l'espace de phase du Théorème 2.9. Plus exactement, on distingue trois cohomologies, correspondant respectivement

aux sections lisses à support compact, aux sections lisses ainsi qu'aux distributions; nous les notons :

$$(2.24) \quad H_{\Gamma_c}(\gamma_\Sigma^*) \xrightarrow{\iota} H_\Gamma(\gamma_\Sigma^*) \xrightarrow{j} H_{\Gamma'_c}(\gamma_\Sigma^*),$$

où ι et j sont les plongements canoniques.

Théorème 2.10 ([Wr4]). *Les espaces de phase des Théorèmes 2.8 et 2.9 sont non dégénérés si et seulement si l'application $j \circ \iota$ (voir (2.24)) est injective.*

Nous montrons que dans la théorie de Maxwell, l'injectivité de j est simplement une conséquence de la dualité de Poincaré. Nous retrouvons alors le critère de [32] et nous obtenons en particulier que si la surface de Cauchy Σ est compacte ou topologiquement triviale alors l'espace de phase est non dégénéré.

Pour des théories de jagues non abeliennes, comme la théorie de Yang-Mills linéarisée, il est possible de trouver des exemples où $j \circ \iota$ n'est pas injectif même si Σ est topologiquement trivial. De manière intuitive, un problème d'injectivité peut avoir lieu s'il y a une 'charge cachée dans un trou', ou aussi, dans le cas de théories non abeliennes, dans une région où le champ de fond est non trivial.

2.4. États de Hadamard dans le formalisme BRST. Notons symboliquement $(-1)^{\text{gh}}$ la matrice dont les composantes sont $(-1)^{ij}$, où les indices i, j suivent la graduation de $V = \bigoplus_{i \in I} V_{[i]}$.

Pour une paire d'opérateurs $\Lambda_L^\pm : \Gamma_c(M; V) \rightarrow \Gamma'_c(M; V)$, considérons les conditions suivantes :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} i) & \quad \Lambda_L^\pm : \Gamma_c(M; V) \rightarrow \Gamma(M; V) \text{ est continue} \\ ii) & \quad \Lambda_L^\pm = \Lambda_L^{\pm*} \text{ pour } (\cdot|\cdot)_V \text{ sur } \Gamma_c(M; V), \\ iii) & \quad \Lambda_L^\pm L = 0, \\ iv) & \quad \Lambda_L^\pm \Gamma_c(M; V_{[i]}) \subset \Gamma(M; V_{[-i]}), \quad i \in I, \\ v) & \quad \Lambda_L^+ \mp (-1)^{\text{gh}} \Lambda_L^- = iG_L, \end{aligned}$$

où dans la dernière équation, le signe ' $-$ ' correspond au cas bosonique (Maxwell, Yang-Mills, etc.) et le signe ' $+$ ' au cas fermionique (Rarita-Schwinger, etc.). Une paire de fonctions à deux points d'un état de Hadamard doit vérifier les conditions (2.25) ainsi que :

$$\begin{aligned} (\text{g.i.}) & \quad \Lambda_L^\pm : \text{Ran } \gamma^*|_{\Gamma_c(M; V_{[0]})} \rightarrow \text{Ran } \gamma|_{\Gamma'_c(M; V_{[0]})}, \\ (\text{pos}) & \quad \Lambda_L^\pm \geq 0 \text{ sur } \text{Ker } \gamma^*|_{\Gamma_c(M; V_{[0]})}, \\ (\text{Had}) & \quad \text{WF}(\Lambda_L^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm, \end{aligned}$$

Pour construire des états de Hadamard, il est utile de se réduire à un cadre plus simple, comme celui considéré dans le sous-chapitre 1.2 pour les champs de Yang-Mills. Servons nous de ce dernier exemple pour illustrer une telle réduction, en suivant une idée de Hollands [82].

Soit V_0, V_1 deux fibrés hermitiens sur M . Soit $P \in \text{Diff}(M; V_1)$ t.q. $P^* = P$, et $K \in \text{Diff}(M; V_0, V_1)$ non nul t.q. $PK = 0$ et

$$D := P + KK^* \text{ et } R := K^*K$$

sont hyperboliques. Dans ce cas, on montre que l'Hypothèse 2.7 est vérifiée par

$$L := \begin{pmatrix} P & K & 0 & 0 \\ K^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^*K \\ 0 & 0 & K^*K & 0 \end{pmatrix} \in \text{Diff}(M; V_1 \oplus V_0^{\oplus 3})$$

et l'opérateur BRST suivant :

$$\gamma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Diff}(M; V_1 \oplus (V_0)^{\oplus 3}).$$

Alors, on peut chercher des fonctions à deux points Λ_L^\pm sous forme :

$$\Lambda_L^+ := \begin{pmatrix} \Lambda_D^+ & K\Lambda_R^+ & 0 & 0 \\ \Lambda_R^+ K^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_R^+ \\ 0 & 0 & \Lambda_R^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_L^- := \begin{pmatrix} \Lambda_D^- & K\Lambda_R^- & 0 & 0 \\ \Lambda_R^- K^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda_R^- \\ 0 & 0 & -\Lambda_R^- & 0 \end{pmatrix}$$

où Λ_D et Λ_R sont des bi-solutions pour respectivement D et R vérifiant les conditions évidentes ainsi que

$$K\Lambda_R^\pm = \Lambda_D^\pm K,$$

$$\Lambda_D^\pm \geq 0 \text{ sur } \text{Ker } K^*|_{\Gamma_c}.$$

Ceci est possible dans le cas de Yang-Mills grâce aux résultats obtenus dans le cadre de la condition subsidiaire.

Dans [Wr4] nous donnons aussi une telle réduction pour les champs de Rarita-Schwinger (i.e., de spin 3/2). Dans ce cas la définition de L et de γ est beaucoup plus compliquée, mais nous démontrons que c'est néanmoins un cas particulier de notre cadre.

Une extension naturelle de nos résultats (sans difficulté majeure) serait de considérer le *formalisme BV* (Batalin-Vilkovisky) qui généralise le formalisme BRST et est nécessaire dans le cas de la gravité linéarisée (champs de spin 2).

États de vide asymptotiques

L'exemple canonique d'un état de Hadamard est *l'état de vide* sur un espace-temps stationnaire. Dans le cas le plus simple de l'espace de Minkowski il peut être décrit ainsi :

Exemple 3.1. Soit $P_{\text{free}} = \partial_t^2 - \Delta_x + m^2$ et $m > 0$. Les fonctions à deux points de *l'état de vide* Λ_{vac}^\pm pour P_{free} sont données par :

$$(\Lambda_{\text{vac}}^\pm v)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm i(t-s)\sqrt{-\Delta_x + m^2}}}{\sqrt{-\Delta_x + m^2}} v(s) ds.$$

La démonstration de la condition de Hadamard pour Λ_{vac}^\pm est simple et se fait par exemple en utilisant le fait que le noyau de Schwartz est une solution de

$$(i^{-1}\partial_t \pm \sqrt{-\Delta_x + m^2})u(t, \mathbf{x}) = 0$$

dans chacune des deux variables spatio-temporelles.

Une question évidente qu'on peut se poser est la suivante : *Si l'espace-temps ressemble à l'espace de Minkowski quand $t = -\infty$, est-ce qu'il existe un état de vide asymptotiquement égal à l'état de vide ? Si oui, vérifie-t'il la condition de Hadamard ?* Non seulement cela semble être la construction généralisant l'état de vide la plus naturelle, mais aussi la question est importante du fait qu'une réponse affirmative permettrait d'établir une *théorie de diffusion* pour les champs quantiques sur espace-temps courbes avec une interaction purement géométrique.

Il n'est déjà pas évident ce que 'ressembler à l'espace de Minkowski à l'infini passé' veut dire, comment donner un sens aux données asymptotiques et comment revenir à des temps fini. Ce type de problème a été longuement étudié [159, 42, 43, 44], aussi dans le cas d'un espace-temps plat pour l'équation de Klein-Gordon ou Dirac avec un potentiel électromagnétique décroissant en temps [101, 119, 139, 145].

Cela n'indique cependant pas de solution à la difficulté principale dans notre question, qui est de démontrer la condition de Hadamard à partir de données asymptotiques. Dans les années 1970, faute de définition microlocale, ce problème était formulé en termes du comportement précis du noyau de Λ^\pm près de la diagonale, ce qui est extrêmement difficile à étudier directement. Les formulations en termes de front d'onde dans les années 1990 ont apporté plus de clarté, mais la question n'est pas mieux accessible si on y pense comme à un problème de contrôle de régularité C^∞ sous une limite $t \rightarrow -\infty$.

Une résolution a été trouvée par Moretti en 2008 [126, 127] dans le cas spécial de l'équation de Klein-Gordon avec un paramètre de masse m^2 qui fait que P se transforme bien sous transformations conformes de la métrique.

Il n'était toutefois pas clair comment s'en servir pour développer une théorie de diffusion, surtout qu'on ne savait pas dire si on perdait de l'information en passant aux temps finis, par exemple au niveau de la pureté de l'état.

Les articles présentés dans ce chapitre donnent une solution à ce problème, toujours en supposant une structure simple de l'infini temporel. L'article [Wr3] améliore l'approche de Moretti en la basant sur un *problème de Cauchy caractéristique* qu'on résout dans des espaces appropriés. Les deux autres articles abordent le cas de masse nulle et masse non nulle arbitraire avec des techniques différentes qui réunissent la théorie de diffusion et les phénomènes en haute fréquence.

1. Travail [Wr3] : Problème de Cauchy caractéristique

1.1. Intérieurs de cônes. La méthode de Moretti [126, 127] s'applique à l'équation d'onde conforme sur un *espace-temps asymptotiquement plat* (M_0, g_0) dit à *infini passé avec i^-* . Cette hypothèse géométrique dit qu'il existe une métrique \tilde{g}_0 conforme à g_0 telle que l'on peut plonger (M_0, \tilde{g}_0) dans un espace-temps plus large (M, g) , et le bord $C = \partial M_0$ de M_0 dans cet espace-temps est caractéristique pour l'équation d'onde. Le terme à *infini passé avec i^-* vient du fait que C ressemble à un cône avec le sommet (que l'on note souvent i^-) enlevé. Dans ce cadre, il est possible de définir des états dans M_0 à partir de données sur le bord C en utilisant l'adjoint formel de l'opérateur de trace. Le fait que C est caractéristique permet de contrôler le front d'onde dans M_0 à partir du front d'onde de traces sur le bord.

Cette idée a été utilisée par [126, 127] pour construire des états de vide asymptotiques dans le cas d'espace-temps asymptotiquement plats et de paramètre de masse conforme, et a été ensuite généralisée à d'autres situations géométriques par [33, 34, 24]. D'autres résultats comprennent une généralisation aux champs de Maxwell [35] ainsi qu'à la gravité linéarisée [16].

Toutefois, ces arguments ne sont pas suffisants pour savoir si en considérant des données asymptotiques on ne perd pas d'information. Une question particulièrement importante est la suivante : est-ce que les états de vide asymptotiques dans M_0 définis à partir de données sur C sont des états purs ?

Nous donnons une réponse positive (en dimension $1 + d = n \geq 4$) en résolvant le problème de Cauchy correspondant et en démontrant un théorème de densité pour les solutions lisses compactes en espace. Nous donnons aussi une caractérisation d'états de Hadamard plus généraux en termes de leurs traces sur C .

Pour plus de clarté, notre point de départ est un espace temps globalement hyperbolique (M, g) , a priori arbitraire, qui représente l'espace-temps non physique. Nous fixons ensuite un point $p \in M$ et considérons l'intérieur du cône de lumière futur

$$C := \partial J_+(p) \setminus \{p\}$$

comme l'espace-temps physique M_0 d'intérêt principal.

Nous faisons l'hypothèse suivante sur la géométrie de C .

Hypothèse 3.2. *Nous supposons qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que :*

- (1) $C \subset f^{-1}(\{0\})$, $\nabla_a f \neq 0$ sur C , $\nabla_a f(p) = 0$, $\nabla_a \nabla_b f(p) = -2g_{ab}(p)$,
- (2) le champ de vecteurs $\nabla^a f$ est complet sur C .

Avec l'Hypothèse 3.2 on peut construire des coordonnées (f, s, θ) près de C , telles que $C \subset \{f = 0\}$ et

$$g|_C = -2df ds + h(s, \theta) d\theta^2,$$

où $h(s, \theta) d\theta^2$ est une métrique riemannienne sur \mathbb{S}^{d-1} .

Grâce à ces coordonnées on peut identifier C avec $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$, et avec plus de soin il est possible de se réduire au cas où on la métrique canonique sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} (ce que nous allons supposer pour simplicité de notation). Un espace naturel de fonctions lisses sur C est alors donné par $H^\infty(C)$ — l'intersection des espaces de Sobolev de tout ordres.

On considère l'opérateur de Klein-Gordon $P = -\square_g + V(x)$ sur $(M_0, g|_{M_0})$ avec un potentiel lisse réel V . Il n'y a pas besoin d'hypothèses supplémentaires sur V pour nos résultats, mais il faut garder en tête que le cas le plus important est l'équation conforme $P = -\square_g + \frac{n-2}{4(n-1)}R$ (où R est la courbure scalaire), qui a la même allure dans l'espace-temps conformément relié (M_0, g_0) considéré physique.

1.2. Problème de Cauchy caractéristique. Soit Σ une surface de Cauchy pour (M, g) située dans le futur de $\{p\}$ et soit $\Sigma_0 := \Sigma \cap M_0$. On pose aussi :

$$M_1 := I_-(\Sigma_0) \cap M_0, \quad C_0 := (J_-(\Sigma_0) \cap C) \cup \{p\},$$

voir Figure 1, où $I_-(K)$ est l'intérieur de $J_-(K)$. M_1 est relativement compact dans M avec $\partial M_1 = \Sigma_0 \cup C_0$, Σ_0 et C_0 sont compacts dans M avec bord lisse $\partial \Sigma_0 = \partial C_0$. On note par $H_0^1(\Sigma_0)$, $H_0^1(C_0)$ les espaces de distributions dans $H^1(\Sigma_0)$, $H^1(C_0)$ qui s'annulent sur le bord.

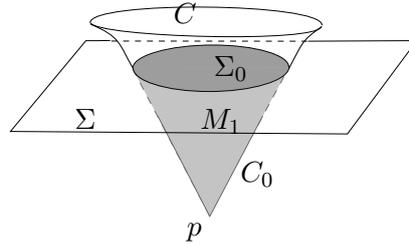


FIGURE 1. L'intérieur du cône et son intersection Σ_0 avec une surface de Cauchy Σ pour (M, g) .

Si $f \in H_0^1(\Sigma_0) \oplus L^2(\Sigma_0)$ est une paire de données de Cauchy, on note par $e_{\Sigma_0} f$ son extension par 0 à Σ et par $u = U_{\Sigma_0} f$ la restriction à M_1 de la solution du problème de Cauchy non caractéristique :

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ in } M \\ \varrho u = e_{\Sigma_0} f \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $\varrho u = (u|_{\Sigma}, i^{-1}\partial_n u|_{\Sigma})$. Par des estimées d'énergie usuelles il est possible de démontrer que $U_{\Sigma_0} : H_0^1(\Sigma_0) \oplus L^2(\Sigma_0) \rightarrow H^1(M_1)$ est continue.

Notre résultat principal dans [Wr3] est le théorème suivant :

Théorème 3.3 ([Wr3]). *L'application*

$$T : H_0^1(\Sigma_0) \oplus L^2(\Sigma_0) \rightarrow H_0^1(C_0) \\ f \mapsto (U_{\Sigma_0} f)|_{C_0}$$

est un homéomorphisme. De plus, si $\dim M \geq 4$ alors $T(C_0^\infty(\Sigma_0) \oplus C_0^\infty(\Sigma_0))$ est dense dans $|D_s|^{-\frac{1}{2}}L^2(C)$.

La première partie du Théorème 3.3 est équivalente à l'existence et l'unicité de solutions dans M_1 du problème de Cauchy caractéristique :

$$\begin{cases} Pu = 0, & \text{dans } M_1, \\ u|_{C_0} = \varphi, & \varphi \in H_0^1(C_0). \end{cases}$$

La démonstration se fait par réduction à un cas déjà considéré par Hörmander dans [95], quand l'hypersurface caractéristique est le graphe d'une fonction lipschitzienne définie sur un domaine *compact*.

En plus du travail [95] il existe une littérature considérable sur le problème de Cauchy caractéristique pour l'équation de Klein-Gordon, par exemple [12, 26, 46, 130]. Mentionnons aussi des travaux pour l'équation de Dirac [129, 77, 102]. La première partie du Théorème 3.3 peut être en effet conclue d'un résultat de Bär et Wafo [12, Thm. 23], paru très brièvement avant notre travail. La deuxième partie (la densité) est cependant bien plus délicate. Il est questionnable qu'elle serait vraie pour $|D_s|^{-\alpha}L^2(C)$ avec $\alpha < \frac{1}{2}$ au lieu de $\alpha = \frac{1}{2}$, et il n'est à ce jour pas clair s'il est possible de prendre $d < 3$.

1.3. Condition de Hadamard en termes de données caractéristiques. La construction d'états de Hadamard à partir de données caractéristiques nécessite moins d'informations analytiques que ne donne le Théorème 3.3. Par contre, il est essentiel de pouvoir contrôler la relation $\Lambda^+ - \Lambda^- = iG$ pour les fonctions à deux points (où G est comme dans les chapitres précédents le propagateur causal pour P) ainsi que le front d'onde de Λ^\pm .

L'ingrédient clé est le fait que pour un $\beta(s, \theta) \in C^\infty(M_0)$ bien choisi, l'opérateur de trace

$$\varrho_C \phi := (\beta^{-1}\phi)|_C, \quad \phi \in C_{\text{sc}}^\infty(M_0)$$

agissant sur les solutions lisses compactes en espace est injectif. L'image de ϱ_C est dans $H^\infty(C)$, et la forme symplectique canonique induit une forme symplectique sur $H^\infty(C)$ donnée par :

$$(1.26) \quad \bar{g}_1 \sigma_C g_2 := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}} (\partial_s \bar{g}_1 g_2 - \bar{g}_1 \partial_s g_2) |m|^{\frac{1}{2}}(\theta) ds d\theta, \quad g_1, g_2 \in H^\infty(C).$$

Étant donné une paire d'opérateurs $\lambda^\pm : H^\infty(C) \rightarrow H^\infty(C)$ tels que $\lambda^+ - \lambda^- = i\sigma_C$, on obtient une paire de fonctions à deux points dans M_0 en posant

$$(1.27) \quad \Lambda^\pm := (\varrho_C \circ G)^* \circ \lambda^\pm \circ (\varrho_C \circ G).$$

Nous formulons maintenant un résultat sur le front d'onde de (1.27). Introduisons d'abord quelques notations. Si M_1, M_2 sont deux variétés lisses,

on identifie $T^*(M_1 \times M_2)$ avec $T^*M_1 \times T^*M_2$ et on note par $(T^*M_1 \times T^*M_2) \setminus o$ l'image de $T^*(M_1 \times M_2) \setminus o$ sous cette identification. Si $\Gamma \subset (T^*M_1 \times T^*M_2) \setminus o$ on pose :

$$(1.28) \quad \begin{aligned} M_1\Gamma &:= \{(x_1, \xi_1) : \exists x_2 \text{ t.q. } (x_1, \xi_1, x_2, 0) \in \Gamma\} \subset T^*M_1 \setminus o_1, \\ \Gamma_{M_2} &:= \{(x_2, \xi_2) : \exists x_1 \text{ t.q. } (x_1, 0, x_2, \xi_2) \in \Gamma\} \subset T^*M_2 \setminus o_2, \end{aligned}$$

où o_i est la section zéro de T^*M_i .

On notera par $Y = ((s, y), (\sigma, \eta))$ les points dans le fibré cotangent T^*C . On notera aussi Δ_{T^*C} la diagonale dans $T^*C \times T^*C$.

Théorème 3.4 ([Wr3]). *Soit $\lambda^\pm : H^\infty(C) \rightarrow H^\infty(C)$ une paire d'applications continues et posons*

$$\Lambda^\pm := (\varrho_C \circ G)^* \circ \lambda^\pm \circ (\varrho_C \circ G).$$

Alors $\Lambda^\pm \in \mathcal{D}'(M_0 \times M_0)$. Si λ^\pm vérifient :

- i) $\text{WF}(\lambda^\pm)' \cap \{(Y_1, Y_2) : \pm\sigma_1 < 0 \text{ ou } \pm\sigma_2 < 0\} = \emptyset$,
- ii) $\text{WF}(\lambda^+ - \lambda^-)' \cap \{(Y_1, Y_2) : \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \neq 0\} \subset \Delta_{T^*C}$,

alors :

$$\text{iii) } \text{WF}(\lambda^\pm)' \cap \{(Y_1, Y_2) : \pm\sigma_1 > 0 \text{ et } \pm\sigma_2 > 0\} \subset \Delta_{T^*C}.$$

De plus, supposons ${}_C\text{WF}(\lambda^\pm)' = \text{WF}(\lambda^\pm)'_C = \emptyset$ (voir (1.28)). Alors les conditions i) et iii) ci-dessus impliquent la condition de Hadamard pour Λ^\pm .

Ce théorème généralise un argument de Moretti, et à part les théorèmes standards sur le front d'onde de composition d'opérateurs, il utilise un lemme géométrique [127, Lemme 4.3], pour éviter des problèmes au sommet du cône : pour chaque compact $K \subset M_0$ on peut trouver un voisinage de p dans \overline{C} (au sens de l'espace-temps plus large M) qui n'intersecte aucune géodésique nulle partante de K .

1.4. Calcul pseudo-différentiel de type produit. Observons que sur le cône C , la coordonnée s est distinguée en même temps du point de vue de la condition de Hadamard et de l'expression (1.26) pour la forme symplectique. Cela suggère que le calcul pseudo-différentiel sur C utile dans ce contexte est un calcul $\Psi^{p_1, p_2}(C)$ de type produit dont les symboles vérifient les estimées :

$$|\partial_s^{\alpha_1} \partial_\sigma^{\beta_1} \partial_\theta^{\alpha_2} \partial_\eta^{\beta_2} a(s, \theta, \sigma, \eta)| \in O(\langle \sigma \rangle^{p_1 - |\beta_1|} \langle \eta \rangle^{p_2 - |\beta_2|})$$

dans les variables duales $\xi = (\sigma, \eta)$ relatives à la décomposition $C = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$. Du fait que la forme symplectique σ_C est définie en termes de l'opérateur $D_s := i^{-1} \partial_s$ dont le spectre n'est pas séparé de $\{0\}$, il est pratique d'introduire une classe plus large $\tilde{\Psi}^{p_1, p_2}(C)$ qui contient certains opérateurs dont le symbole est discontinu en $\eta = 0$. On pose :

$$\tilde{\Psi}^{p_1, p_2}(C) := \Psi^{p_1, p_2}(C) + B^{-\infty} \Psi^{p_2}(C),$$

où $B^{-\infty} \Psi^{p_2}(C)$ est la classe d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre p_2 (dans les variables θ) à valeurs dans les opérateurs dans \mathbb{R} qui augmentent infiniment la régularité de Sobolev. Avec cette définition on a par exemple

$|D_s| \otimes \mathbf{1}_\theta \in \tilde{\Psi}^{1,0}(C)$ bien que cet opérateur n'appartienne pas à la classe $\Psi^{1,0}(C)$.

Une des difficultés vient du fait que pour $a \in \Psi^{p_1,p_2}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1})$ il n'est en général pas vrai que $\text{WF}(a)'$ est un sous-ensemble de la diagonale $\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}}$ (comme il serait le cas pour un opérateur dans $\Psi^p(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1})$). Plutôt, on a l'estimée plus faible suivante.

Lemme 3.5 ([20]). *Soit $a \in \Psi^{p_1,p_2}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1})$. Alors :*

$$\text{WF}(a)' \subset (\Delta_{\mathbb{R}} \times \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}) \cup (\Delta_{\mathbb{R}} \times (o_{\mathbb{S}^{d-1}} \times o_{\mathbb{S}^{d-1}})) \cup ((o_{\mathbb{R}} \times o_{\mathbb{R}}) \times \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}).$$

1.5. Construction d'états de Hadamard. Posons maintenant

$$L_{\pm}^2(C) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(D_s)L^2(C)$$

et notons $i_{\pm} : L_{\pm}^2(C) \rightarrow L^2(C)$ l'injection isométrique correspondante, ce qui donne que $\pi_{\pm} := i_{\pm}i_{\pm}^* = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(D_s)$ est la projection orthogonale sur $L_{\pm}^2(C)$ dans $L^2(C)$. Posons aussi

$$(1.29) \quad H_{\pm}^{\infty}(C) := i_{\pm}^*H^{\infty}(C) \subset H^{\infty}(C).$$

Il est utile de considérer des paires d'opérateurs λ^{\pm} de forme :

$$(1.30) \quad \lambda^{\pm} = (2|D_s|)^{\frac{1}{2}}c^{\pm}(2|D_s|)^{\frac{1}{2}}, \text{ où } c^{\pm} \in \tilde{\Psi}^{p_1,p_2}(C),$$

pour $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Pour un opérateur c , ses composantes sont définies par

$$c_{\alpha\beta} = i_{\alpha}^* \circ c \circ i_{\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{+, -\}.$$

Finalement, pour $\alpha, \beta \in \{+, -\}$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ posons :

$$\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{p_1,p_2}(C) := i_{\alpha} \circ \tilde{\Psi}^{p_1,p_2}(C) \circ i_{\beta}^*.$$

Théorème 3.6 ([Wr3]). *Supposons que les composantes de c sont de forme*

$$\begin{aligned} c_{++} &= \mathbf{1} + a_+^* a_+, & c_{--} &= a_-^* a_-, \\ c_{+-} &= c_{-+}^* = a_+^* d a_-, \end{aligned}$$

avec $a_+ \in \tilde{\Psi}_{++}^{-\infty,0}(C)$, $a_- \in \tilde{\Psi}_{--}^{-\infty,0}(C)$, et $d \in \tilde{\Psi}_{+-}^{0,0}(C)$ t.q. $\|d\|_{B(L_{-}^2(C), L_{+}^2(C))} \leq 1$.

1. Soit $\lambda^+ = (2|D_s|)^{\frac{1}{2}}c(2|D_s|)^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda^- = \lambda^+ - 2D_s$. Alors la paire λ^{\pm} vérifie les conditions du Théorème 3.4 et par conséquent définit une paire de fonctions à deux points de Hadamard Λ^{\pm} .

Remarque 3.7. Le cas spécial $a_+ = 0$, $a_- = 0$ et $d = 0$ dans le Théorème 3.6 donne comme fonctions à deux points sur le cône caractéristique C

$$\lambda^{\pm} = \pm 2\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(D_s)D_s.$$

Dans le cadre des espace-temps asymptotiquement plats avec infini temporel passé i^- cela correspond à l'état de vide asymptotique étudié par Moretti [126, 127].

Les opérateurs du Théorème 3.6 définissent des états pour la théorie sur le bord. Leur *pureté* (voir Définition 1.5) est essentiellement équivalente à $c^2 = c$ (ce qui est largement analogue au fait que les projections sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des opérateurs positifs bornés).

Nous montrons que c'est le cas si et seulement s'il existe un opérateur $a \in \tilde{\Psi}_{-+}^{-\infty,0}(C)$ tel que

$$c = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + a^*a & a^*(\mathbf{1} + aa^*)^{\frac{1}{2}} \\ (\mathbf{1} + aa^*)^{\frac{1}{2}}a & aa^* \end{pmatrix}.$$

Il est ensuite possible de vérifier que l'espace d'une particule défini par les opérateurs λ^\pm correspondant (c'est à dire la complétion de $H^\infty(C)$ pour le produit scalaire $\frac{1}{2}(\cdot|(\lambda^+ + \lambda^-)\cdot)$) est égal à $|D_s|^{-\frac{1}{2}}L^2(C)$.

Cela explique le rôle de l'espace $|D_s|^{-\frac{1}{2}}L^2(C)$ dans le Théorème 3.3. Grâce à ce théorème nous avons suffisamment de contrôle au niveau du problème de Cauchy caractéristique pour déduire des propriétés de solutions en espace-temps à partir de données dans $|D_s|^{-\frac{1}{2}}L^2(C)$. Cela permet de démontrer par exemple le résultat suivant.

Théorème 3.8 ([Wr3]). *Supposons $\dim M \geq 4$. Soit ω_C un état pur sur*

$$\text{CCR}(H^\infty(C), i\sigma_C)$$

défini par une paire d'opérateurs λ^\pm comme dans le Théorème 3.6. Alors l'état ω induit par ω_C sur $\text{CCR}(C_c^\infty(M_0) / PC_c^\infty(M_0), iG)$ est un état pur.

2. Travaux [Wr10] et [Wr11] : Estimées de propagation radiales

Rappelons que dans notre problème, la difficulté principale est de contrôler le front d'onde de solutions à partir de propriétés de données asymptotiques. Une approche générale à ce problème est basée sur les *estimées de propagations près de points radiaux*. Ces estimées généralisent le théorème de propagation de singularités de Hörmander à des points où le flot bicaractéristique dégénère. Une observation clé due à Vasy est que sous des hypothèses globales sur l'espace-temps il est possible de réinterpréter le flot bicaractéristique en compactifiant les fibres de l'espace cotangent et de l'espace physique en même temps, de façon à faire apparaître une structure de *puits* et de *sources* à l'infini temporel. En imposant de la régularité aux puits ou aux sources il est alors possible de contrôler le front d'onde à des temps finis.

Ce phénomène a été utilisé pour la première fois dans un contexte proche de la théorie des champs par Gell-Redman, Haber et Vasy dans le cas d'espaces asymptotiquement Minkowski [68]. Ils s'en servent pour donner une version plus forte du théorème de Duistermaat et Hörmander sur les paramétrices distingués au sens qu'ils obtiennent des inverses modulo des termes compacts et régularisants (plutôt que juste régularisants). L'idée générale est que les théorèmes de propagation sont exprimés comme des estimées microlocalisées le long du flot bicaractéristique, qui peuvent être ensuite combinées de façon à donner une estimée globale, du moins si on peut contourner les problèmes éventuels engendrés par le trapping. Si c'est bien le cas, l'estimée finale se traduit comme la propriété de Fredholm de P agissant entre certains espaces de Hilbert $\mathcal{X}_I, \mathcal{Y}_I$ qui généralisent les espaces de Sobolev anisotropes. On obtient comme ça des inverses généralisés P_I^{-1}

et leur front d'onde peut se déduire de la définition des espaces $\mathcal{X}_I, \mathcal{Y}_I$, qui codifient la régularité le long du flot bicaractéristique de manière consistante avec la direction de propagation choisie. Comme on a deux choix de direction pour les deux composantes de la variété caractéristique, on trouve bien quatre inverses généralisés : deux opérateurs P_+^{-1} et P_-^{-1} qui correspondent aux propagateurs retardés et avancés dans le cas globalement hyperbolique, ainsi que deux paramétrices de *Feynman* et *anti-Feynman*.

Malheureusement, bien que ce résultat semble être un mélange semblable d'aspects microlocaux et globaux, la stratégie ne permet pas d'obtenir directement des états de Hadamard. Bien qu'on puisse obtenir plutôt facilement une paire d'opérateurs Λ^\pm vérifiant la condition de Hadamard en prenant la différence de deux inverses généralisés de P bien choisis, il n'y aurait aucune raison de s'attendre à ce que la condition de positivité $\Lambda^\pm \geq 0$ soit alors vérifiée en dehors de cas exceptionnels (même si sous des hypothèses générales il est tout à fait possible d'obtenir la positivité de $\Lambda^+ + \Lambda^- \geq 0$ [156]).

Cela motive d'avantage une construction en termes de données asymptotiques. Dans le travail [Wr10] nous proposons une *théorie de diffusion géométrique* basée sur les estimées de propagation. Nous nous en servons pour construire des états de Hadamard uniquement associés à la géométrie globale dans le cas de l'équation d'onde sur des espaces *asymptotiquement Minkowski* et de l'équation de Klein-Gordon sur des espaces *asymptotiquement de Sitter*.

Nous définissons les données asymptotiques en identifiant les solutions comme des distributions conormales d'un certain type. Ensuite nous nous servons des inverses de P pour construire les *opérateurs de Poisson* associés (qu'on pourrait peut-être aussi appeler *opérateurs de Møller*, bien que contrairement à la théorie de diffusion conventionnelle, on ne fait pas recours à une dynamique de comparaison), c'est-à-dire les applications qui attribuent aux données asymptotiques les solutions correspondantes.

2.1. Espaces asymptotiquement Minkowski. Pour illustrer notre cadre, donnons d'abord l'exemple de la compactification radiale de l'espace de Minkowski.

Concrètement, si $M^\circ = \mathbb{R}^{1+d}$ est l'espace de Minkowski muni de sa métrique $g = dz_0^2 - (dz_1^2 + \dots + dz_d^2)$, on le remplace par la variété à bord compacte M en faisant le changement de coordonnées $z_i = \rho^{-1}\vartheta_i$ (avec ϑ_i les coordonnées sur la sphère \mathbb{S}^d) loin de l'origine, et encollant une sphère à l'infini spatio-temporel, c'est-à-dire le bord de M est donné par $\partial M = \{\rho = 0\}$ avec $\rho = (z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_d^2)^{-1/2}$. Dans le cadre de la b-analyse de Melrose [122], qui est au coeur de notre approche, la régularité et la décroissance sont mesurées relativement aux *b-espaces de Sobolev* à poids

$$H_b^{m,l}(M) = \rho^l H_b^m(M).$$

Loin de l'origine, le b-espace de Sobolev $H_b^m(M)$ peut être défini en considérant $H^m(\mathbb{R}^{1+d})$ dans un système de coordonnées où une des coordonnées est donnée par $-\log \rho$. Cela correspond à de la régularité par rapport à $\rho \partial_\rho$ plutôt que par rapport à ∂_ρ . L'espace des fonctions lisses qui s'annulent à

tout ordre sur le bord peut être alors écrit comme $\dot{C}^\infty(M) = \bigcap_{m,l \in \mathbb{R}} H_b^{m,l}(M)$, et son dual est un espace de distributions utile que l'on notera $C^{-\infty}(M)$.

La définition de $H_b^{m,l}(M)$ se généralise à d'autres variétés à bord et peut être aussi modifiée de manière à permettre des ordres m anisotropes, c'est-à-dire qui varient sur M et dans les variables duales [154]. Dans notre situation, nous avons besoin d'un ordre m qui est monotone le long du flot bicaractéristique (réinterprété, comme nous allons le voir) et pour chacune des deux composantes connexes ${}^b\mathcal{N}^\pm$, on demande que m soit supérieur à une valeur de seuil $\frac{1}{2} - l$ près d'un bout et inférieur à $\frac{1}{2} - l$ près de l'autre. Cela donne au total quatre choix différents que l'on étiquètera avec un ensemble $I \subset \{+, -\}$ qui indique les composantes de ${}^b\mathcal{N}^+ \cup {}^b\mathcal{N}^-$ le long desquelles m est choisi croissant. Bien qu'après avoir fixé I il reste une grande flexibilité dans le choix précis de (m, l) , ce choix n'est pas essentiel pour les propriétés d'inversibilité ou de Fredholm que nous allons discuter, et il est convenable de prendre m arbitrairement haut là où c'est possible. Le résultat de Gell-Redman, Haber et Vasy [68] dit que l'opérateur d'onde conjugué avec certaines puissances de ρ ,

$$P := \rho^{-(d-1)/2} \rho^{-2} \square_g \rho^{(d-1)/2} : \mathcal{X}^{m,l} \rightarrow \mathcal{Y}^{m-1,l},$$

est un opérateur de Fredholm si on l'interprète comme agissant sur les espaces de Hilbert

$$\mathcal{X}^{m,l} := \left\{ u \in H_b^{m,l}(M) : Pu \in H_b^{m-1,l}(M) \right\}, \quad \mathcal{Y}^{m,l} := H_b^{m-1,l}(M),$$

pour n'importe quel ordre m, l consistant avec le choix de $I \subset \{+, -\}$, sauf pour un ensemble discret de valeurs de l . De plus P est inversible pour petit $|l|$ (plus généralement, cela reste vrai si M est une petite perturbation de la compactification radiale de l'espace-temps de Minkowski). Avec ces conventions, les opérateurs $P_{\{\pm\}}^{-1}$ coïncident sur $C_c^\infty(M^\circ)$ avec les propagateurs avancés/retardés G_{\mp}^\pm (il est donc mieux de les renommer P_{\mp}^{-1}). Les deux autres, P_{\emptyset}^{-1} et $P_{\{+,-\}}^{-1}$, sont nommés les propagateurs de Feynman et d'anti-Feynman.

Introduisons maintenant le cadre géométrique plus général.

Soit M une variété lisse n -dimensionnelle à bord ∂M (on suppose $n \geq 2$), et soit ρ une fonction définissant le bord ∂M , c'est-à-dire $\partial M = \{\rho = 0\}$ et $d\rho \neq 0$ sur ∂M . Soit g une métrique lisse non dégénérée au sens du fibré cotangent de scattering ${}^{\text{sc}}T^*M$. Ce dernier est par définition le fibré dont les sections sont localement données par les $C^\infty(M)$ -combinaisons linéaires des formes différentielles

$$\rho^{-2} d\rho \text{ et } \rho^{-1} dw = (\rho^{-1} dw_1, \dots, \rho^{-1} dw_{n-1}),$$

où $w = (w_1, \dots, w_{n-1})$ sont des coordonnées sur ∂M . Suivant [10, 75, 68] on définit :

Définition 3.9. *On dit que (M, g) est un espace de scattering Lorentzien s'il existe $\mu \in C^\infty(M)$ t.q. la différentielle de $\mu|_{\partial M}$ est non dégénérée sur $S := \{\rho = 0, \mu = 0\}$ et de plus :*

- (1) sur ∂M , $\rho^2 \partial_\rho \cdot g \rho^2 \partial_\rho$ a le même signe que μ ;

(2) g est de la forme

$$g = \mu \frac{d\rho^2}{\rho^4} - \left(\frac{d\rho}{\rho^2} \otimes \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho} \otimes \frac{d\rho}{\rho^2} \right) - \frac{\tilde{g}}{\rho^2},$$

où $\tilde{g} \in C^\infty(M; \text{Sym}^2 T^*M)$ avec restriction $\tilde{g}|_{(d\rho, d\mu)^{\text{ann}}}$ positive définie¹ sur S , et α est une 1-forme sur M telle que $\alpha = d\mu/2 + O(\mu) + O(\rho)$ dans un voisinage de S .

La sous-variété $S = \{\mu = 0, \rho = 0\}$ est appelée le *cône de lumière à l'infini*.

Expliquons comment la compactification radiale de l'espace de Minkowski $n = 1 + d$ -dimensionnel rentre dans ce cadre. Écrivons la métrique de Minkowski comme $dz_0^2 - (dz_1^2 + \dots + dz_d^2)$, $z_0 = \rho^{-1} \cos \theta$, $z_i = \rho^{-1} \omega_i \sin \theta$, (près de $\rho = 0$), avec $\rho = (z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_d^2)^{-1/2}$ et ω_i les coordonnées sur la sphère \mathbb{S}^{d-2} . Un changement de coordonnées de plus,

$$\mu = \cos 2\theta = \rho^2(z_0^2 - (z_1^2 + \dots + z_d^2)),$$

ramène la métrique sous la forme

$$g = \mu \frac{d\rho^2}{\rho^4} - \frac{\mu}{4(1-\mu^2)} \frac{d\mu^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{\rho^2} \otimes \frac{d\mu}{\rho} + \frac{d\mu}{\rho} \otimes \frac{d\rho}{\rho^2} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{d\omega^2}{\rho^2},$$

qui est bien un cas spécial de la Définition 3.9 avec $\alpha = d\mu/2$.

Nous avons aussi besoin d'hypothèses globales sur le flot bicaractéristique.

Comme dans le cas de l'espace de Minkowski, on considère l'opérateur d'onde conjugué avec des puissances de ρ :

$$(2.31) \quad P := \rho^{-(n-2)/2} \rho^{-2} \square_g \rho^{(n-2)/2}.$$

Comme ça, P est un *opérateur b-différentiel*, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire localement comme un polynôme en $\rho \partial_\rho$ et ∂_w à coefficients $C^\infty(M)$ (où $C^\infty(M)$ signifie C^∞ à l'intérieur et prolongeabilité lisse à travers le bord).

Son symbole principal p définit de manière naturelle le *champ de vecteurs hamiltonien* H_p sur le *fibré b-cotangent* ${}^b T^*M$ privé de la section zéro o . Une façon intuitive de définir le fibré ${}^b T^*M$ est de dire que ses sections sont localement des $C^\infty(M)$ -combinaisons linéaires de $\rho^{-1} d\rho$ et dw . Le champ de vecteurs hamiltonien dans ce cadre est alors

$$H_p := (\partial_\zeta p) \rho \partial_\rho - (\rho \partial_\rho p) \partial_\zeta + \sum_i (\partial_{\zeta_i} p) \partial_{w_i} - (\partial_{w_i} p) \partial_{\zeta_i}$$

en écrivant les points dans ${}^b T^*M$ comme (ρ, w, ζ) . Il est utile de compactifier ${}^b T^*M$ dans les fibres : une construction de Melrose, [124, Ch. 1.8], fournit une fonction $\tilde{\rho} \in C^\infty({}^b T^*M \setminus o)$, homogène de degré -1 , qui sert de fonction définissant le bord ${}^b S^*M := \partial {}^b \overline{T^*M}$ de la compactification ${}^b \overline{T^*M}$. Puisque p est homogène de degré 2, on peut identifier $\tilde{\rho}^2 p$ avec une fonction sur ${}^b S^*M$. On appellera l'ensemble où cette fonction s'annule *l'ensemble caractéristique* de P et on le notera ${}^b \mathcal{N}$. Le *flot bicaractéristique* de P , Φ_t , est défini dans ce cadre comme le flot du champ de vecteurs $\tilde{\rho} H_p$ dans ${}^b \mathcal{N}$. Les *bicaractéristiques* sont les courbes intégrales de $\tilde{\rho} H_p$ dans ${}^b \mathcal{N}$.

1. Ici $\tilde{g}|_{(d\rho, d\mu)^{\text{ann}}}$ signifie la restriction de \tilde{g} à l'annihilateur de l'espace engendré par $d\rho, d\mu$.

Nous complétons ρ et μ avec des coordonnées y et nous notons γ la variable duale à μ .

Hypothèse 3.10. *On suppose que (M, g) est un espace de scattering Lorentzien avec la propriété suivante de non-trapping (ou de non capture) :*

- (1) $S = \{\mu = 0, \rho = 0\}$ est la somme disjointe de deux composantes $S = S_+ \cup S_-$,
- (2) $\{\mu > 0, \rho = 0\} \subset \partial M$ a deux composantes X_\pm (les ‘calottes Nord et Sud’) telles que $S_\pm = \partial X_\pm$,
- (3) chaque bicaractéristique maximale étendue commence en ${}^bSN^*S_+$ et finit en ${}^bSN^*S_-$ ou vice versa, où ${}^bSN^*S_\pm$ sont les deux composantes (relativement à la décomposition $S = S_+ \cup S_-$) de :

$${}^bSN^*S = \left\{ (0, 0, y, 0, \gamma, 0) \in {}^bS^*M \right\}.$$

Si l’Hypothèse 3.10 est vérifiée alors on dit que (M, g) est un *espace-temps asymptotiquement Minkowski*.

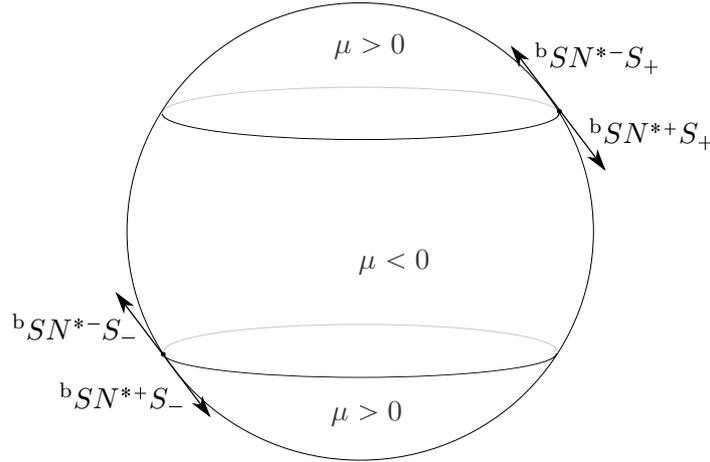


FIGURE 2. Un espace-temps asymptotiquement Minkowski M . Les ensembles radiaux se trouvent en dessus de $S = S_+ \cup S_-$ et se décomposent en puits et sources ${}^bSN^{*\pm}S_\pm$.

Comme dans le cadre habituel (c’est-à-dire non compactifié), la variété caractéristique ${}^b\mathcal{N} \subset {}^bS^*M$ de P a deux composantes connexes ${}^b\mathcal{N}^\pm$. Par contre, le nouvel aspect c’est que le flot bicaractéristique dégénère au dessus de $S = S_+ \cup S_-$. De plus, on peut montrer que ${}^bSN^*S_\pm$ a deux composantes ${}^bSN^{*\pm}S_\pm$ (qui correspondent à la décomposition ${}^b\mathcal{N} = {}^b\mathcal{N}^+ \cup {}^b\mathcal{N}^-$), qui agissent comme des sources (-) ou des puits (+) pour le flot bicaractéristique, ce qui veut dire que :

$$\tilde{\rho}H_p\tilde{\rho} = \tilde{\rho}\beta_0,$$

où $\beta_0 > 0$ dans le cas des sources, et $\beta_0 < 0$ dans le cas des puits [10] (voir Figure 2). En pratique cela permet de construire un opérateur (étroitement

lié à la quantification de $\tilde{\rho}$) dont le commutateur avec P est microlocalement positif (ou microlocalement négatif).

2.2. Inverses de P et espaces de phase. Expliquons maintenant comment les propagateurs retardés et avancés P_{\pm}^{-1} peuvent être obtenus dans ce cadre.

Sous l'Hypothèse 3.10, les estimées de propagation de [75, 68] permettent de déduire des estimées globales de type

$$(2.32) \quad \|u\|_{H_b^{m,l}(M)} \leq C(\|Pu\|_{H_b^{m-1,l}(M)} + \|u\|_{H_b^{m',l}(M)}).$$

Ici, m est un ordre anisotrope qui (dans le cas du problème retardé) croît de $m < \frac{1}{2} - l$ à $m > \frac{1}{2} - l$ en suivant les bicaractéristiques de S_- vers S_+ (ou l'inverse dans le cas du problème avancé). L'ordre m' dans (2.32) est inférieur à m , mais par contre on ne gagne pas en décroissance dans le terme d'erreur, on ne peut donc pas déduire de (2.32) la propriété de Fredholm de

$$(2.33) \quad P : \{u \in H_b^{m,l}(M) : Pu \in H_b^{m-1,l}(M)\} \rightarrow H_b^{m,l}(M).$$

La stratégie pour améliorer la décroissance des erreurs consiste d'abord à observer, comme nous l'avons déjà fait, que P est un b-opérateur différentiel d'ordre $k = 2$. On l'écrit $P \in \text{Diff}_b^k(M)$, ce qui signifie que P peut localement s'écrire comme

$$P = \sum_{i+|\alpha| \leq k} a_{i,\alpha}(\rho, w)(\rho \partial_\rho)^i \partial_w^\alpha.$$

La *famille normale transformée* de P est par définition la famille d'opérateurs différentiels donnée localement par

$$\widehat{N}(P)(\sigma) := \sum_{i+|\alpha| \leq k} a_{i,\alpha}(0, x) \sigma^i \partial_x^\alpha, \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Modulo des termes non essentiels, $\widehat{N}(P)(\sigma)$ est égal à l'opérateur P conjugué avec la transformée de Mellin² en ρ et son inverse : les aspects de décroissance en ρ se réduisent alors à l'analyse de pôles en σ . Dans notre cas particulier, $\widehat{N}(P)(\sigma) \in \text{Diff}^2(\partial M)$ est de la forme

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \widehat{N}(P)(\sigma) = & 4((\mu + O(\mu^2))\partial_\mu^2 + (i\sigma + 1 + O(\mu))\partial_\mu) \\ & + O(1)\partial_y^2 + O(1)\partial_y + O(\mu)\partial_\mu\partial_y \end{aligned}$$

près de $\{\mu = 0\}$ modulo des termes $O(\sigma^2)$ [10]. L'observation clé est que $\widehat{N}(P)(\sigma)$ est hyperbolique dans $\{\mu < 0\}$ (et elliptique dans $\{\mu > 0\}$) et que son ensemble caractéristique a deux composantes connexes, dans lesquelles les bicaractéristiques commencent et finissent en des points radiaux. Il est alors possible de démontrer des estimées de propagation qui sont en plus semi-classiques en $|\sigma|^{-1}$ [10, 68], et de démontrer ainsi que $\widehat{N}(P)(\sigma)^{-1}$ existe en tant que famille méromorphe. La structure de ses pôles détermine alors la propriété de Fredholm (voire l'inversibilité) de P sur les espaces (2.33). Il est donc clair qu'il est utile de faire une hypothèse sur ces pôles :

Hypothèse 3.11. *Le poids (ordre de décroissance) l vérifie $l \neq -\text{Im } \sigma_i$ pour chaque résonance $\sigma_i \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire chaque pôle de $\sigma \mapsto \widehat{N}(P)(\sigma)^{-1}$).*

2. Rappelons que la transformée de Mellin de $u \in C_c^\infty((0, \infty))$ est définie par $(\mathcal{M}_\rho u)(\sigma) := \int_0^\infty \rho^{-i\sigma-1} u(\rho) d\rho$.

Avec cette hypothèse on a des inverses généralisés P_{\pm}^{-1} d'opérateurs de Fredholm. Dans le cas globalement hyperbolique, ils coïncident avec les propagateurs retardés et avancés usuels G_{\pm} , ce qui permet de montrer qu'ils sont des inverses (plutôt que juste des inverses généralisés) dans le cadre fonctionnel présent.

Notre premier résultat relevant pour la théorie des champs dit qu'on peut donner une version globale de l'espace de phase classique :

Théorème 3.12 ([Wr10]). *Soit (M, g) un espace-temps asymptotiquement Minkowski (au sens de l'Hypothèse 3.10), dont l'intérieur est globalement hyperbolique, et supposons que $l \in \mathbb{R}$ n'est pas une résonance (au sens de l'Hypothèse 3.11). Alors l'opérateur $G = P_+^{-1} - P_-^{-1}$ induit une bijection :*

$$(2.35) \quad [G] : \frac{H_b^{\infty, l}(M)}{PH_b^{\infty, l}(M)} \longrightarrow \text{Sol}(P),$$

où $H_b^{\infty, l}(M) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} H_b^{m, l}(M)$ et $\text{Sol}(P)$ est l'espace de solutions dont le b-front d'onde est vide hormis les points radiaux (en particulier, ce sont des solutions lisses dans l'intérieur M° de M).

En plus de donner une structure adaptée à la quantification, ce théorème résume des propriétés de régularité et de décroissance de P_{\pm}^{-1} qui seront utiles dans la suite. Le b-front d'onde est défini de manière analogue au front d'onde C^∞ en remplaçant les opérateurs pseudo-différentiels $\Psi(M)$ par une classe $\Psi_b(M)$ adaptée à l'étude de régularité au sens des espaces $H_b^{\infty, l}(M)$.

Le Théorème 3.12 admet une généralisation très curieuse si on enlève l'hypothèse d'hyperbolicité globale : les opérateurs P_{\pm}^{-1} sont alors des inverses généralisés au sens de la théorie de Fredholm, mais il est quand même possible de modifier les espaces (2.35) par un nombre fini d'éléments pour que le résultat reste vrai, du moins en supposant que $\text{Ker } P_{\pm}$ est un espace de fonctions lisse. Cela donne un cadre suffisant pour construire des champs quantiques, mais l'interprétation de ce nombre fini de fonctions propres problématiques reste inéclairé pour le moment.

2.3. Scattering géométrique et états de Hadamard. Pour donner un sens aux données asymptotiques on utilise un résultat de Baskin, Vasy et Wunsch [10], qui implique que dans un voisinage de S_+ , chaque solution $u \in \text{Sol}(P)$ peut s'écrire comme une somme de deux intégrales de la forme

$$(2.36) \quad \int \rho^{i\sigma} e^{i\mu\gamma} |\gamma|^{i\sigma-1} a_{\pm}^{\pm}(\sigma, y) \chi^{\pm}(\gamma) d\gamma d\sigma$$

modulo des termes de régularité en dessus du seuil (c'est-à-dire dans $H^{m, l}(M)$ pour un $m > \frac{1}{2} - l$). Dans cette formule, χ^{\pm} est une fonction lisse à support dans $\pm[0, \infty)$. La solution u est codifiée par $a_+^+(\sigma, y)$ et $a_+^-(\sigma, y)$, qui sont deux fonctions holomorphes (en σ , dans un demi-plan) à valeurs dans $C^\infty(S_+)$, qui décroissent rapidement en $\text{Re } \sigma$. On définit ainsi une paire de données asymptotiques de u :

$$(2.37) \quad \varrho_+ u := (a_+^+(\sigma, y), a_+^-(\sigma, y)).$$

Notons qu'on peut aussi définir de manière analogue les données asymptotiques sur le cône de lumière à l'infini passé, $\varrho_- u = (a_-^+, a_-^-)$.

En utilisant un argument de commutateur b-pseudo-différentiel, on démontre que ϱ_+ et ϱ_- diagonalise la forme hermitienne induite par iG . Il est donc possible de définir des fonctions à deux points pour P en postulant les données les plus simples possibles à l'infini passé avec la formule :

$$(2.38) \quad \Lambda^\pm := G^* \varrho_-^* \pi^\pm \varrho_- G : H_b^{\infty,0}(M) \rightarrow H_b^{-\infty,0}(M),$$

où π^\pm sont (modulo une constante multiplicative) les projections sur les composantes respectives de (2.37).

Théorème 3.13 ([Wr10]). *Sous les hypothèses du Théorème 3.12 (avec $l = 0$), la paire d'opérateurs Λ^\pm définie par (2.38) vérifie*

$$\text{WF}(\Lambda^\pm)' \subset (\Sigma^\pm \cup o) \times (\Sigma^\pm \cup o)$$

à l'intérieur M° . De plus, si (M°, g) est globalement hyperbolique, Λ^\pm est une paire de fonctions à deux points de Hadamard.

La démonstration consiste à construire une paramétrix suffisamment explicite pour l'opérateur de Poisson (c'est-à-dire l'inverse de ϱ_-), qui est par ailleurs égal à $G^* \varrho_-^*$ fois une matrice à coefficients constants. Cette paramétrix est construite en considérant une formule similaire à (2.36), et en la corrigeant après : d'abord par un argument de calcul symbolique (basé sur le fait que P est égal à $-4D_\mu(\mu D_\mu + \rho D_\rho)$ modulo des termes facilement contrôlables), et ensuite par une formule qui utilise l'inverse retardé P_+^{-1} . L'étape suivante s'appuie sur le fait que l'occurrence de terme $\chi^\pm(\gamma)$ dans la formule pour la paramétrix (comme dans (2.36)) implique de la haute régularité aux sources/puits. La projection π^\pm sélectionne une de ces possibilités, et ensuite l'information sur la régularité aux points radiaux est propagée dans M° à l'aide d'estimées de propagation.

2.4. Espace asymptotiquement de Sitter et extension conforme.

L'espace de Sitter d -dimensionnel (X_0, g_{X_0}) est par définition l'hyperboloïde

$$z_0^2 - (z_1^2 + \cdots + z_d^2) = -1$$

dans l'espace de Minkowski M , munie de la métrique induite. Dans le cadre compactifié, cette hyperboloïde peut être identifiée avec la région $\{\rho = 0, \mu < 0\}$ de la sphère à l'infini spatio-temporel (c'est-à-dire du bord $\partial M = \{\rho = 0\} = \mathbb{S}^d$). De manière similaire, les deux hyperboloïdes

$$\{z_0^2 - (z_1^2 + \cdots + z_d^2) = 1, \pm z_0 > 0\},$$

sont deux copies de l'espace hyperbolique (X_\pm, g_{X_\pm}) (aussi appelé «AdS euclidien» dans la littérature physique). Ces deux copies peuvent être identifiées avec les deux composantes connexes de la région $\{\rho = 0, \mu > 0\}$ de la sphère. On considère ici (X_0, g_{X_0}) , resp. (X_\pm, g_{X_\pm}) comme variétés compactes à bord, c'est-à-dire $\partial X_0 = S_+ \cup S_-$ et $\partial X_\pm = S_\pm$. Le bord de l'espace de Sitter compactifié, ∂X_0 , est traditionnellement appelé l'*infini conforme* (ou le *bord conforme*). Le bord entier de M ,

$$(2.39) \quad \partial M = X_+ \cup X_0 \cup X_-,$$

représente donc l'espace de Sitter étendu à travers l'infini conforme (ou l'*extension conforme de l'espace de Sitter*), voir Figure 3.

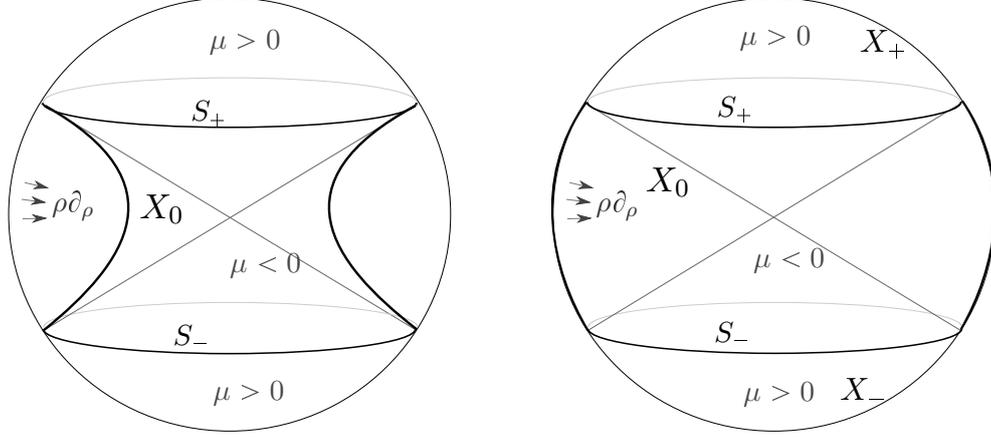


FIGURE 3. L'espace de Sitter X_0 avant et après l'identification avec la région 'équatoriale' du bord $\{\rho = 0\}$ de l'espace de Minkowski radialement compactifié. Les deux autres régions sont deux copies X_{\pm} de l'espace hyperbolique.

En suivant un travail de Vasy [155], nous considérons l'opérateur différentiel sur $X := \partial M = X_+ \cup X_0 \cup X_-$

$$(2.40) \quad P_X(\sigma) := \mathcal{M}_\rho P \mathcal{M}_\rho^{-1} = \mathcal{M}_\rho \rho^{-(d-1)/2} \rho^{-2} \square_g \rho^{(d-1)/2} \mathcal{M}_\rho^{-1},$$

obtenu en conjuguant P par des transformées de Mellin \mathcal{M}_ρ en ρ , où

$$(\mathcal{M}_\rho u)(\sigma) = \int_0^\infty \rho^{-i\sigma-1} u(\rho) d\rho.$$

Plus précisément (en agissant sur des distributions qui ne dépendent pas de σ), on obtient une famille d'opérateurs différentiels dépendants de $\sigma \in \mathbb{C}$ (la variable complexe dans la transformée de Mellin).

L'ingrédient clé sont les deux identités :

$$(2.41) \quad \begin{aligned} P_X &= x_{X_0}^{-i\sigma-(d-1)/2-2} (\square_{X_0} - \sigma^2 - (d-1)^2/4) x_{X_0}^{i\sigma+(d-1)/2} \text{ sur } X_0, \\ P_X &= x_{X_{\pm}}^{-i\sigma-(d-1)/2-2} (-\Delta_{X_{\pm}} + \sigma^2 + (d-1)^2/4) x_{X_{\pm}}^{i\sigma+(d-1)/2} \text{ sur } X_{\pm}, \end{aligned}$$

explicitées pour la première fois dans [155], où

$$x_{X_0} = \left(\frac{z_1^2 + \dots + z_d^2 - z_0^2}{z_1^2 + \dots + z_d^2 + z_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x_{X_{\pm}} = \left(\frac{z_0^2 - (z_1^2 + \dots + z_d^2)}{z_1^2 + \dots + z_d^2 + z_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sont des fonctions définissant le bord de X_0 et X_{\pm} . Cela s'interprète comme une *extension conforme* de l'opérateur de Klein-Gordon sur l'espace de Sitter. L'opérateur différentiel P_X remplacera l'opérateur de Klein-Gordon dans notre analyse. Cet opérateur est étroitement lié à l'opérateur (2.34) et en utilisant la méthode d'estimées de propagation il est également possible d'obtenir des inverses de P_X , sauf pour un ensemble discret de valeurs de $\sigma \in \mathbb{C}$ (il est en fait possible de démontrer que ces résonances se situent sur l'axe imaginaire).

Ce fait se généralise au cadre plus général d'espaces asymptotiquement hyperboliques et asymptotiquement de Sitter (faisons une remarque terminologique : ces derniers espaces s'interprètent comme une vaste généralisation de l'espace de Sitter 'global' que l'on vient d'avoir discuté, plutôt que juste de sa carte statique ou cosmologique). Nous introduisons les définitions correspondantes en suivant les références [152, 155] .

Définition 3.14. Soit X_\bullet une variété compacte d -dimensionnelle à bord, munie d'une métrique g sur l'intérieur X_\bullet° , et soit x une fonction définissant le bord. On dit que (X_\bullet, g) est un espace :

- (1) asymptotiquement hyperbolique si $g = x^{-2}\hat{g}$, où \hat{g} est une métrique riemannienne lisse sur X_\bullet avec $\hat{g}(dx, dx)|_{x=0} = 1$;
- (2) asymptotiquement de Sitter si $g = x^{-2}\hat{g}$, où \hat{g} est une métrique lorentzienne X_\bullet de signature $(1, d-1)$, telle que $\hat{g}(dx, dx)|_{x=0} = 1$, le bord est l'union $\partial X_\bullet = S_+ \cup S_-$ de deux composantes connexes, et toutes les géodésiques nulles dans X_\bullet° paramétrisées par $t \in \mathbb{R}$ tendent vers S_+ quand $t \rightarrow \infty$ et vers S_- quand $t \rightarrow -\infty$, ou vice-versa.

Définition 3.15. On dit qu'un espace asymptotiquement de Sitter (X_0, g_{X_0}) est pair si près de ∂X_0 on a une décomposition produit $[0, \epsilon)_x \times (\partial X_0)_y$ t.q.

$$(2.42) \quad g_{X_0} = \frac{dx_{X_0}^2 - h(x_{X_0}^2, y, dy)}{x_{X_0}^2}$$

avec $h(x_{X_0}^2, y, dy)$ lisse.

Ceci est une version lorentzienne de la définition d'espace asymptotiquement hyperbolique pair (l'une est obtenue à partir de l'autre en remplaçant $-h$ par h) introduite par Guillarmou [74]. Il peut se démontrer que la décomposition produit (2.42) est toujours possible sur un espace asymptotiquement de Sitter, mais la propriété que $h(x_{X_0}^2, y, dy)$ soit lisse en x_{X_0} (plutôt que juste en $x_{X_0}^2$) doit être imposée en plus.

Supposons que nous avons un espace temps asymptotiquement de Sitter (X_0, g_{X_0}) . S'il est pair au sens de la Définition 3.15 alors une construction de Vasy montre qu'il existe une variété compacte X (sans bord) de forme

$$X = X_+ \cup X_0 \cup X_-,$$

ainsi qu'une paire de métriques g_{X_\pm} sur X_\pm telles que (X_\pm, g_{X_\pm}) est asymptotiquement hyperbolique et pair, avec les deux bords ∂X_+ et ∂X_- identifiés de manière lisse avec les deux composantes S_\pm du bord $\partial X_0 = S$ de X_0 . Ensuite, on munit X d'une structure C^∞ qui permet de construire un espace-temps asymptotiquement Minkowski (M, g) avec $M = \mathbb{R}_\rho^+ \times X$ (et donc $\partial M = X$) et g une métrique lisse de forme

$$g = \frac{1}{\rho^2} \left(\mu \frac{d\rho^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{\rho} \otimes d\mu + d\mu \otimes \frac{d\rho}{\rho} \right) - h(-\mu, y, dy) \right).$$

Ici, μ est une coordonnée égale $\mu = -x_{X_0}^2$ dans X_0 (où x_{X_0} est la fonction définissant le bord de X_0) et $\mu = x_{X_\pm}^2$ dans X_\pm (où x_{X_\pm} est la fonction définissant le bord de X_\pm), ce qui a un sens grâce à l'hypothèse que (X_0, g_{X_0})

est pair. La formule analogue à (2.40) définit pour chaque $\sigma \in \mathbb{C}$ un opérateur différentiel $P_X \in \text{Diff}^2(X)$ qui est relié avec l'opérateur de Laplace-Beltrami (l'opérateur d'onde) sur X_\pm et X_0 par :

$$P_X = x_{X_0}^{-i\sigma-(d-1)/2-2} P_{X_0} x_{X_0}^{i\sigma+(d-1)/2}, \quad P_X = x_{X_\pm}^{-i\sigma-(d-1)/2-2} P_{X_\pm} x_{X_\pm}^{i\sigma+(d-1)/2},$$

sur respectivement X_0°, X_\pm° , où

$$P_{X_0} = \square_{X_0} - \sigma^2 - (d-1)^2/4, \quad P_{X_\pm} = -\Delta_{X_\pm} + \sigma^2 + (d-1)^2/4.$$

Sur X il y a une densité lisse unique qui étend la forme volume sur X_0 et X_\pm multipliée par un facteur conforme $\mu^{(d+1)/2}$. On note $(\cdot|\cdot)_{X_0}, (\cdot|\cdot)_{X_\pm}, (\cdot|\cdot)_X$ les produits induits par les densités respectives. On a alors que pour $\sigma \in \mathbb{R}$, $P_X^* = P_X$ par rapport à $(\cdot|\cdot)_X$.

Comme dans le cas de l'extension conforme de l'espace de Sitter, P_X rentre dans le cadre des estimées de propagation de [153], ce qui permet de démontrer son inversibilité comme opérateur $P_X : \mathcal{X}^s \rightarrow \mathcal{Y}^{s-1}$ agissant entre des espaces de Sobolev anisotropes

$$\mathcal{X}^s = \{u \in H^s(X) : P_X u \in \mathcal{Y}^{s-1}\}, \quad \mathcal{Y}^{s-1} = H^{s-1}(X),$$

à condition que σ ne soit pas une résonance. On obtient en particulier deux inverses $P_{X_\pm}^{-1}$ en imposant de la régularité en dessus du seuil $s > \frac{1}{2} - \text{Im } \sigma$ près de N^*S_\pm et en dessous du seuil $s < \frac{1}{2} - \text{Im } \sigma$ près de N^*S_\mp .

Cela donne un cadre très similaire à l'opérateur d'onde P , en fait même plus facile comme on a besoin de considérer seulement la régularité au sens des espaces de Sobolev $H^s(X)$ (la variété X étant fermée), où s est un ordre anisotrope. De manière analogue au Théorème 3.12 nous pouvons donc obtenir :

Théorème 3.16 ([Wr10]). *L'opérateur $G_X := P_{X,+}^{-1} - P_{X,+}^{-1}$ induit un isomorphisme*

$$(2.43) \quad [G_X] : \frac{C^\infty(X)}{P_X C^\infty(X)} \longrightarrow \text{Sol}(P_X)$$

avec $\text{Sol}(P_X)$ l'espace des solutions de $P_X u = 0$ telles que $\text{WF}(u) \subset N^*(S_+ \cup S_-)$.

Pour comprendre la relation entre cette nouvelle structure et la théorie bien connue sur l'espace-temps (X_0, g_{X_0}) (qui est un espace-temps globalement hyperbolique), rappelons que celle-ci est basée sur le fait que l'opérateur $G_{X_0} = P_{X_0,+}^{-1} - P_{X_0,-}^{-1}$ induit un isomorphisme

$$P_{X_0,+}^{-1} - P_{X_0,-}^{-1} : \frac{C_c^\infty(X_0^\circ)}{P_{X_0} C_c^\infty(X_0^\circ)} \longrightarrow \text{Sol}(P_{X_0})$$

où $\text{Sol}(P_{X_0})$ est l'espace de solutions de $P_{X_0} u = 0$ qui sont lisses (dans l'intérieur X_0°). Nous démontrons que l'application :

$$(2.44) \quad \upharpoonright_{X_0} \circ x_{X_0}^{i\sigma+(d-1)/2} : \text{Sol}(P_X) \rightarrow \text{Sol}(P_{X_0})$$

est un isomorphisme (symplectomorphisme), ce qui permet de conclure que la théorie sur X_0 a une *prolongation conforme à travers le bord*. Nous montrons le résultat plus précis suivant pour les fonctions à deux points :

Théorème 3.17 ([Wr10]). *Soit (X_0, g_{X_0}) un espace asymptotiquement de Sitter et considérons une extension conforme $P_X \in \text{Diff}^2(X)$ de l'opérateur de Klein-Gordon $P_{X_0} = \square_{X_0} - \sigma^2 - (d-1)^2/4$ avec $\sigma > 0$. Alors, chaque paire de fonctions à deux points de Hadamard $\Lambda_{X_0}^\pm$ pour P_{X_0} se prolonge conformément en une paire de fonctions à deux points Λ_X^\pm de Hadamard pour P_X via l'isomorphisme (2.44).*

Ici, par des fonctions à deux points de Hadamard pour P_X on entend des paires d'opérateurs $\Lambda_X^\pm : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ sur X qui vérifient :

$$P_X \Lambda_X^\pm = \Lambda_X^\pm P_X = 0, \quad \Lambda_X^+ - \Lambda_X^- = iG_X, \quad \Lambda_X^\pm \geq 0 \text{ pour } (\cdot)_X,$$

ainsi qu'une condition analogue à la condition de Hadamard usuelle, mais formulée en termes du flot bicaractéristique de P_X . En particulier, cela signifie que la restriction de Λ_X^\pm à chacune des deux régions de signature euclidienne X_+ et X_- est un opérateur avec noyau de Schwartz lisse. Le résultat que Λ_X^\pm prolonge conformément $\Lambda_{X_0}^\pm$ veut dire que $\Lambda_{X_0}^\pm$ est la restriction de Λ_X^\pm après conjugaison avec des puissances de x_{X_0} .

L'aspect qui nous intéresse le plus c'est qu'on peut définir des données asymptotiques et construire des opérateurs de Poisson comme dans le cas asymptotiquement Minkowski (en traitant simplement la variable complexe σ comme une constante). On s'en sert pour construire des fonctions à deux points de Hadamard Λ_X^\pm sur X , ce qui induit ensuite des fonctions à deux points de Hadamard $\Lambda_{X_0}^\pm$ sur X_0 .

Théorème 3.18 ([Wr10]). *Sous les hypothèse du Théorème 3.17, définissons une paire d'opérateurs $\Lambda_X^\pm : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ de manière analogue au Théorème 3.13. Alors $\Lambda_{X_0}^\pm$ sont des fonctions à deux points de Hadamard.*

Malgré toutes les similarités avec le cas asymptotiquement Minkowski, il faut souligner que bien que la fonction à deux points Λ_X^\pm définie à partir de données sur S_- soit canoniquement associée au choix de prolongement conforme P_X de l'équation d'onde, ce choix n'est pas unique. Si l'espace-temps est hautement symétrique il peut y avoir un prolongement canonique (il en est le cas pour l'espace de Sitter exact), mais en général différents choix d'espaces asymptotiquement hyperboliques dans le prolongement donnent des fonctions à deux points différentes.

2.5. Scattering géométrique sur l'espace de Sitter. Afin d'expliquer certains avantages de notre construction par prolongement conforme, il est utile de mentionner que le point de vue le plus répandu est basé sur le fait suivant : dans un espace asymptotiquement de Sitter (X_0, g_0) , chaque solution $u \in \text{Sol}(P_{X_0})$ peut s'écrire sous forme

$$(2.45) \quad u = a_{X_0}^+ x_{X_0}^{-i\sigma+(d-1)/2} + a_{X_0}^- x_{X_0}^{i\sigma+(d-1)/2}, \quad u_{X_0}^\pm \in C^\infty(X_0)$$

et les traces $(a_{X_0}^+, a_{X_0}^-) \upharpoonright_{S_+}$ caractérisent u entièrement. De plus, la même chose est vraie pour les traces à l'infini passé $(a_{X_0}^+, a_{X_0}^-) \upharpoonright_{S_-}$. Ce résultat général de Vasy [155, 150] formalise une idée souvent utilisée par les physiciens et donne un sens aux données asymptotiques de solutions. Toutefois, ce point de vue est difficilement applicable en théorie des champs car il n'est pas

évident comment distinguer quelles données asymptotiques correspondent à des solutions avec du front d'onde dans une des deux nappes \mathcal{N}^\pm .

Le prolongement conforme permet justement de diagonaliser ce problème. Les données asymptotiques sont définies différemment de (2.45), en se basant sur le résultat que chaque solution de $u \in \text{Sol}(P_X)$ peut s'écrire comme (rappelons que le lien entre $\text{Sol}(P_X)$ et $\text{Sol}(P_{X_0})$ est donné par (2.44))

$$(2.46) \quad u = (\mu + i0)^{-i\sigma} u^+ + (\mu - i0)^{i\sigma} u^- + u^0, \quad u^\pm, u^0 \in C^\infty(X)$$

et les traces $\varrho_+ u := (u^+, u^-) \upharpoonright_{S_-}$ déterminent u (et donc u^0) uniquement [152]. Le fait important pour nous est surtout que les données avec $u^\pm = 0$ donnent des solutions à haute régularité aux puits/sources (au niveau de la transformée de Fourier en μ , cela correspond à avoir du support dans $\gamma > 0$ ou $\gamma < 0$ modulo des termes réguliers), et donc distinguent entre front d'onde propageant dans \mathcal{N}^+ et \mathcal{N}^- .

Cette idée peut s'illustrer de manière particulièrement simple dans le cas où (X_0, g_0) est l'espace de Sitter exact, où on peut donner des formules exactes en termes d'ondes planes. Rappelons d'abord que X_0 est défini en termes de plongement dans l'espace de Minkowski, sur lequel on a le produit lorentzien $(x, y) \mapsto x \cdot y$ associé à la métrique. On peut aussi donner un sens à ce produit pour des points dans le complexifié de l'espace de Minkowski. Pour chaque $y \neq 0$ t.q. $y \cdot y = 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit une paire de distributions

$$(2.47) \quad (x^\pm \cdot y)^\lambda := \lim_{\mathcal{T}^\pm \ni z \rightarrow x} (z \cdot y)^\lambda,$$

où la valeur au bord est prise à partir du tuboïde

$$\mathcal{T}^\pm = \{z \in \mathbb{C}^{d+1} : \text{Im } z \cdot \text{Im } z > 0, \pm \text{Im } z_0 > 0\}.$$

La restriction de $(x^\pm \cdot y)^\lambda$ à X_0 définit une paire de distribution qu'on appelle ondes planes : elles sont effectivement des solutions de l'équation de Klein-Gordon si $\lambda = -i\sigma - \frac{d-1}{2}$, et jouent un rôle analogue aux ondes planes sur l'espace de Minkowski. En particulier, elles fournissent une notion naturelle de "fréquences positives" et "fréquences négatives". Il y a aussi une construction analogue sur l'espace hyperbolique : dans ce cas $x \cdot y$ est partout positif, il n'y a donc pas de différence entre $(x^+ \cdot y)^\lambda$ et $(x^- \cdot y)^\lambda$.

Sur l'espace de Sitter il y a un état de Hadamard canonique (du moins si $\sigma \neq 0$) appelé *état de Bunch-Davies*. Cet état est un cas particulier de l'*état de Hartle-Hawking-Israel* (qui existe sur une classe d'espaces-temps dits à horizon de Killing bifurqué), et peut être interprété comme étant l'état de Hadamard le plus semblable à l'état de vide dans Minkowski, bien qu'il faut souligner qu'il se restreint à un état thermique dans la région qui possède un champ de Killing de type temps. Par un résultat de Bros et Moschella [23], cet état peut être défini de façon suivante à partir des ondes planes :

Définition 3.19. *L'état de Bunch-Davies est l'état quasi-libre dont la fonction à deux points $\Lambda_{X_0}^+$ a comme noyau de Schwartz :*

$$(2.48) \quad \Lambda_{X_0}^+(x_1, x_2) = \text{const.} \int_{S_-} \omega(y) (x_1^- \cdot y)^{-i\sigma - \frac{d-1}{2}} (y \cdot x_2^+)^{-i\sigma - \frac{d-1}{2}},$$

où ω est une forme proportionnelle à la forme de volume canonique sur la sphère.

Nous démontrons que les ondes planes $(x^\pm \cdot y)^{-i\sigma - \frac{d-1}{2}}$ se prolongent conformément comme des solutions distributionnelles de $P_X u = 0$. Ces ondes conformément prolongées sont en fait les restrictions de (2.47) sur la sphère (fois une constante), et on peut montrer que leurs données asymptotiques ont seulement la première/deuxième composante non nulle. Cela nous sert à démontrer :

Théorème 3.20 ([Wr11]). *Soit $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour l'espace de Sitter d -dimensionnel (X_0, g_0) , on a les résultats suivants :*

- (1) *Pour $(v^+, v^-) \in C^\infty(S_-)^2$, l'unique solution $u \in \text{Sol}(P_{X_0})$ dont le prolongement conforme a comme données asymptotiques (v^+, v^-) est donnée par*

$$u(x) = \frac{1}{a(\sigma)} \int_{S_-} \omega(y) \left((x^+ \cdot y)^{-i\sigma - \frac{d-1}{2}} v^+(\xi) + (x^- \cdot y)^{-i\sigma - \frac{d-1}{2}} v^-(y) \right),$$

$$\text{où } a(\sigma) = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} 2^{i\sigma} \Gamma(i\sigma) / \Gamma(i\sigma + \frac{d-1}{2}).$$

- (2) *L'état du Théorème 3.18 construit à partir de données sur S_+ coïncide avec l'état de Bunch-Davies (et de même pour l'état construit de manière analogue à partir de données sur S_-).*

3. Travail [Wr6] : Scattering et calcul Ψ DO dépendent du temps

3.1. État de vide asymptotique dans un cas modèle. Pour plus de clarté nous considérons d'abord le cas spécial d'un espace-temps $1 + d$ -dimensionnel globalement hyperbolique (M, g) avec surface de Cauchy Σ et métrique de forme $g = -dt^2 + h_t$, avec h_t une famille de métriques riemanniennes qui dépend de manière lisse de t . L'opérateur de Klein-Gordon s'écrit alors

$$(3.49) \quad P = \partial_t^2 + r(t) \partial_t + a(t, x, \partial_x),$$

où $r(t)$ est l'opérateur de multiplication $|h_t|^{-\frac{1}{2}} \partial_t |h_t|^{\frac{1}{2}}$, et le symbole principal de $a(t, x, D_x) \in \text{Diff}^2(\Sigma)$ est $k \cdot h_t^{-1}(x) k$ (où $\xi = (\tau, k)$ est la variable duale de $x = (t, x)$). Nous supposons que Σ est une variété à géométrie bornée; dans ce cadre nous avons donc les classes d'opérateurs pseudo-différentiels $\Psi_{\text{bd}}^m(\Sigma)$ de Kordyukov et Shubin qui généralisent le calcul pseudo-différentiel uniforme de Hörmander sur \mathbb{R}^d . Comme maintenant nous devons contrôler en plus la décroissance en temps, nous introduisons un calcul pseudo-différentiel dépendant de t (en restant ici imprécis sur le procédé de quantification) :

Définition 3.21. *Soit $m, \delta \in \mathbb{R}$. Les opérateurs dans $\Psi_{\text{td}}^{m, \delta}(\mathbb{R}; \Sigma)$ sont les quantifications de symboles $a(t, x, k)$ dépendants du temps qui vérifient*

$$|\partial_t^\alpha \partial_x^\beta \partial_k^\gamma a(t, x, k)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle t \rangle^{\delta - \alpha} \langle k \rangle^{m - |\gamma|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}^d,$$

où $\langle t \rangle = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}}$, $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}}$, et les constantes $C_{\alpha\beta\gamma}$ sont uniformes au sens de la géométrie bornée.

Cela nous permet de formuler une hypothèse d'ultra-staticité asymptotique pour (M, g) à l'infini passé.

Hypothèse 3.22. *On suppose qu'il existe un $\delta > 0$ et $a_{\text{in}} \in \Psi_{\text{bd}}^2(\Sigma)$ elliptique et strictement positif, c'est-à-dire*

$$(3.50) \quad a_{\text{in}}(x, D_x) \geq m^2 > 0,$$

et tel que sur $\mathbb{R}^- \times \Sigma$,

$$(td) \quad \begin{aligned} a(t, x, D_x) - a_{\text{in}}(x, D_x) &\in \Psi_{\text{td}}^{2, -\delta}(\mathbb{R}; \Sigma), \\ r(t) &\in \Psi_{\text{td}}^{0, -1-\delta}(\mathbb{R}; \Sigma). \end{aligned}$$

On s'intéressera surtout au cas quand $a_{\text{in}}(x, D_x)$ est simplement l'opérateur de Laplace-Beltrami pour une métrique asymptotique h_{in} plus un terme de masse et/ou un potentiel lisse.

La condition (3.50) a deux conséquences importantes dans notre contexte. Premièrement, elle garantit que les fonctions à deux points de l'état de vide pour la dynamique de l'opérateur de Klein-Gordon asymptotique,

$$P_{\text{in}} = \partial_t^2 + a_{\text{in}}(x, D_x),$$

ont des données de Cauchy pseudo-différentielles (dans la classe uniforme $\Psi_{\text{bd}}^m(\Sigma)$). Deuxièmement, cela permet de contrôler les différences de puissances fractionnaires $a(t, x, D_x)^\alpha - a_{\text{in}}(x, D_x)^\alpha$ quand $t \rightarrow \infty$.

Comme auparavant, notons $U(t, s)$ l'évolution de Cauchy de P , c'est-à-dire l'opérateur qui à une paire de données de Cauchy au temps s associe les données de Cauchy au temps t . Le générateur de cette évolution sera notée $H(t)$, et le générateur de l'évolution de Cauchy $U_{\text{in}}(t, s)$ de P_{in} sera noté H_{in} .

Dans ce cadre, nous définissons l'état de vide asymptotique passé ω en indiquant ses covariances (données de Cauchy) au temps $t = 0$:

$$(3.51) \quad c^\pm(0) := \lim_{t_- \rightarrow -\infty} U(0, t_-) c_{\text{in}}^\pm U(t_-, 0)$$

si cette limite existe (dans un sens à préciser), où c_{in}^\pm est la covariance de l'état de vide pour la dynamique asymptotique :

$$c_{\text{in}}^\pm = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}(H_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \pm a_{\text{in}}^{-\frac{1}{2}} \\ \pm a_{\text{in}}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Les fonctions à deux points de ω peuvent être définies par la formule

$$\Lambda^\pm(t, s) := \mp \pi_0 U(t, 0) c^\pm(0) U(0, s) \pi_1^*,$$

en écrivant Λ^\pm comme des noyaux de Schwartz dans les variables temporelles, à valeurs dans les opérateurs sur Σ . Les opérateurs $\pi_i : C_c^\infty(\Sigma)^2 \ni \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \mapsto f_i \in C_c^\infty(\Sigma)$ projettent sur les deux composantes des données de Cauchy.

Théorème 3.23 ([Wr6]). *Supposons l'Hypothèse 3.22. Alors la limite (3.51) existe et les fonctions à deux points Λ^\pm vérifient la condition de Hadamard :*

$$(Had) \quad \text{WF}(\Lambda^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm.$$

De manière analogue, si l'Hypothèse 3.22 est vérifiée pour des temps positifs et pour une dynamique asymptotique en $t = +\infty$ de partie spatiale a_{out} (potentiellement différente de a_{in}), alors on peut définir un état de vide

asymptotique futur et démontrer que c'est un état de Hadamard. En général, cet état n'est pas le même que l'état de vide asymptotique passé.

Notons aussi que le Théorème 3.23 se généralise à d'autres données asymptotiques, cela fournit donc une théorie de diffusion pour les états de Hadamard (du moins dans le cas massif).

3.2. Espace-temps asymptotiquement statiques. Nos résultats s'étendent à une classe plus générale d'espace-temps *asymptotiquement statiques*.

Plus précisément, on fixe une variété d -dimensionnelle Σ munie d'une métrique riemannienne de référence k telle que (Σ, k) est à géométrie bornée, et on considère la variété $M = \mathbb{R}_t \times \Sigma_y$. On notera $y = (t, y)$, $n = 1 + d$. on munit ensuite M d'une métrique lorentzienne g de forme

$$(3.52) \quad g = -c^2(y)dt^2 + (dy^i + b^i(y)dt)h_{ij}(y)(dy^j + b^j(y)dt),$$

et on fait l'hypothèse suivante de géométrie bornée :

$$(3.53) \quad \begin{aligned} h_{ij} &\in C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_2^0(\Sigma, k)), \quad h_{ij}^{-1} \in C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_0^2(\Sigma, k)), \\ b &\in C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_0^1(\Sigma, k)), \\ c, \quad c^{-1} &\in C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_0^0(\Sigma, k)). \end{aligned}$$

Par un résultat de Choquet-Bruhat et Cotsakis [28, Thm. 2.1], (M, g) est globalement hyperbolique.

On considère l'opérateur de Klein-Gordon sur (M, g) :

$$(3.54) \quad P = -\square_g + V,$$

avec $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}; BT_0^0(\Sigma, k))$ une fonction lisse réelle. Ci-dessous, la notation $f \in S^{-\mu}$ pour $\mu > 0$ signifie "décroissance symbolique en temps", c'est-à-dire qu'on a des estimées de type

$$\partial_t^\alpha f \in O(\langle t \rangle^{-\mu-|\alpha|}) \text{ pour tous } \alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$$

pour des temps négatifs dans les normes correspondantes.

Hypothèse 3.24. *L'espace-temps (M, g) est de forme (3.52), (3.53), et on suppose qu'il existe une métrique et un potentiel réel :*

$$g_{\text{in}} = -c_{\text{in}}^2(y)dt^2 + h_{\text{in}}(y)dy^2, \quad V_{\text{in}},$$

tels que pour $t \leq 0$:

$$(ast) \quad \begin{aligned} h - h_{\text{in}} &\in S^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; BT_2^0(\Sigma, k)), \\ b &\in S^{-\mu'}(\mathbb{R}; BT_0^1(\Sigma, k)), \\ c - c_{\text{in}} &\in S^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; BT_0^0(\Sigma, k)), \\ V - V_{\text{in}} &\in S^{-\mu}(\mathbb{R}^\pm; BT_0^0(\Sigma, k)), \end{aligned}$$

$$(pos) \quad \frac{n-2}{4(n-1)} (R_{c_{\text{in}}^{-2}h_{\text{in}}} - c_{\text{in}}^2 R_{g_{\text{in}}}) + c_{\text{in}}^2 V_{\text{in}} \geq m^2,$$

pour un $\mu > 0$, $\mu' > 1$ et un $m > 0$. Ci-dessus, R_g , resp. R_h est la courbure scalaire de g , resp. h .

La condition (ast) signifie que g , resp. V est asymptotique à la métrique statique g_{in} , resp. au potentiel indépendant du temps V_{in} quand $t \rightarrow -\infty$. La condition (pos) est une condition de masse positive pour la dynamique asymptotique.

L'Hypothèse 3.24 est bien plus générale que l'Hypothèse 3.22 considérée auparavant. Toutefois, nous démontrons qu'il est possible de trouver un système de coordonnées naturel qui permet d'écrire l'opérateur de Klein-Gordon sous forme étroitement liée à un opérateur de forme (3.49) et vérifiant l'Hypothèse 3.22 : l'un est obtenu à partir de l'autre simplement en conjuguant par des opérateurs de multiplication lisses. Cela permet de définir l'état de vide asymptotique et de montrer un résultat plus général.

Théorème 3.25 ([Wr6]). *Sous l'Hypothèse 3.24, l'état de vide asymptotique passé est un état de Hadamard.*

3.3. Théorie de diffusion et diagonalisation approximée. La difficulté essentielle dans la démonstration du Théorème 3.23 est de contrôler le front d'onde de la limite $t_- \rightarrow -\infty$; il est difficile d'imaginer que cela puisse se faire directement.

Mettons-nous dans le cadre de l'Hypothèse 3.22. L'ingrédient principal que nous utilisons est une version améliorée de la diagonalisation de l'évolution de Cauchy considérée dans le Chapitre 1. Rappelons que grâce à cette méthode, l'évolution de Cauchy de P peut s'écrire comme

$$(3.55) \quad U(t, s) = T(t)U^{\text{ad}}(t, s)T(s)^{-1}$$

où $T(t)$ est une matrice 2×2 d'opérateurs pseudo-différentiels (qui dépendent de manière lisse de t) et $U^{\text{ad}}(t, s)$ est une évolution 'approximativement diagonale' (d'où l'indice ad). Plus précisément, $U^{\text{ad}}(s, t)$ est l'évolution générée par un opérateur dépendant du temps $H^{\text{ad}}(t)$ qui est égal à

$$H^{\text{ad}}(t) = \begin{pmatrix} \epsilon^+(t) & 0 \\ 0 & \epsilon^-(t) \end{pmatrix}$$

modulo des termes régularisants (il s'agit de termes $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma) \otimes \mathbb{C}^2)$, où $\mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma)$ sont les opérateurs qui envoient $H^{-m}(\Sigma)$ dans $H^m(\Sigma)$ pour tous $m \in \mathbb{N}$), et $\epsilon^\pm(t)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 de symbole principal $\pm(k \cdot h_t^{-1}k)^{\frac{1}{2}}$. À cause de cette forme du symbole principal, les solutions de $(i^{-1}\partial_t + \epsilon^\pm(t))$ propagent avec du front d'onde dans \mathcal{N}^\pm . Cela nous avait permis de construire une paire de covariances au temps $t = 0$ en posant :

$$c_{\text{ref}}^\pm(0) := T(0)\pi^\pm T^{-1}(0), \quad \text{où } \pi^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Les fonctions à deux points correspondantes,

$$\Lambda_{\text{ref}}^\pm(t, s) := \mp \pi_0 U(t, t_0) c_{\text{ref}}^\pm(t_0) U(t_0, s) \pi_1^*,$$

ont le front d'onde dans $\mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm$, et sont donc de Hadamard. Par conséquent, pour démontrer que les fonctions à deux points Λ^\pm de l'état de vide asymptotique vérifient la condition de Hadamard il suffit de prouver que

$$c_{\text{in}}^\pm - c_{\text{ref}}^\pm \in \mathcal{W}^{-\infty}(\Sigma) \otimes B(\mathbb{C}^2).$$

Pour démontrer cela, on utilise l'hypothèse (td) pour contrôler la décroissance en temps des restes dans les identités 'modulo termes régularisants' (ainsi que généralement la décroissance en temps de diverses quantités relativement à la dynamique asymptotique). L'estimée la plus importante dit que

$$(3.56) \quad H^{\text{ad}}(t) - \begin{pmatrix} a(t)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -a(t)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in \Psi_{\text{td}}^{0, -1-\delta}(\mathbb{R}; \Sigma) \otimes B(\mathbb{C}^2)$$

pour $-t$ large, ce qui alors entraîne la décroissance en temps des commutateurs qui resurgissent dans les démonstrations. Nous obtenons (3.56) en refaisant la diagonalisation approximée (3.55) en utilisant des expansions poly-homogènes d'opérateurs dans $\Psi_{\text{td}}^{m, -\delta}(\mathbb{R}; \Sigma)$ en m et δ en même temps. Cela nous amène à étudier les classes $\Psi_{\text{td}}^{m, -\delta}(\mathbb{R}; \Sigma)$ en détail, en particulier nous faisons usage d'une nouvelle généralisation du théorème de Seeley sur les puissances complexes sur d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques.

Propagateurs de Feynman globaux

Dans l'analyse de l'équation de Klein-Gordon libre,

$$(0.57) \quad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)u(t, x) = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d,$$

un fait élémentaire essentiel est que l'opérateur $P_{\text{free}} = \partial_t^2 - \Delta_x + m^2$ possède quatre inverses : les multiplicateurs de Fourier donnés par

$$\frac{1}{(\tau \pm i0)^2 - (k^2 + m^2)}, \quad \frac{1}{\tau^2 - (k^2 + m^2) \pm i0},$$

dans les variables duales $\xi = (\tau, k)$ de $x = (t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$.

Les deux premiers inverses sont les propagateurs retardés et avancés (voir Chapitre 1), qui sont définis de manière unique sur n'importe quel espace-temps globalement hyperbolique et sont étroitement liés avec le problème de Cauchy.

Les deux autres inverses sont appelés *propagateur de Feynman* et *propagateur d'anti-Feynman*. Ces deux propagateurs jouent un rôle fondamental dans la renormalisation perturbative des champs quantique scalaires en interaction sur l'espace de Minkowski. Il n'est pas a priori clair comment le propagateur de Feynman et d'anti-Feynman se généralisent à des espace-temps globalement hyperboliques arbitraires, mais certaines propriétés qu'on anticipe ont été comprises grâce au travail de Duistermaat et Hörmander [48], qui ont démontré l'existence de *paramétrices de Feynman* (et d'anti-Feynman) et leur unicité modulo des termes lisses.

Plus précisément, si Φ_s est le flot hamiltonien du symbole principal $p(x, \xi) = \xi \cdot g^{-1}(x)\xi$ restreint à la variété caractéristique $\mathcal{N} = p^{-1}(\{0\}) \subset T^*M \setminus o$, on dit que \tilde{G}_F est une *paramétrix de Feynman* si les opérateurs $\mathbf{1} - \tilde{G}_F P$ et $\mathbf{1} - P\tilde{G}_F$ ont des noyaux de Schwartz lisses et

$$(0.58) \quad \text{WF}(\tilde{G}_F)' = (\Delta_{T^*M}) \cup \bigcup_{s \leq 0} (\Phi_s(\Delta_{T^*M}) \cap \pi^{-1}\mathcal{N}).$$

Ci-dessus, Φ_s agit sur la composante gauche de Δ_{T^*M} (la diagonale dans $(T^*M \times T^*M) \setminus o$), et $\pi : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ projette sur la composante gauche.

Toutefois, l'existence de paramétrices ne répond pas à la question d'existence d'un *inverse de Feynman canonique* G_F vérifiant (0.58) sur un espace globalement hyperbolique (M, g) . Bien qu'il soit possible de donner une formule pour une paramétrix de Feynman lorsqu'on a une paire de fonctions à deux points Λ^\pm de Hadamard (on obtient même un inverse de Feynman au sens que $P\tilde{G}_F = 0$ et $\tilde{G}_F P = 0$ sur $C_c^\infty(M)$), il n'est pas clair auquel sens cela serait canonique. En outre, les formules utilisées par les physiciens sur espace-temps courbe (e.g. dans la formulation d'actions effectives ou dans des formules de comptage de création de particules) font usage d'un inverse formel de l'opérateur de Klein-Gordon supposé avoir des propriétés globales

ressemblant plutôt à un inverse elliptique. Cela motive donc un point de vue différent de ce que nous avons discuté jusqu'ici dans le contexte d'états de Hadamard, où on avait fait des choix de bi-solutions à partir de données à un temps de référence fixe (fini ou infini).

Mentionnons d'abord que si l'espace-temps (M, g) est *stationnaire*, c'est-à-dire s'il admet globalement un champ de Killing complet de type temps K , et si le potentiel V est invariant par K , alors un fait bien connu dit que l'état de vide correspondant définit canoniquement un inverse de Feynman.

Le premier résultat en dehors de ce cas très spécial est dû à Gell-Redman, Haber et Vasy [68], qui ont considéré l'équation d'onde sur des espaces asymptotiquement Minkowski, dans le cadre déjà expliqué dans le sous-chapitre 2 du chapitre précédent. Au lieu d'imposer de la haute régularité aux sources et aux puits à l'infini passé (ce qui donne le propagateur retardé) ou à l'infini futur (ce qui donne le propagateur avancé), ils considèrent un problème global. En imposant de la haute régularité aux deux sources (une à l'infini futur, l'autre à l'infini passé), ils obtiennent la propriété de Fredholm de P (agissant sur des espaces de Sobolev anisotropes à poids qui codifient les conditions sur la régularité aux points radiaux), et ses inverses généralisés sont des candidats pour des paramétrices de Feynman. Dans le travail [Wr10] nous complétons la démonstration de ce fait et nous étudions quelques propriétés de ces opérateurs et leur lien avec le scattering géométrique. Un résultat récent de Vasy améliore ces résultats en démontrant que P est en fait inversible [157], et son inverse donne donc un inverse de Feynman canonique. Comme prédit par une conjecture de Dereziński et Siemssen [37, 38] (toujours non résolue dans le cas asymptotiquement statique général), cet inverse s'interprète comme la valeur au bord $(P - i0)^{-1}$ de P , que Vasy démontre être un opérateur essentiellement autoadjoint.

Mentionnons aussi que Bär et Strohmaier [20] ont formulé un problème de Fredholm non elliptique global étroitement lié, dans le cadre de l'équation de Dirac sur des espace-temps à surface de Cauchy compacte (en travaillant avec des temps finis plutôt qu'en formulant des conditions à l'infini). Dans ce cas les aspects de chiralité peuvent engendrer un indice de Fredholm non nul, qu'ils démontrent être égal à une quantité géométrique (leur résultat s'interprète comme une version lorentzienne du théorème d'Atiyah-Patodi-Singer) et qui décrit la charge créée par la géométrie [20, 13].

Inspiré des travaux [68, 20], dans [Wr7] et [Wr12] nous construisons l'inverse de Feynman canonique pour l'opérateur de Klein-Gordon (avec masse $m > 0$; le cas $m = 0$ étant couvert par [68]) sur des espaces asymptotiquement Minkowski. Les résultats sont pleins d'analogies avec le cadre de [68, 156], mais notre méthode est différente : elle est basée plutôt sur des méthodes d'équations d'évolution et de décomposition microlocale comme dans le Chapitre 1 et le sous-chapitre 3 du Chapitre 3. Pour définir les espaces de Hilbert \mathcal{X}_F^m et \mathcal{Y}^m entre lesquels P est inversible, on impose des conditions de compatibilité avec les états de vide à l'infini futur et à l'infini passé au sens de la théorie de diffusion introduite dans le sous-chapitre 3 du chapitre précédent. L'avantage de cette méthode est qu'elle fournit une construction relativement explicite de paramétrices pour l'inverse de Feynman.

1. Travaux [Wr7] et [Wr12] : Inverse de Feynman par scattering

1.1. Espaces asymptotiquement Minkowski. Nous considérons des espaces asymptotiquement Minkowski au sens d'une définition qui est étroitement liée au cadre du sous-chapitre 2 mais n'est pas identique à la lettre. Rappelons qu'une fonction \tilde{t} est une *fonction de temps* si $\nabla\tilde{t}$ est un champ de vecteurs de type temps.

Hypothèse 4.1. *L'espace-temps (M, g) est asymptotiquement Minkowski au sens qu'il est donné par $M = \mathbb{R}^{1+d}$ muni d'une métrique lorentzienne g telle que :*

$$(aMi) \quad g_{\mu\nu}(y) - \eta_{\mu\nu} \in S_{\text{std}}^{-\delta}(\mathbb{R}^{1+d}), \quad \delta > 1,$$

$$(aMii) \quad (\mathbb{R}^{1+d}, g) \text{ est globalement hyperbolique,}$$

$$(aMiii) \quad (\mathbb{R}^{1+d}, g) \text{ admet une fonction de temps } \tilde{t} \text{ t.q. } \tilde{t} - t \in S_{\text{std}}^{1-\epsilon}(\mathbb{R}^{1+d}),$$

$\epsilon > 0$, où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et $S_{\text{std}}^{\delta}(\mathbb{R}^{1+d})$ signifie la classe des fonctions lisses f telles que (avec la notation habituelle $\langle x \rangle = (1 + |x|)^{\frac{1}{2}}$)

$$(1.59) \quad \partial_x^{\alpha} f \in O(\langle x \rangle^{\delta-|\alpha|}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^{1+d}.$$

Nous considérons aussi un potentiel $V \in C^{\infty}(M; \mathbb{R}^d)$ tel que :

$$(aMiv) \quad V(x) - m^2 \in S_{\text{std}}^{-\delta}(\mathbb{R}^{1+d}), \quad \text{pour un } m > 0, \quad \delta > 1.$$

La notation S_{std}^{δ} provient de la décroissance en espace-temps ('space-time decay') qu'on impose dans la définition (1.59).

Nous démontrons dans [Wr7] que si la propriété (aMi) est vérifiée, alors (aMii) est équivalent à une condition de *non trapping* (ou *non capture*) des géodésiques nulles de g . Nous démontrons aussi qu'il est possible de redéfinir t et \tilde{t} de manière à ce que

$$\Sigma := \{t = 0\} = \{\tilde{t} = 0\}$$

soit une surface de Cauchy pour (M, g) , qui peut être canoniquement identifiée à \mathbb{R}^d .

1.2. L'inverse de Feynman de P . Nous travaillons dans le cadre de l'Hypothèse 4.1 et considérons l'opérateur de Klein-Gordon $P = -\square_g + V$.

Pour $m \in \mathbb{R}$ nous introduisons des espaces de Hilbert $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m, \mathcal{Y}^m$ avec l'objectif de démontrer que $P : \mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m \rightarrow \mathcal{Y}^m$ est inversible. La propriété essentielle des espaces \mathcal{Y}^m est que ses éléments sont L^1 en t à valeurs dans l'espace de Sobolev d'ordre m . Les espaces $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m$ incorporent ce que nous appelons les *conditions asymptotiques de Feynman*, imposées en même temps en $t = +\infty$ et $t = -\infty$.

Grâce à la fonction de temps \tilde{t} on peut identifier M avec $\mathbb{R} \times \Sigma$, en utilisant le flot ϕ_t du champ de vecteurs $v = \frac{g^{-1}d\tilde{t}}{dt \cdot g^{-1}d\tilde{t}}$ et on obtient un difféomorphisme :

$$(1.60) \quad \chi : \mathbb{R} \times \Sigma \ni (t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi_t(\mathbf{x}) \in M,$$

qui vérifie

$$\chi^*g = -c^2(t, \mathbf{x})dt^2 + h(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}^2.$$

Pour $m \in \mathbb{R}$ on note $H^m(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev usuel sur \mathbb{R}^d . On pose pour $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2} + \delta$:

$$\mathcal{Y}^m := \left\{ u \in \mathcal{D}'(M) : \chi^* u \in \langle t \rangle^{-\gamma} L^2(\mathbb{R}; H^m(\mathbb{R}^d)) \right\}$$

avec norme $\|v\|_{\mathcal{Y}^m} = \|\chi^* v\|_{L^2(\mathbb{R}; H^m(\mathbb{R}^d))}$. L'exposant γ est choisi de manière à ce que $\langle t \rangle^{-\gamma} L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. De manière similaire on définit

$$\mathcal{X}^m := \left\{ u \in \mathcal{D}'(M) : \chi^* u \in C^0(\mathbb{R}; H^{m+1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^m(\mathbb{R}^d)), Pu \in \mathcal{Y}^m \right\}.$$

On munit \mathcal{X}^m de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{X}^m} = \|\varrho_0 u\|_{\mathcal{E}^m} + \|Pu\|_{\mathcal{Y}^m},$$

où $\varrho_s u = \begin{pmatrix} u|_{\Sigma_s} \\ i^{-1} \partial_n u|_{\Sigma_s} \end{pmatrix}$ associe les données de Cauchy sur $\Sigma_s := \tilde{t}^{-1}(\{s\})$, et

$$\mathcal{E}^m := H^{m+1}(\mathbb{R}^d) \oplus H^m(\mathbb{R}^d)$$

est l'espace d'énergie d'ordre m . On peut facilement démontrer que \mathcal{X}^m est un espace d'Hilbert en utilisant le fait que le problème de Cauchy inhomogène est bien posé.

Posons

$$c_{\text{free}}^{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm(-\Delta_x + m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \pm(-\Delta_x + m^2)^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$c_{\text{free}}^{\pm} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm}}(H_{\text{free}}), \quad H_{\text{free}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta_x + m^2 & 0 \end{pmatrix},$$

en termes du générateur H_{free} de l'évolution de Cauchy pour l'opérateur de Klein-Gordon libre $P_{\text{free}} = \partial_t^2 - \Delta_x + m^2$ (auquel P est asymptotique quand $t \rightarrow \pm\infty$). Finalement on définit

$$\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m := \left\{ u \in \mathcal{X}^m : \lim_{t \rightarrow \mp\infty} c_{\text{free}}^{\pm} \varrho_t u = 0 \text{ dans } \mathcal{E}^m \right\}.$$

Cela donne bien un sous-espace fermé de $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m$. Nous démontrons :

Théorème 4.2 ([Wr7],[Wr12]). *Supposons l'Hypothèse 4.1. Alors $P : \mathcal{X}_{\mathbb{F}}^m \rightarrow \mathcal{Y}^m$ est inversible pour tous $m \in \mathbb{R}$. Son inverse $P_{\mathbb{F}}^{-1}$ (l'inverse de Feynman de P) vérifie :*

$$\text{WF}(P_{\mathbb{F}}^{-1})' = (\Delta_{T^*M}) \cup \bigcup_{t \leq 0} (\Phi_t(\Delta_{T^*M}) \cap \pi^{-1}\mathcal{N}).$$

Nous construisons aussi un *inverse d'anti-Feynman* $P_{\mathbb{F}}^{-1}$ et démontrons que $i(P_{\mathbb{F}}^{-1} - P_{\mathbb{F}}^{-1}) \geq 0$ (ce qui ne serait pas vrai pour la différence du propagateur retardé et avancé). Notons que cela ressemble à la positivité de la différence des deux valeurs au bord différentes d'une résolvante d'un opérateur auto-adjoint.

2. Travail [Wr10] : Inverse de Feynman par estimées de propagation

2.1. Régularité des fonctions propres. Rappelons que dans le sous-chapitre 2 du Chapitre 3 nous avons considéré l'opérateur d'onde (sur des espaces asymptotiquement Minkowski), conjugué par des puissances de ρ (la fonction définissant le bord à l'infini spatio-temporel),

$$P = \rho^{-(d-1)/2} \rho^{-2} \square_g \rho^{(d-1)/2}.$$

En faisant agir P sur des espaces de Sobolev d'ordre m variable le long du flot bicaractéristique, nous avons obtenu le propagateur retardé et avancé en demandant que l'ordre soit croissant sur une composante ${}^b\mathcal{N}^\pm$ et décroissant sur l'autre ${}^b\mathcal{N}^\mp$. Les mêmes arguments montrent qu'en prenant m décroissant sur toutes les deux composantes, on obtient un opérateur de Fredholm

$$(2.61) \quad P_F : \{u \in H_b^{m,0}(M) : Pu \in H_b^{m-1,0}(M)\} \rightarrow H_b^{m,0}(M),$$

dont les inverses généralisés sont des candidats pour des paramétrices de Feynman [68]. De même manière, en prenant m croissant on obtient un opérateur de Fredholm $P_{\bar{F}}$ dit *d'anti-Feynman*. De plus, pour des petites perturbations de Minkowski, P_F et $P_{\bar{F}}$ sont en fait inversibles [68].

Contrairement au cas massif et globalement hyperbolique de la sous-section 1 du chapitre présent, il n'y a pas d'argument général qui donnerait l'inversibilité de P_F . Dans le travail [Wr10], nous montrons néanmoins des analogues de résultats comme le Théorème 3.12 sur la structure de l'espace de solutions (modulo un nombre fini de termes) obtenues comme l'image de la différence $P_F^{-1} - P_{\bar{F}}^{-1}$ d'inverses généralisés. De plus, il est possible de donner un sens aux données asymptotiques de Feynman ϱ_F et d'anti-Feynman $\varrho_{\bar{F}}$. Elles sont construites de manière analogue aux données ϱ_\pm , mais au lieu de prendre une paire de données à l'infini passé ou futur, on prend une donnée à l'infini passé, et l'autre à l'infini futur. On peut ensuite reconstruire des solutions modulo un nombre fini de termes.

Nous démontrons que les données de Feynman diagonalisent la forme hermitienne définie par $i(P_F^{-1} - P_{\bar{F}}^{-1})$ en termes d'une matrice *positive*. Cela nous sert à montrer que les éléments du noyau de (2.61) ont des données asymptotiques nulles, et par conséquent sont forcément lisses dans l'intérieur de M par les estimées de propagation.

Théorème 4.3 ([Wr10]). *Soit (M, g) un espace asymptotiquement Minkowski (au sens de l'Hypothèse 3.10), et supposons que $l = 0$ n'est pas une résonance (au sens de l'Hypothèse 3.11). Alors*

$$\text{Ker } P_F \subset H_b^{\infty,0}(M).$$

Remarquons que c'est une propriété spéciale du cas Feynman (et anti-Feynman) qui ressemble au cadre elliptique. On peut donc spéculer que dans le cas lorentzien, un inverse de Feynman est l'objet le plus proche d'un inverse d'un opérateur elliptique (et non pas les propagateurs retardés et avancés).

Projecteurs de Calderón et rotation de Wick

Nous avons vu qu'en parallèle des théorèmes d'existence abstraits d'états de Hadamard, on a des constructions générales plus explicites pour des classes d'espace-temps qui se comportent bien à l'infini spatial ([104, 105, 106], [Wr1] et [Wr5]), ainsi que des résultats sur des états de Hadamard distingués par des propriétés globales ou asymptotiques ([127, 33, 34, 24, 142], [Wr6] et [Wr10]).

L'état des arts est toutefois très différent si on impose un analogue de la condition de Hadamard avec le front d'onde C^∞ remplacé par le *front d'onde analytique* WF_a (Définition 5.1), en supposant que l'espace-temps est analytique. La *condition de Hadamard analytique* a été introduite par Strohmaier, Verch et Wollenberg, qui ont démontré que quand elle est vérifiée, elle a des conséquences remarquables pour la théorie des champs : elle implique la *propriété de Reeh-Schlieder* [148]. Cela signifie qu'on peut approcher arbitrairement bien chaque vecteur dans l'espace d'Hilbert en agissant sur le vecteur de vide Ω_ω avec des opérations localisées dans une région de l'espace-temps aussi petite que l'on veut. Jusqu'à très récemment, seulement quelques exemples de fonctions à deux points vérifiant la condition de Hadamard analytique étaient connus : les *états de vide* et les *états de Hadamard* sur des espaces-temps analytiques avec un champ de vecteurs de Killing de type temps analytique [148]. Les difficultés viennent entre autres du fait que les méthodes valables dans le cas C^∞ ne sont pas directement utiles dans ce problème (en dehors du cas stationnaire) comme elles sont basées sur des outils comme le calcul pseudo-différentiel de Hörmander et ses généralisations.

Le travail [Wr9] donne une résolution de la conjecture d'existence générale d'états vérifiant la condition de Hadamard analytique. La méthode de rotation de Wick introduite dans [Wr9] est ensuite généralisée dans le travail [Wr13] afin de donner un lien direct entre les fonctions à deux points et les fonctions de Green pour le problème elliptique correspondant.

1. Travail [Wr9] : Projecteurs de Calderón et rotation de Wick

1.1. Condition de Hadamard analytique. Rappelons d'abord la définition du *front d'onde analytique* d'une distribution sur \mathbb{R}^n (on note \hat{v} la transformée de Fourier de $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$).

Définition 5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors (x^0, ξ^0) n'appartient pas au front d'onde analytique $WF_a(u)$ de u s'il existe un voisinage Ω^0 de x^0 dans Ω , un voisinage conique Γ^0 de ξ^0 , une constante $C > 0$ et une suite bornée $u_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ t.q. pour tous N ,

$u_N = u$ dans Ω^0 et

$$|\xi^N \widehat{u_N}(\xi)| \leq C(C(N+1))^N, \quad \xi \in \Gamma^0.$$

Il existe quelques autres définitions équivalentes, voir par exemple [96] ou [19]. Le front d'onde analytique se transforme de manière covariante sous les difféomorphismes analytiques, ce qui permet d'étendre la définition à des distributions sur une variété analytique.

On considère un espace-temps (M, g) *réel-analytique* (ou en plus court, *analytique*) globalement hyperbolique, et l'opérateur de Klein-Gordon sur M ,

$$P = -\square_g + V,$$

$V : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle-analytique. La définition de la condition de Hadamard analytique est analogue au cadre C^∞ :

Définition 5.2. *Un état quasi-libre pour P est un état de Hadamard analytique si ses fonctions à deux points Λ^\pm vérifient la condition de Hadamard analytique :*

$$(1.62) \quad \text{WF}_a(\Lambda^\pm)' \subset \mathcal{N}^\pm \times \mathcal{N}^\pm.$$

L'avantage par rapport à la condition de Hadamard C^∞ est qu'on a le résultat suivant, dû à Strohmaier, Verch et Wollenberg, et basé sur le *théorème de Kashiwara-Kawai* (voir par exemple [96, Thm. 8.5.6]). On considère un état quasi-libre ω et on note $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ son triple GNS.

Théorème 5.3 ([148]). *La condition de Hadamard analytique implique la propriété de Reeh-Schlieder, i.e., pour chaque ouvert $U \subset M$ non vide, l'espace*

$$\text{Vect}\left\{\pi_\omega\left(\prod_1^p \psi^*(u_i) \prod_1^q \psi(v_j)\right)\Omega_\omega : p, q \in \mathbb{N}, u_i, v_j \in C_c^\infty(U)\right\}$$

est dense dans \mathcal{H}_ω .

La propriété de Reeh-Schlieder a des conséquences importantes pour la théorie des champs, voir par exemple l'article de revue récent de Witten [162].

1.2. Construction par rotation de Wick. Nous donnons un résultat général d'existence :

Théorème 5.4 ([Wr9]). *Soit (M, g) un espace-temps analytique avec une surface de Cauchy analytique. Supposons que P est de forme $P = -\square_g + V$, où $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle-analytique. Il existe alors un état de Hadamard analytique pur pour P .*

Les étapes principales de la démonstration du Théorème 5.4 peuvent se résumer de façon suivante.

Premièrement, on démontre que le problème peut se réduire à une situation où l'espace-temps est remplacé par un voisinage d'une surface de Cauchy analytique Σ , avec une métrique lorentzienne de forme $-dt^2 + h_t(y)dy^2$. De plus, on justifie que $t \mapsto h_t$ peut être supposé sans perte de généralité une famille réelle-analytique de métriques sur Σ telle que h_0 est complète. Dans ce cadre, l'opérateur de Klein-Gordon s'écrit comme

$$P = \partial_t^2 + r(t, y)\partial_t + a(t, y, \partial_y),$$

où a est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2.

Ensuite, on exécute une *rotation de Wick* en t , ce qui veut simplement dire qu'en substituant $t = is$ on obtient un opérateur elliptique

$$K = -\partial_s^2 - ir(is, y)\partial_s + a(is, y, \partial_y),$$

défini sur un voisinage de $\{0\} \times \Sigma$. Après avoir possiblement choisi un voisinage plus petit Ω , on associe à K un opérateur fermé K_Ω en imposant les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord de Ω et on démontre que K_Ω est inversible.

L'étape suivante est une adaptation d'une idée de Gérard [70], qui est basée sur les *projecteurs de Calderón* de K_Ω sur l'hypersurface $\{s = 0\}$. Tandis que les projecteurs de Calderón sont des outils standards dans le domaine des problèmes elliptiques sur variétés à bord (voir e.g. [73, 97]), leur usage en théorie des champs sur espace-temps lorentziens dans les travaux [70] et [Wr9] est nouveau. En plus de ce qui est considéré dans la littérature sur les problèmes elliptiques [73], on a besoin ici de traiter des difficultés liées au fait que K n'est en général pas formellement autoadjoint, et l'hypersurface $\{s = 0\}$ peut ne pas être compacte.

En gros, l'idée est que pour les solutions de $K_\Omega u = 0$ dans $\Omega^\pm = \{\Omega \cap \pm s > 0\}$, on peut considérer leurs données de Cauchy

$$\gamma^\pm u = \begin{pmatrix} u|_\Sigma \\ -\partial_s u|_\Sigma \end{pmatrix},$$

où la trace sur Σ est définie comme limite de Ω^\pm .

En supposant pour le moment que Σ est une variété compacte, l'espace de toutes les données possibles peut être caractérisé comme l'image d'un projecteur c_Ω^\pm . Un fait bien connu dit que ces projecteurs peuvent être construits à l'aide de la formule

$$(1.63) \quad c_\Omega^\pm := \mp \gamma^\pm K_\Omega^{-1} \gamma^* S,$$

où S est une certaine matrice 2×2 d'opérateurs de multiplication et

$$\gamma^* f = \delta(s) \otimes f_0 + \delta'(s) \otimes f_1, \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \in C_c^\infty(\Sigma)^2.$$

Ensuite, tandis que c_Ω^\pm sont construits dans le cadre elliptique, on les utilise comme les données de Cauchy de bi-solutions Λ^\pm pour le problème hyperbolique d'origine. La propriété clé qui nous permet de conclure la condition de Hadamard analytique pour Λ^\pm est la suivante :

$$(1.64) \quad \forall f \in \mathcal{E}'(\Sigma)^2, \quad \text{WF}_a(U_\Sigma c_\Omega^\pm f) \subset \{\pm\tau \geq 0\},$$

où τ est la variable duale à t et $U_\Sigma c_\Omega^\pm f$ est l'unique solution de $Pu = 0$ avec données de Cauchy sur Σ égales à $c_\Omega^\pm f$. La stratégie générale de la démonstration de (1.64) est basée sur des idées de Schapira et peut se comprendre comme un cas particulier de l'analyse dans [143], bien que nous utilisons des outils analytiques différents. Dans notre cadre, l'étape principale, (si on oublie les variables spatiales $y \in \Sigma$ dans nos notations), consiste à construire un prolongement analytique d'une fonction $(-K_\Omega^{-1} \gamma^* S f)(s)$, et de démontrer que ce prolongement à une valeur au bord qui est précisément la distribution $(U_\Sigma c_\Omega^\pm f)(t)$. En utilisant les théorèmes de propagation de

singularités nous démontrons qu'il suffit d'avoir une telle construction localement, et ensuite nous le faisons en se basant sur des théorèmes sur les représentations de distributions comme sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

Pour démontrer que la paire d'opérateurs c_{Ω}^{\pm} peut effectivement s'utiliser à définir un état, on a besoin de vérifier qu'elle vérifie l'identité (bien connue dans le cas compact)

$$(1.65) \quad c_{\Omega}^{+} + c_{\Omega}^{-} = \mathbf{1},$$

ainsi qu'une certaine condition de positivité. Il se trouve que cette condition peut être montrée par un argument qui rappelle *la positivité par réflexion* en théorie des champs euclidienne sur \mathbb{R}^{1+d} .

Finalement, en supposant encore que Σ soit compacte, la propriété de pureté énoncée dans le Théorème 5.4 est juste un corollaire du fait que les opérateurs c_{Ω}^{\pm} sont des projections.

Le cas de Σ non compact est beaucoup plus compliqué du point de vue technique. Nous montrons que la formule (1.63) a toujours un sens (même sans aucune hypothèse sur la géométrie à l'infini spatial), et (1.64)-(1.65) sont toujours vérifiées. Toutefois, la pureté est bien plus délicate car il n'est pas clair a priori s'il y a un espace naturel sur lequel les opérateurs c_{Ω}^{\pm} seraient des projections. En utilisant un argument d'approximation nous montrons plutôt que c_{Ω}^{\pm} vérifient une condition plus faible, qui implique quand même la pureté. Cet argument d'approximation est aussi utilisé dans la démonstration des propriétés de positivité de c_{Ω}^{\pm} dans le cas non compact.

2. Travail [Wr13] : Rotation de Wick en deux variables

2.1. Motivation. En bref, la démonstration du Théorème 5.4 est basée sur le prolongement analytique de l'opérateur de Klein-Gordon P vers son homologue elliptique K . Toutefois, les objets directement pertinents pour la théorie quantique des champs, c'est-à-dire les fonctions à deux points lorentziennes Λ^{\pm} et l'inverse elliptique K^{-1} , sont a priori reliés d'une façon très indirecte, par intermédiaire de données de Cauchy pour P et de projecteurs de Caldéron pour K .

Dans le travail [Wr13] nous montrons que Λ^{+} et K^{-1} sont en fait directement reliés par rotation de Wick, dans le sens que l'un est la valeur au bord du prolongement analytique de l'autre.

Nous considérons un cadre plus général que dans le sous-chapitre précédent, où la rotation de Wick était limitée à un seul choix de coordonnées (les coordonnées gaussiennes normales par rapport à Σ), et le seul choix d'inverse K^{-1} considéré correspondait aux conditions aux limites de Dirichlet au bord d'un voisinage de $\{s = 0\}$. Inspirés par les idées du travail [71], nous utilisons un cadre plus covariant pour les projecteurs de Calderón, et on considère aussi des opérateurs plus généraux qui ne sont pas des projections. De plus, plutôt que d'étudier des conditions aux limites particulières on travaille avec une liste de propriétés abstraites qu'on exige de K^{-1} , correspondantes à des situations diverses. Une de nos motivations principales est d'inclure des cas comme les *états KMS* de manière dont ils apparaissent dans la construction

de Gérard de l'état de Hartle-Hawking-Israel [70, 71], où des conditions aux limites périodiques doivent être imposées.

2.2. Cadre géométrique pour rotation de Wick et résultat principal. Si X est une variété lisse, on note $\mathbb{T}_q^p(X)$ l'espace des (p, q) tenseurs lisses réels sur X , et $\mathbb{CT}_q^p(X)$ le complexifié. Une *métrique complexe* sur X est par définition un élément symétrique et non dégénéré $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{ab}(x)dx^a dx^b$ de $\mathbb{CT}_2^0(X)$.

Définition 5.5. Soit X une variété lisse orientable et $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{ab}(x)dx^a dx^b$ une métrique complexe. On dit que :

(1) \mathbf{k} est coercive s'il existe une fonction continue $C : X \rightarrow]0, +\infty[$ t.q.

$$|\operatorname{Im}(\bar{v}^a \mathbf{k}_{ab}(x) v^b)| \leq C(x) \operatorname{Re}(\bar{v}^a \mathbf{k}_{ab}(x) v^b), \quad \forall x \in X, v \in \mathbb{CT}_x X.$$

(2) \mathbf{k} est positive si $|\mathbf{k}(x)| = \det(\mathbf{k}_{ab}(x)) > 0$ pour tous $x \in X$.

On considère le cadre suivant.

Hypothèse 5.6. Soit Σ une variété analytique connexe. On considère un espace-temps globalement hyperbolique (M, \mathbf{g}) qui est un voisinage de $\{t = 0\}$ dans $\mathbb{R}_t \times \Sigma$. On suppose que $\{t = 0\}$ est une surface de Cauchy, et \mathbf{g} est de forme

$$\mathbf{g} = -N^2(t)dt^2 + \mathbf{h}_{jk}(t)(dy^j + w^j(t)dt)(dy^k + w^k(t)dt),$$

avec tous les coefficients réels-analytiques en t et analytiques dans toutes les variables. On pose

$$\mathbf{k} = N^2(is)ds^2 + \mathbf{h}_{jk}(is)(dy^j + iw^j(is)ds)(dy^k + iw^k(is)ds).$$

On considère l'opérateur de Klein-Gordon et son homologue pour la métrique \mathbf{k} :

$$P = -|\mathbf{g}|^{-\frac{1}{2}} \partial_a |\mathbf{g}|^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}^{ab} \partial_b + \lambda, \quad K = -|\mathbf{k}|^{-\frac{1}{2}} \partial_a \mathbf{k}^{ab} |\mathbf{k}|^{\frac{1}{2}} \partial_b + \lambda,$$

avec λ une fonction réelle-analytique.

La condition de réelle-analyticité implique que la métrique \mathbf{g} est réelle pour t réel. Par contre, la métrique \mathbf{k} n'est pas forcément réelle. Cela signifie que K n'est pas forcément formellement autoadjoint. Plutôt, l'adjoint formel est donné par la formule

$$K^* = \kappa \circ K \circ \kappa, \quad \text{où } (\kappa u)(s, y) = u(-s, y).$$

On a besoin que K possède un inverse dans le sens précis de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.7. Soit X un voisinage κ -invariant de $\{0\} \times \Sigma$. On suppose que :

(1) Il existe un opérateur continu

$$K^{-1} : H_c^{-1}(X) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(X),$$

tel que $KK^{-1} = \mathbf{1}$ sur $H_c^{-1}(X)$ et $K^{-1}K = \mathbf{1}$ sur $H_c^1(X)$.

(2) Pour tous $v \in H_c^1(X)$,

$$\int_{X \cap \{\pm s > 0\}} (\nabla_a \bar{v} \operatorname{Re} \mathbf{k}^{ab} \nabla_b v + \bar{v} \lambda v) d\mu_{\mathbf{k}} \geq 0.$$

- (3) Il existe une suite (χ_i) , $\chi_i \in C_c^\infty(X)$, telle que $\chi_i = \kappa\chi_i\kappa$ et :
- a) Pour chaque $Y \Subset X$, $\chi_i = 1$ sur Y pour i suffisamment large.
 - b) Pour tous i , $\partial_n\chi_i = 0$ dans un voisinage Y_i de $\{s = 0\}$.
 - c) Pour tous $u, v \in \text{Ran } K^{-1}$, $(v|\chi_i[K, \chi_i]u) \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$.

Remarquons que la propriété (3) est trivialement vérifiée si X est compact, comme dans ce cas on peut prendre $\chi_i = 1$ for all i .

Exemple 5.8. La situation considérée dans le sous-chapitre précédent (voir [Wr9] pour plus de détails) est un cas spécial de (1), (2) et (3).

Exemple 5.9. Une étape intermédiaire dans la construction de l'état de Hartle-Hawking-Israel dans [71] consiste à considérer K sur un cylindre $X = \mathbb{S}_\beta \times \Sigma$ où \mathbb{S}_β est le cercle de longueur β . Dans la situation de [71], K définit une forme sesquilinéaire fermable sur $C_c^\infty(X)$, et sa fermeture est *sectorielle*. Par le théorème de Lax-Milgram, cela définit un isomorphisme de la domaine de forme dans son dual, ce qui permet de conclure que l'Hypothèse 5.7 (1) est vérifiée.

On obtient le résultat suivant (dans nos notations on ne tient pas compte des variables spatiales lorsqu'on écrit des noyaux de Schwartz).

Théorème 5.10 ([Wr13]). *Supposons les Hypothèses 5.6 et 5.7. Il existe alors un $\delta > 0$, une paire de fonctions à deux points Λ^\pm pour P , ainsi qu'une paire de fonctions holomorphes F^\pm en deux variables à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Sigma^2)$, telles que :*

$$(2.66) \quad \begin{aligned} K^{-1}(s_1, s_2) &= F^\pm(is_1, is_2), \quad \pm s_1 > 0, \quad \pm s_2 < 0, \\ \Lambda^\pm(t_1, t_2) &= F^\pm((t_1, t_2) \pm i\Gamma 0), \quad t_1, t_2 \in]-\delta, \delta[, \end{aligned}$$

où la notation $(t_1, t_2) \pm i\Gamma 0$ veut dire qu'on prend la limite $(s_1, s_2) \rightarrow 0$ à partir du cône $\pm\Gamma = \{\pm s_1 > 0, \pm s_2 < 0\}$.

Rappelons que les fonctions à deux points sont des bi-solutions $\Lambda^\pm \in \mathcal{D}'(M^2)$ de l'équation de Klein-Gordon qui sont des noyaux de Schwartz d'opérateurs positifs sur $C_c^\infty(M)$, et qui vérifient $\Lambda^+ - \Lambda^- = iG$. Pour vérifier ces conditions, on construit Λ^\pm en spécifiant leur données de Cauchy en $t = 0$ en termes d'opérateurs qui généralisent les projecteurs de Calderón associés à K^{-1} . Nous étudions ensuite ces opérateurs en détail afin de démontrer que Λ^\pm sont bien des fonctions à deux points. La démonstration de (2.66) utilise des formules qui resorted de cette analyse ainsi que certaines symétries du problème, combinées avec une généralisation de la méthode développée dans [Wr9].

Anti de Sitter et holographie

Les Chapitres 1 à 5 sont basés sur le formalisme de la théorie des champs linéaire sur espace-temps *globalement hyperboliques*. Les aspects fondamentaux de cette théorie sont aujourd'hui bien compris, et un cadre rigoureux a été établi lors des quelques dernières décennies. Le formalisme général, résumé dans quelques livres et articles [88, 15, 62, 59, 114, 63], surmonte les difficultés engendrées par l'absence de symétries. Nous avons vu en particulier que la notion d'état de vide, basée sur l'existence d'un champ de Killing de type temps, est remplacée par une classe d'états physiques qui vérifient la condition de Hadamard.

Cependant, l'hypothèse que l'espace-temps est globalement hyperbolique contraint les applications possibles de cette théorie, comme cela exclut par exemple *l'espace anti de Sitter* (ou *AdS*). Cet espace-temps, ainsi que la classe d'*espaces asymptotiquement AdS*, est l'objet de vastes études, surtout dans le contexte de la conjecture AdS/CFT [120]. Cette conjecture relie une théorie hypothétique de gravité quantique à une théorie conforme sur le bord d'un espace asymptotiquement AdS. Il est important d'accentuer le fait qu'elle parle de degrés de libertés gravitationnels dynamiques, il n'est donc pas suffisant d'étudier des théories effectives juste sur l'espace AdS exact. Malheureusement, bien qu'il existe des constructions rigoureuses dans ce cas particulier, [3, 135, 49, 50, 22, 100, 51, 113, 14, 31], elles font toutes usage de symétries et contiennent peu d'indications sur le cadre général. Cela est clairement très différent de la situation sur les espaces-temps globalement hyperboliques.

Dans l'article [Wr8] nous donnons une construction systématique et rigoureuse de champs quantiques linéaires scalaires sur les espaces asymptotiquement AdS. Nous considérons pour l'instant le cas de conditions aux limites de Dirichlet à l'horizon (d'autres conditions aux limites sont le sujet de travaux en cours). Nous développons un cadre algébrique qui généralise le formalisme dans le cas globalement hyperbolique, et comme critère pour sélectionner la classe d'états physiques, nous proposons ce que nous appelons la *condition de Hadamard holographique*. Nous démontrons que les états qui vérifient cette condition existent bien, et que leur fonctions à deux points sont uniques modulo des termes qui sont lisse dans l'intérieur (ce qui donne un analogue du théorème de Radzikowski). De plus, comme nous allons l'expliquer, un résultat semblable est vrai pour la *théorie conforme induite sur le bord*.

Donnons d'abord un aperçu des travaux antécédents sur les champs classiques et quantiques sur des espaces asymptotiquement AdS, en commençant par le cas classique.

L'équation de Klein-Gordon sur AdS a été étudiée par Breitenlohner et Freedman [21], qui ont démontré l'existence de solutions pour un certain régime de masses (cf. le travail de Yagdjian and Galstian, qui ont donné des formules explicites [164]), et par Ishibashi et Wald [100], qui ont décrit les dynamiques statiques correspondantes à des conditions aux limites différentes. Un résultat analogue à [21] dans le cas de l'équation de Dirac a été obtenu par Bachelot [5]. La solvabilité avec conditions aux bord de Dirichlet dans le cas plus général d'espace asymptotiquement AdS a été établie par Holzegel [89] et retravaillée par Vasy [151], qui a en plus démontré un théorème de propagation de singularités dans ce cadre. Les conditions aux limites de Neumann et Robin ont été étudiés par Warnick [160], et d'autres conditions aux limites ont été traitées par Holzegel, Luk, Smulevici and Warnick [90]; ceci est aussi lié à un travail de Bachelot [7] dans le cas d'AdS exact, et de Gannot [66] dans le cas statique. Des applications à la holographie (en termes de donner un sens aux traces sur le bord) ont été étudiées par Enciso et Kamran, et l'équation de Proca a été étudiée dans un cadre général par Gover, Latini et Waldron [72]. L'équation de Klein-Gordon et de Dirac sur des trous noirs asymptotiquement AdS font l'objet d'un grand nombre d'études récentes, entre autres [94, 93, 98, 161, 67, 45].

La théorie quantique des champs sur AdS a été étudiée par Avis, Isham et Storey [3], qui ont basé leur analyse sur la connaissance de formules exactes pour des solutions et bi-solutions de l'équation de Klein-Gordon en termes de fonctions spéciales. Cette approche a été ensuite développée dans un langage rigoureux par Bros, Epstein et Moschella [22].

L'intérêt suscité par la correspondance AdS/CFT [120] a provoqué des questions sur comment cette dualité peut se transférer au niveau des champs quantiques, et quelles sont ses manifestations au niveau des observables. Cela a été largement clarifié par les travaux de Rehren [134, 135], qui a proposé une *dualité algébrique* (voir [136, 137] pour une généralisation aux espace-temps asymptotiquement AdS) et par Dütsch et Rehren [49, 50, 51], Kay et Larkin [109] et Kay et Ortíz [110]. Un travail de Zahn [165] décrit aussi un mécanisme holographique en quelque sorte semblable aux modèles de dualité AdS/CFT, bien que dans un cadre différent.

Wald [158] et Ishibashi and Wald [99, 100] ont donné les bases mathématiques pour la construction de champs quantiques sur des espace asymptotiquement AdS statiques en étudiant la dynamique classique et le rôle des conditions aux limites. D'autres résultats utiles ont été obtenus pour la région de Poincaré de AdS par Bachelot [6] (voir aussi [8] pour une analyse centrée sur les branes de Sitter).

Les développements autour de la condition de Hadamard (en particulier les applications à la renormalisation) ont motivés des travaux sur le comportement local de fonctions à deux points sur AdS et d'autres espace-temps globalement hyperboliques en utilisant la paramétrix de Hadamard comme ingrédient principal [108, 113, 14, 31]. Toutefois, aucune proposition micro-locale dans l'esprit du travail fondamental de Radzikowski [133] n'a été faite, et il n'est pas clair comment traiter des phénomènes holographiques avec ces approches purement locales.

1. Travail [Wr8] : Champs linéaires sur espaces asymptotiquement AdS

1.1. Équation de Klein-Gordon sur espaces asymptotiquement AdS. Le point de vue qu'on adopte peut se résumer ainsi : tout comme sur un espace-temps globalement hyperbolique, les singularités des solutions de l'équation de Klein-Gordon (et donc des fonctions à deux points) se décrivent naturellement à l'aide du front d'onde, pour des espaces temps asymptotiquement AdS il est utile d'utiliser le *b-front d'onde*, comme le motive le théorème de propagation des singularités de Vasy.

Introduisons d'abord le cadre géométrique, en suivant le travail de Vasy [151]. On utilise ici la convention $(+, -, \dots, -)$ pour la signature de métriques lorentziennes.

Définition 6.1. *On dit qu'un espace-temps (M, g) est asymptotiquement anti de Sitter si près de ∂M , la métrique g peut s'écrire sous forme*

$$(1.67) \quad g = \frac{-dz^2 + h}{z^2},$$

avec $h \in C^\infty(M; \text{Sym}^2 T^* M)$ tel que pour une décomposition produit $M = \partial M \times [0, \epsilon)_z$ près de ∂M , $h|_{\partial M}$ est une section de $T^* \partial M \otimes T^* \partial M$ et une métrique lorentzienne sur ∂M .

Pour prendre compte du fait que les géodésiques nulles peuvent toucher le bord ∂M , il est utile d'introduire la notion de *géodésiques nulles brisées* sur M . Elles peuvent être définies comme la projection de M des *bicaractéristiques brisées généralisées* [116].

Hypothèse 6.2. *Nous supposons que (M, g) est un espace asymptotiquement AdS et nous faisons les hypothèse globales suivantes :*

(TF) *il existe $t \in C^\infty(M)$ qui sur chaque géodésique nulle brisée est strictement croissante ou strictement décroissante, et prend toutes les valeurs réelles ;*

(PT) *topologiquement, $M = \mathbb{R}_t \times \Sigma$ pour une variété compacte à bord Σ .*

Les exemples les plus élémentaires sont :

Exemple 6.3. Le recouvrement universel d'anti de Sitter peut être décrit comme la variété $M_{\text{AdS}} = \mathbb{R}_t \times \overline{\mathbb{B}^{n-1}}$ (où $\overline{\mathbb{B}^{n-1}}$ est la boule fermée) munie de la métrique

$$g_{\text{AdS}} = \frac{-(1+z^2)^{-1} dz^2 + (1+z^2) dt^2 - d\omega^2}{z^2}$$

sur $[0, 1)_z \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_\omega^{n-2}$, avec bord $\partial M_{\text{AdS}} = \{z = 0\}$, voir e.g. [151] pour plus de détails.

Exemple 6.4. La région de Poincaré d'anti de Sitter est la variété $M_{\text{PAdS}} = [0, \infty)_z \times \mathbb{R}^{n-1}$ munie de la métrique

$$g_{\text{PAdS}} = \frac{-dz^2 + dt^2 - dx^2}{z^2}.$$

Écrivons l'opérateur de Klein-Gordon sur (M, g) comme

$$(1.68) \quad P = \square_g + \nu^2 - \frac{(n-1)^2}{4}, \quad \square_g = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu (|g|^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \partial_\nu),$$

où $n \geq 2$ est la dimension de M et ν^2 est un paramètre réel. Comme dans la vaste majorité de la littérature, on suppose la *borne de Breitenlohner-Freedman* :

Hypothèse 6.5. *On considère l'opérateur de Klein-Gordon (1.68) avec $\nu > 0$.*

Un des résultats fondamentaux dus à Vasy [151] est l'existence de *propagateurs retardés et avancés de Dirichlet* G_\pm , i.e., d'inverses de P qui résolvent $Pu = v$ et $u|_{\partial M} = 0$ pour u qui s'annule à l'infini passé/futur, étant donné v avec la même propriété.

Introduisons très brièvement les espaces de distributions naturels dans ce contexte.

Soit $L^2(M) = L^2(M, g)$, et notons par $(\cdot|\cdot)_{L^2}$ le produit correspondant. Remarquons que dû au comportement de la métrique g près du bord, cet espace est très différent par exemple de $L^2([0, +\infty)_z \times \mathbb{R}^{n-1})$ et ressemble plutôt à un espace à poids comme $z^{n/2} L^2([0, +\infty)_z \times \mathbb{R}^{n-1})$. Rappelons que l'espace de *distributions extensibles* $C^{-\infty}(M)$ peut être défini comme le dual de l'espace des fonctions lisses qui s'annulent à tout ordre à ∂M .

L'espace *zero-Sobolev* d'ordre 1 est défini par

$$H_0^1(M) = \{u \in C^{-\infty}(M) : Qu \in L^2(M) \forall Q \in \text{Diff}_0^1(M)\},$$

où $\text{Diff}_0^1(M)$ est l'espace de tous les champs de vecteurs et opérateurs de multiplication qui s'annulent au bord ∂M . Ensuite, on note $H_0^0(M) = L^2(M)$, et on définit $H_0^{-1}(M)$ comme le dual de $H_0^1(M)$ en utilisant le produit $L^2(M)$.

Définition 6.6. *Pour $k \in \{-1, 0, 1\}$, $H_{0,b}^{k,\infty}(M)$ est l'espace de distributions conormales par rapport à $H_0^k(M)$, i.e.,*

$$H_{0,b}^{k,\infty}(M) = \{u \in H_0^k(M) : Qu \in H_0^k(M) \forall Q \in \text{Diff}_b(M)\},$$

Ci-dessus, $\text{Diff}_b(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \text{Diff}_b^k(M)$ est l'espace des opérateurs b-différentiels : on peut les caractériser comme les opérateurs différentiels obtenus en composant des champs de vecteurs *tangents* à ∂M et ajoutant des opérateurs de multiplication.

On utilisera aussi le sous-espace $H_{0,c}^k(M)$ de $H_0^k(M)$ (et le sous-espace $H_{0,b,c}^{k,\infty}(M)$ de $H_{0,b}^{k,\infty}(M)$) formé d'éléments à support compact. Ici, 'support compact' est au sens de la variété à bord M , donc il est possible de toucher le bord ∂M . Comme dans notre cadre les directions spatiales sont compactifiées, 'support compact' s'interprète simplement comme 'supporté dans un intervalle de temps fini'.

Ensuite, soit $H_{0,\text{loc}}^k(M)$ l'espace de distributions qui localement sont $H_0^k(M)$ (et semblablement pour $H_{0,b,\text{loc}}^{k,\infty}(M)$). Après avoir introduit les topologies correctement, on peut montrer que $H_{0,\text{loc}}^k(M)$ est en dualité avec $H_{0,c}^{-k}(M)$. Remarquons qu'à l'intérieur M° , $H_{0,b,\text{loc}}^{k,\infty}(M)$ coïncide avec $C^\infty(M^\circ)$.

Finalement, les espaces à régularité conormale arbitrairement basse sont définis par dualité, par exemple, $H_{0,b,\text{loc}}^{1,-\infty}(M)$ est le dual de $H_{0,b,c}^{-1,\infty}(M)$.

1.2. Condition de Hadamard holographique. Le propagateur retardé et avancé sont continus comme applications :

$$G_{\pm} : H_{0,b,c}^{-1,\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\text{loc}}^{1,\infty}(M), \quad G_{\pm} : H_{0,b,c}^{-1,-\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\text{loc}}^{1,-\infty}(M).$$

Nous donnons un sens à la théorie des champs sur (M, g) en définissant d'abord l'espace de phase, dont la construction est résumée dans le théorème suivant.

Proposition 6.7 ([Wr8]). *Le propagateur causal de Dirichlet $G := G_+ - G_-$ induit une bijection*

$$(1.69) \quad [G] : \frac{H_{0,b,c}^{-1,\infty}(M)}{PH_{0,b,c}^{1,\infty}(M)} \longrightarrow \{u \in H_{0,b,\text{loc}}^{1,\infty}(M) : Pu = 0\}.$$

De plus, $i(\cdot|[G]\cdot)_{L^2}$ est une forme hermitienne non dégénérée sur l'espace quotient ci-dessus.

Dans ce cadre, les analogies avec le cas globalement hyperboliques et les propriétés de P motivent d'appeler *fonctions à deux points* pour P les paires d'opérateurs

$$(1.70) \quad \Lambda^{\pm} : H_{0,b,c}^{-1,-\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\text{loc}}^{1,-\infty}(M),$$

qui vérifient :

$$(1.71) \quad \begin{aligned} i) \quad & P\Lambda^{\pm} = \Lambda^{\pm}P = 0, \\ ii) \quad & \Lambda^+ - \Lambda^- = iG \text{ et } \Lambda^{\pm} \geq 0. \end{aligned}$$

L'ingrédient clé de nos résultats et du travail de Vasy est le cadre du *b-calculus* de Melrose [121, 122], déjà mentionné avant.

Expliquons quelques de ses ingrédients dans le contexte présent. On considère les distributions dans $H_{0,b,c}^{1,\infty}(M)$ comme étant 'maximalement régulières'. Plus généralement, si u est une distribution dans $H_{0,b,\text{loc}}^{1,-\infty}(M)$, on introduit l'ensemble $\text{WF}_b^{1,\infty}(u)$ (le *b-front d'onde* de u) qui indique où micro-localement u n'est pas $H_{0,b,c}^{1,\infty}(M)$. Le théorème de Vasy décrit la propagation de $\text{WF}_b^{1,\infty}(u)$ étant donné de l'information sur la b-régularité de Pu [151]. Localement dans l'intérieur de M , cela se réduit au théorème de propagation des singularités de Hörmander ; par contre, le nouvel aspect est la réflexion des singularités lorsqu'elles atteignent le bord.

Le front d'onde $\text{WF}_b^{1,\infty}(u)$ peut être défini de manière analogue au cas C^∞ en remplaçant les classes usuelles d'opérateurs pseudo-différentiels par la classe $\Psi_b(M)$ qui généralise les opérateurs b-différentiels $\text{Diff}_b(M)$.

Une des difficultés dans notre situation est qu'on s'intéresse aux singularités de noyaux de Schwartz, qui sont des objets plutôt complexes dans le cas de variétés à bord. L'idée que nous employons consiste à tout reformuler en termes d'opérateurs et de leurs compositions avec des éléments de $\Psi_b(M)$. Nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 6.8. *La classe d'opérateurs b-régularisants $\mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$ est l'ensemble des opérateurs bornés de $H_{0,b,c}^{-1,-\infty}(M)$ dans $H_{0,b,\text{loc}}^{1,\infty}(M)$.*

Définition 6.9. Soit $\Lambda : H_{0,b,c}^{-1,-\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\text{loc}}^{1,-\infty}(M)$ un opérateur continu. Une paire de points $(q_1, q_2) \in ({}^bT^*M \setminus o) \times ({}^bT^*M \setminus o)$ n'est pas dans $\text{WF}_b(\Lambda)'$ s'il existe $B_i \in \Psi_b^0(M)$, elliptique en q_i ($i = 1, 2$), tel que $B_1 \Lambda B_2^* \in \mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$.

Remarquons que contrairement à la définition du front d'onde $\text{WF}(\Lambda)'$ d'un noyau de Schwartz sur une variété sans bord, la Définition 6.9 ne dit rien des singularités potentiellement localisées dans la section zéro d'une des composantes. Toutefois, il est possible d'avoir une description complète des singularités si on contrôle en plus la propriété que

$$\Lambda : H_{0,b,c}^{-1,\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\text{loc}}^{1,\infty}(M)$$

soit continu. Nous montrons que si c'est le cas alors $\text{WF}_b(\Lambda)' = \emptyset$ implique effectivement que $\Lambda \in \mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$.

Comme sur chaque composante, $\text{WF}_b(\Lambda)'$ est invariant par les homothéties sur les fibres, on peut remplacer chaque copie de ${}^bT^*M \setminus o$ par le quotient

$${}^bS^*M = ({}^bT^*M \setminus o) / \mathbb{R}_+$$

par l'action de \mathbb{R}_+ par homothéties sur les fibres : ceci nous permet de parler de voisinages de points dans un front d'onde.

Nous proposons la définition suivante.

Définition 6.10. Nous disons qu'une paire d'opérateurs Λ^\pm vérifie la condition de Hadamard holographique si

$$(1.72) \quad \text{WF}_b(\Lambda^\pm)' \subset \dot{\mathcal{N}}^\pm \times \dot{\mathcal{N}}^\pm.$$

Les ensembles $\dot{\mathcal{N}}^\pm$ sont les nappes positives et négatives de l'ensemble caractéristique compressé $\dot{\mathcal{N}}$ de P . Pour expliquer cela très brièvement, notons d'abord \tilde{g} la métrique 'désingularisée' z^2g . L'ensemble caractéristique compressé $\dot{\mathcal{N}}$ est obtenu à partir de l'ensemble caractéristique \mathcal{N} de $\square_{\tilde{g}}$ en identifiant les covecteurs de même moment tangentiel. On voit donc que la condition (1.72) est très semblable à la condition de Hadamard sur les espace-temps globalement hyperboliques, avec la différence principale qu'il y a la possibilité de réflexion des singularités au bord.

Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 6.11 ([Wr8]). *Supposons les Hypothèses 6.2 et 6.5. Il existe des fonctions à deux points Λ^\pm qui vérifient la condition de Hadamard holographique (1.72), et elles sont uniques modulo des termes dans $\mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$ (donc en particulier modulo des termes dont le noyau est lisse dans l'intérieur M°).*

Nous démontrons le résultat d'existence en adaptant à notre cadre l'argument de déformation de Fulling, Narcowich and Wald [64], originellement proposé pour des espaces globalement hyperboliques.

En utilisant le théorème de propagation des singularités de Vasy on montre aussi un analogue du théorème de Duistermaat & Hörmander's [48] sur les paramétrices distinguées dans notre cadre. La démonstration diffère de la stratégie de [48], et utilise le Théorème 6.11.

On note $\pi : {}^bT^*M \rightarrow M$ la projection du fibré, et pour $q_1, q_2 \in {}^bS^*M$ on écrit $q_1 \sim q_2$ s'ils sont sur la même bicaractéristique brisée généralisée.

Théorème 6.12 ([Wr8]). *Supposons les Hypothèses 6.2 et 6.5. Alors :*

$$\mathrm{WF}_b(G_\pm) \wedge \Delta_t \subset \{(q_1, q_2) : q_1 \sim q_2, \pm t(\pi q_1) > \pm t(\pi q_2)\},$$

où $\Delta_t = \{(q_1, q_2) \in {}^b S^* M \times {}^b S^* M : t(\pi q_1) = t(\pi q_2)\}$. De plus, supposons que Λ^\pm sont des fonctions à deux points holographiques. Alors

$$\mathrm{WF}_b(\Lambda^\pm)' \subset \{(q_1, q_2) \in \dot{\mathcal{N}}^\pm \times \dot{\mathcal{N}}^\pm : q_1 \sim q_2 \text{ ou } \pi q_1 = \pi q_2\}.$$

Si on pose $G_F := i^{-1}\Lambda^+ + G_-$ et $G_{\bar{F}} := -i^{-1}\Lambda^- + G_-$, alors :

$$\mathrm{WF}_b(G_F) \wedge \Delta_t \subset \{(q_1, q_2) : q_1 \sim q_2, \text{ and } \pm t(\pi q_1) \leq \pm t(\pi q_2) \text{ si } q_1 \in \dot{\mathcal{N}}^\pm\},$$

$$\mathrm{WF}_b(G_{\bar{F}}) \wedge \Delta_t \subset \{(q_1, q_2) : q_1 \sim q_2, \text{ and } \mp t(\pi q_1) \leq \mp t(\pi q_2) \text{ si } q_1 \in \dot{\mathcal{N}}^\pm\}.$$

Théorème 6.13 ([Wr8]). *Sous les mêmes hypothèses, supposons qu'on a un opérateur*

$$\tilde{G}_+ : H_{0,b,c}^{-1,-\infty}(M) \rightarrow H_{0,b,\mathrm{loc}}^{1,-\infty}(M)$$

qui vérifie $P\tilde{G}_+ = \mathbf{1}$, $\tilde{G}_+P = \mathbf{1}$ modulo des termes dans $\mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$, et

$$\mathrm{WF}_b(\tilde{G}_+) \wedge \Delta_t \subset \{(q_1, q_2) : q_1 \sim q_2, t(\pi q_1) > t(\pi q_2)\}.$$

Alors $\tilde{G}_+ - G_+ \in \mathcal{W}_b^{-\infty}(M)$. Le résultat analogue est vrai pour les trois autres types de propagateurs.

1.3. Théorie induite sur le bord conforme. Le mot *holographique* dans notre définition indique des propriétés spéciales des fonctions à deux points vérifiant (1.72). Pour expliquer cela, introduisons quelques aspects de la correspondance AdS–CFT dans le cadre des champs libres. Comme une brève inspection de l'équation $Pu = 0$ le motive, on peut s'attendre à ce que les solutions sont de formes

$$(1.73) \quad u = z^{\nu_+} v_+ + z^{\nu_-} v_-, \quad \nu_\pm = \frac{n-1}{2} \pm \nu,$$

avec $v_- = 0$ dans notre cas, pour raison de compatibilité avec la condition aux limites de Dirichlet. En étendant un argument de Vasy [150, 151] on démontre que (1.73) est vrai pour u conormal en z à valeurs dans les distributions dans ∂M , et de plus, on montre que ça implique $v_+ \in C^\infty([0, \epsilon]_z; \mathcal{D}'(\partial X))$. Cela signifie en particulier que la trace à poids

$$\partial_+ u := (z^{-\nu_+} u) \upharpoonright_{\partial M}$$

est bien définie. Comme $z^{-\nu_+} u = v_+$ est lisse dans la direction normale au bord, l'information sur la régularité conormale de u donnée par le b-front d'onde $\mathrm{WF}_b^{1,\infty}(u)$ peut être utilisée pour estimer le front d'onde (usuel, C^∞) de $\partial_+ u$.

Pour les champs libres, le premier aspect important de la correspondance AdS–CFT est qu'on cherche à redéfinir ∂_+ au niveau des champs quantiques. En termes de fonctions à deux points, l'objet à étudier est donc $\partial_+ \Lambda^\pm \partial_+^* : C_c^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$. Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 6.14 ([Wr8]). *Supposons les Hypothèses 6.2 et 6.5. Si Λ^\pm sont des fonctions à deux points pour P alors*

$$\partial_+ \Lambda^\pm \partial_+^* : C_c^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$$

est bien défini. De plus, si Λ^\pm vérifient la condition de Hadamard holographique (1.72), alors

$$\text{WF}(\partial_+ \Lambda^\pm \partial_+^*)' \subset \pm(\Gamma \times \Gamma)$$

pour un certain $\Gamma \subset T^* \partial M \setminus o$ tel que $\Gamma \cap -\Gamma = \emptyset$ (où le signe moins signifie multiplication par -1 dans les variables duales). De plus, si $\tilde{\Lambda}^\pm$ est une autre paire de telles fonctions à deux points, alors $\partial_+(\tilde{\Lambda}^\pm - \Lambda^\pm)\partial_+^*$ a un noyau de Schwartz lisse.

Suivant la terminologie des *champs libres généralisés* sur espace-temps courbes introduite par Sanders [141], Λ^\pm induit une paire de fonctions à deux points $\partial_+ \Lambda^\pm \partial_+^*$ qui vérifie la *condition de Hadamard généralisée*. Cela correspond bien à ce qu'on peut s'attendre en connaissant les propriétés des champs libres généralisés (qui sont en quelque sorte des superpositions de champs à masses différentes) sur le bord d'AdS exact [50].

2. Travail [Wr14] : Mécanisme holographique pour champs linéaires

2.1. Holographie en théorie des champs. Jusqu'à présent nous nous sommes concentrés sur la question comment est-ce qu'une théorie des champs classique ou quantique sur un espace asymptotiquement AdS (le 'bulk') induit une théorie sur le bord. Le problème plus difficile est de savoir si la connaissance de la théorie sur bord permet de reconstruire la théorie dans le bulk et/ou la géométrie du bulk.

Il existe quelques idées (la plupart pour le cas de l'espace anti de Sitter exact), plus ou moins rigoureuses, sur comment montrer un tel phénomène. Toutefois, elles ne procurent pas de mécanisme général basé sur un phénomène semblable pour les champs classiques. Pourtant, nous avons vu que la définition de la trace à poids ∂_+ sur le bord est très naturelle du point de vue des équations aux dérivées partielles, et on s'attend à ce qu'une dualité au niveau quantique ait des implications au niveau classique.

La *dualité algébrique* de Rehren [134, 135] (voir aussi [136, 137]) dit comment on associe *géométriquement* des algèbres d'observables sur le bord à des algèbres dans le bulk de façon bijective. Cela ne fait pas référence à une dynamique classique. Un lien plus clair avec le cas classique est donné par ce que l'on appelle parfois la '*field-theoretical correspondence*', celle-ci est toutefois basée sur une application qui intègre en paramètres de masses différent sur le bord ; en résultat on obtient une théorie qui n'a pas le nombre de degrés de liberté anticipé, voir e.g. [49] et [50, (4.17)]. Des indications multiples sur les phénomènes classiques derrière l'holographie quantique se trouvent dans la littérature physique, e.g. [78, 128, 112]. Cependant, il s'agit le plus souvent d'analyse qui utilise des formules exactes et des hypothèses de symétrie, ce qui obscurcit l'existence d'un mécanisme général.

2.2. Un mécanisme classique pour l'holographie. Dans le travail [Wr14] on considère les champs de Klein-Gordon linéaires sur un espace asymptotiquement AdS dans le cadre introduit dans le sous-chapitre

précédent. On démontre une certaine dualité pour les observables quantiques, basée sur des *théorèmes de prolongement unique à travers une hypersurface de type temps*.

Notons par (\mathcal{V}, q) l'espace de phase obtenu dans la Proposition 6.7. Soit Λ^\pm des fonctions à deux points (rappelons que dans notre cadre, on suppose qu'elles vérifient une condition de régularité (1.70)). Notons par \mathcal{V}^{cpl} le complété de \mathcal{V} par rapport au produit scalaire induit par $\frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-)$, et q^{cpl} l'extension correspondante de q . On considère la C^* -algèbre de Weyl

$$\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(M) := \text{CCR}^{\text{Weyl}}(\mathcal{V}^{\text{cpl}}, q^{\text{cpl}})$$

associée à l'espace de phase $(\mathcal{V}^{\text{cpl}}, q^{\text{cpl}})$ (voir par exemple [36]; dans le contexte présent il est utile d'avoir une version C^* -algébrique de l'algèbre CCR plutôt que juste une $*$ -algèbre). Pour $O \subset \partial M$ et $V \subset M$ ouverts, on introduit les sous-algèbres suivantes de $\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(M)$:

- (1) Soit $\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(V)$ la sous-algèbre associée aux éléments à support dans V .
- (2) Soit $\mathfrak{A}_{\text{bd}}(O)$ la sous-algèbre associée aux éléments de forme $\partial_+^* f$, $f \in C_c^\infty(O)$, où ∂_+^* est l'adjoint formel de ∂_+ .

La sous-algèbre $\mathfrak{A}_{\text{bd}}(O)$ décrit des observables localisées dans la région O du bord, et $\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(V)$ décrit les observables localisées dans la région V du bulk. Le point subtil est que les distributions de forme $\partial_+^* f$ sont supportées au bord et sont donc trop singulières pour appartenir à l'espace de phase original \mathcal{V} (dont les éléments appartiennent à $H_{0,\text{b},c}^{-1,\infty}(M)$). Par contre, nous montrons que $\partial_+^* f \in \mathcal{V}^{\text{cpl}}$, ce qui permet d'utiliser le cadre algébrique tout de même. Remarquons qu'il est tout à fait justifié de passer au complété, comme c'est de toute façon une étape nécessaire dans la construction GNS. Le seul inconvénient est que la définition de $\mathfrak{A}_{\text{bd}}(O)$ et $\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(V)$ dépend du choix de Λ^\pm . Notre résultat principal sera toutefois valide par exemple pour tous les Λ^\pm vérifiant la condition de Hadamard holographique et le choix d'état concret n'affectera pas son interprétation.

Le mécanisme classique que nous employons est exprimé par la définition suivante.

Définition 6.15. *Pour un $O \subset \partial M$ ouvert, son enveloppe d'unicité $V(O) \subset M$ est l'ouvert le plus large tel que pour chaque solution $u \in H_{0,\text{b},\text{loc}}^{1,-\infty}(M)$ de $Pu = 0$ dans M on a l'implication*

$$(2.74) \quad (\partial_+ u = 0 \text{ sur } O) \Rightarrow (u = 0 \text{ sur } V(O)).$$

On dit que la propriété de continuation unique est vérifiée pour O si $V(O) \neq \emptyset$.

Théorème 6.16 ([Wr14]). *Supposons les Hypothèses 6.2 et 6.5. Soit Λ^\pm une paire de fonctions à deux points (au sens qu'elles vérifient (1.70) et (1.71)). Soit $O \subset \partial M$ un ouvert, et soit $V(O)$ son enveloppe d'unicité. On considère les $*$ -algèbres $\mathfrak{A}_{\text{bd}}(O)$ et $\mathfrak{A}_{\text{bulk}}(V(O))$ associées à Λ^\pm , O et $V(O)$. Alors :*

$$(2.75) \quad \mathfrak{A}_{\text{bd}}(O) \supset \mathfrak{A}_{\text{bulk}}(V(O)).$$

Toute l'information dans $V(O)$ est donc codifiée dans O , ce qui est un énoncé non trivial si la propriété de continuation unique est vérifiée pour O . La démonstration se fait par réduction à des produits scalaires qui sont en même temps des solutions de P , et ainsi on peut utiliser la propriété de continuation unique à ce niveau. Les difficultés techniques viennent du complété et de l'usage de plusieurs topologie différentes dans ce problème. Un rôle important est joué par le Théorème 6.14.

La propriété de continuation unique a été démontrée récemment par Holzegel et Shao [91, 92]. Nous résumons leurs résultats ci-dessous, en se concentrant uniquement sur le cas linéaire et sur les conditions aux limites de Dirichlet (bien que leur théorème soit plus général) :

- (1) Sur une large classe d'espaces asymptotiquement AdS, la propriété de continuation unique est vérifiée pour chaque O tel que $[-T, T] \times \partial\Sigma \subset O$ pour un T suffisamment grand (pour que les géodésiques nulles aient le temps de se reconcentrer). À présent il n'y a pas d'estimée générale sur la taille de l'enveloppe d'unicité $V(O)$.
- (2) Dans le cas de l'espace anti de Sitter exact, l'enveloppe d'unicité est égale $V(O) = M$ pour O comme ci-dessus.

Le fait remarquable est que l'énoncé et la démonstration de (1) ne font pas usage d'analyticité et se généralisent aux champs classiques non linéaires.

Dans le cas quand (M, g) est réel-analytique, on peut aussi utiliser le *théorème d'Holmgren* (voir e.g. [96, Thm. 8.6.5]), qui implique que $V(O) \neq \emptyset$ pour O non vide arbitrairement petit, et l'enveloppe d'unicité $V(O)$ est alors un voisinage de O dans le bulk. Par le Théorème 6.16 cela donne un énoncé qui correspond le mieux aux prédictions des théoriciens en AdS/CFT.

Bibliographie

Les références [Wr1]–[Wr14] sont listées dans l’introduction, page 10.

- [1] Ammann, B., Lauter, R., Nistor, V., Vasy, A. : *Complex powers and non-compact manifolds*, Comm. in PDE **29** (2004), 671–705.
- [2] Ashtekar, A., Magnon, A. : Proc. Roy. Soc. Lond. A **346**, 375 (1975).
- [3] Avis, S.J., Isham, C.J., Storey, D. : *Quantum field theory in Anti-de Sitter space-time*, Phys. Rev. D, **18** :3565-3576, (1978).
- [4] Bachelot, A. : *The Hawking effect*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **70**, (1999), 41-99.
- [5] Bachelot, A. : *The Dirac system on the Anti-de Sitter universe*, Comm. Math. Phys. **283** (2008) 127-167.
- [6] Bachelot, A. : *The Klein–Gordon equation in the Anti-de Sitter cosmology*, Journal de mathématiques pures et appliquées, **96**(6), 527–554 (2011)
- [7] Bachelot, A. : *New dynamics in the Anti-de Sitter universe AdS^5* . Comm. Math. Phys., **320**(3), 723-759 (2013)
- [8] Bachelot, A. : *On the Klein-Gordon equation near a De Sitter brane in an Anti-de Sitter bulk*, **105** (2), (2016), 165-197.
- [9] Bahns, D., Wrochna, M. : *On-shell extension of distributions*, Annales Henri Poincaré **15** (10), (2014), 2045-2067.
- [10] Baskin, D., Vasy, A., Wunsch, J. : *Asymptotics of radiation fields in asymptotically Minkowski space*, Amer. J. Math., **137** (5), (2015), 1293–1364.
- [11] Bär, C., Ginoux, N., Pfäffle, F. : *Wave equation on Lorentzian manifolds and quantization*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS, 2007.
- [12] Bär, C., Wafo, R.T. : *Initial value problems for wave equations on manifolds*, Math. Phys. Anal. Geom. **18** :7 (2015).
- [13] Bär, C., Strohmaier, A. : *A rigorous geometric derivation of the chiral anomaly in curved backgrounds*, Comm. Math. Phys. **347** (3), (2016), 703–721.
- [14] Belokogne, A., Folacci, A., Queva, A. : *Stueckelberg massive electromagnetism in de Sitter and anti-de Sitter spacetimes : Two-point functions and renormalized stress-energy tensors*, Phys. Rev. D **94**, (2016), 105028.
- [15] Benini, M., Dappiaggi, C. : *Models of free quantum field theories on curved backgrounds*, dans : Advances in Algebraic Quantum Field Theory, Springer (2015).
- [16] Benini, M., Dappiaggi, C., Murro, C. : *Radiative observables for linearized gravity on asymptotically flat spacetimes and their boundary induced states*, J. Math. Phys. **55**, (2014), 082301.
- [17] Bernal, A., Sanchez, M. : *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch’s splitting theorem*, Comm. Math. Phys. **243** (2003), 461-470.

- [18] Bernal, A., Sanchez, M. : *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*, Comm. Math. Phys. 257 (2005), 43-50.
- [19] Bony, J.M. : *Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, (1977).
- [20] Borsero, M., Schulz, R. : *Microlocal properties of bisingular operators*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications (2013), 1-25.
- [21] Breitenlohner, P., Freedman, D.Z. : *Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity* Phys. Lett. B, 115(3) :197-201, (1982).
- [22] Bros, J., Epstein, H., Moschella, U. : *Towards a general theory of quantized fields on the anti-de Sitter space-time*, Commun. Math. Phys. 231 (2002), 481.
- [23] Bros, J., Moschella, U. : *Two point functions and quantum fields in de Sitter universe*, Rev. Math. Phys. 8, 327 (1996).
- [24] Brum, M., Jorás, S.E. : *Hadamard state in Schwarzschild-de Sitter spacetime*, Class. Quant. Grav. 32 (2015) 015013.
- [25] Brunetti, R., Fredenhagen, K. : *Microlocal Analysis and Interacting Quantum Field Theories : Renormalization on Physical Backgrounds*, Comm. Math. Phys. **208** (2000), 623-661.
- [26] Cagnac, F. : *Problème de Cauchy sur un cône caractéristique pour des équations quasi-linéaires*, Ann. Mat. Pura Appl. 129 (1982), 13-41.
- [27] Cheeger, J., Gromov, M. : *Bounds on the von Neumann dimension of L^2 -cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Diff. Geom. **21** (1985), 1-34.
- [28] Choquet-Bruhat, Y., Cotsakis, Y. : *Global hyperbolicity and completeness*, J. Geom. and Phys. **43**, (2002), 345-350.
- [29] Chruściel, P.T., Shatah, J. : *Global existence of solutions of the Yang-Mills equations on globally hyperbolic four dimensional Lorentzian manifolds*, Asian Jour. Math. 1 (1997), 530-548.
- [30] Colin de Verdière, Y. : *Spectral theory of pseudo-differential operators of degree 0 and application to forced linear waves*, preprint [arXiv:1804.03367](https://arxiv.org/abs/1804.03367) (2018).
- [31] Dappiaggi, C., Ferreira, H.R.C. : *Hadamard states for a scalar field in anti-de Sitter spacetime with arbitrary boundary conditions*, Phys. Rev. D 94 (2016), 125016.
- [32] Dappiaggi, C., Hack, T.-P., Sanders, K. : *Electromagnetism, local covariance, the Aharonov-Bohm effect and Gauss' law*, Comm. Math. Phys. 328, 625-667 (2014).
- [33] Dappiaggi, C., Moretti, V., Pinamonti, N. : *Distinguished quantum states in a class of cosmological spacetimes and their Hadamard property*, J. Math. Phys. 50 (2009) 062304.
- [34] Dappiaggi, C., Moretti, V., Pinamonti, N. : *Rigorous construction and Hadamard property of the Unruh state in Schwarzschild spacetime*, Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011) 355.
- [35] Dappiaggi, C., Siemssen, D. : *Hadamard States for the Vector Potential on Asymptotically Flat spacetimes*, Rev. Math. Phys. 25, 1350002 (2013).
- [36] Dereziński, J., Gérard, C. : *Mathematics of Quantization and Quantum Fields*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2013.
- [37] Dereziński, J., Siemssen, D. : *An evolution equation approach to the Klein-Gordon operator on curved spacetime*, preprint [arXiv:1709.03911](https://arxiv.org/abs/1709.03911), (2017).

- [38] Dereziński, J., Siemssen, D. : *The Feynman propagator on curved spacetimes*, (in preparation)
- [39] Dereziński, J., Wrochna, M. : *Exactly solvable Schrödinger operators*, Ann. Henri Poincaré, 12 (2), (2011), 397-418.
- [40] Dereziński, J., Wrochna, M. : *Continuous and holomorphic functions with values in closed operators*, J. Math. Phys. 55 (8), (2014), 083512.
- [41] Dimock, J. : *Algebras of local observables on a manifold*, Comm. Math. Phys. 77, (1980), 219-228.
- [42] Dimock, J., Kay, B.S. : *Classical wave operators and asymptotic quantum field operators on curved space-times*, Annales de l'I.H.P. A 37 no. 2, (1982), 93–114.
- [43] Dimock, J., Kay, B.S. : *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric. I*, Ann. Phys. 175 (2), (1987), 366–426.
- [44] Dimock, J., Kay, B.S. : *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric. II*, J. Math. Phys. 27, (1986), 2520.
- [45] Dold, D. : *Unstable mode solutions to the Klein-Gordon equation in Kerr-anti-de Sitter spacetimes*, Commun. Math. Phys. 350, 2 (2017), 639–697.
- [46] Dossa, M. : *Solutions C^∞ d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques du second ordre sur un cône caractéristique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 11 (2002), 351-376.
- [47] Drouot, A. : *A quantitative version of Hawking radiation*, Ann. Henri Poincaré 18 (3), (2017), 757–806.
- [48] Duistermaat, J.J., Hörmander, L. : *Fourier integral operators*, II. Acta Math. **128** (1972), 183–269.
- [49] Dütsch, M., Rehren, K.-H. : *A comment on the dual field in the AdS-CFT correspondence*, Lett. Math. Phys. 62 (2002) 171–184.
- [50] Dütsch, M., Rehren, K.-H. : *Generalized free fields and the AdS-CFT correspondence*, Ann. Henri Poincaré 4 (2003) 613–635.
- [51] Dütsch, M., Rehren, K.-H. : *Protecting the conformal symmetry via bulk renormalization on Anti de Sitter space*, Comm. Math. Phys. (2011), 307 :315.
- [52] Dyatlov, S., Guillarmou, C. : *Pollicott–Ruelle resonances for open systems*, Ann. Inst. Henri Poincaré (A), 17 (2016), 3089-3146.
- [53] Dyatlov, S., Zworski, M. : *Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis*, Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. 49 (2016), 543-577.
- [54] Dyatlov, S., Zworski, M. : *Ruelle zeta function at zero for surfaces*, Inv. Math. 210 (2017), 211-229.
- [55] Dyatlov, S., Zworski, M. : *Microlocal analysis of forced waves*, preprint [arXiv:1806.00809](https://arxiv.org/abs/1806.00809) (2018).
- [56] Enciso, A., Kamran, N. : *A singular initial-boundary value problem for non-linear wave equations and holography in asymptotically anti-de Sitter spaces*, J. Math. Pures Appl. 103 (2015), 1053–1091.
- [57] Fewster, C.J. : *A general worldline quantum inequality*, Class. Quant. Grav. 17, 1897 (2000).
- [58] Fewster, C.J., Pfenning, M.J. : *A quantum weak energy inequality for spin-one fields in curved spacetime*, J. Math. Phys., 44, 4480 (2003).
- [59] Fewster, C.J., Verch, R. : *Algebraic quantum field theory in curved spacetimes*, in : Advances in Algebraic Quantum Field Theory, Springer (2015).

- [60] Finster, F., Strohmaier, A. : *Gupta-Bleuler quantization of the Maxwell field in globally hyperbolic space-times*, [arXiv:1307.1632](#) (2013).
- [61] Fredenhagen, K., Haag, R. : *On the derivation of Hawking radiation associated with the formation of a black hole*, *Commun. Math. Phys.* **127**, 273 (1990).
- [62] Fredenhagen, K., Rejzner, K. : *Perturbative algebraic quantum field theory*, in : *Mathematical Aspects of Quantum Field Theories*, Springer, (2015), 17–55.
- [63] Fredenhagen, K., Rejzner, K. : *Quantum field theory on curved spacetimes : Axiomatic framework and examples*, *Journal of Mathematical Physics* **57**(3), (2016), 031101.
- [64] Fulling, S.A., Narcowich, F.J., Wald, R.M. : *Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime*, II, *Annals of Physics*, **136** (1981), 243–272.
- [65] Furlani, E.P. : *Quantization of the electromagnetic field on static spacetimes*, *J. Math. Phys.* **36** (1995), no. 3, 1063–1079.
- [66] Gannot, O. : *Elliptic boundary value problems for Bessel operators, with applications to Anti-de Sitter spacetimes*, preprint [arxiv:1507.02794](#) (2015)
- [67] Gannot, O. : *Existence of quasinormal modes for Kerr-AdS black holes*, *Ann. Henri Poincaré* **18** (8), (2017), 2757–2788.
- [68] Gell-Redman, J., Haber, N., Vasy, A. : *The Feynman propagator on perturbations of Minkowski space*, *Commun. Math. Phys.*, **342**, 1, (2016), 333–384.
- [69] Geroch, R. : *Domain of dependence*, *J. Math. Phys.* **11** (1970), 437–449.
- [70] Gérard, C. : *On the Hartle-Hawking-Israel states for spacetimes with static bifurcate Killing horizons*, preprint [arXiv:1608.06739](#), (2016).
- [71] Gérard, C. : *The Hartle-Hawking-Israel state on stationary black hole spacetimes*, preprint [arXiv:1806.07645](#), (2018).
- [72] Gover, R., Latini, E., Waldron, A. : *Poincaré–Einstein holography for forms via conformal geometry in the bulk*. *Mem. Amer. Math. Soc.* **235** (2015), 1106.
- [73] Grubb, G. : *Distributions and Operators*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2009).
- [74] Guillarmou, C. : *Meromorphic properties of the resolvent on asymptotically hyperbolic manifolds*, *Duke Math. J.*, **129** (1), (2005), 1–37.
- [75] Haber, N., Vasy, A. : *Propagation of singularities around a Lagrangian submanifold of radial points*, *Microlocal Methods in Mathematical Physics and Global Analysis*. Springer Basel, (2013), 113–116.
- [76] Häfner, D. : *Creation of fermions by rotating charged black holes*, *Mémoires de la SMF* **117**, (2009).
- [77] Häfner, D., Nicolas, J.-P. : *The characteristic Cauchy problem for Dirac fields on curved backgrounds*, *J. of Hyperbolic Differ. Equ.* **8** (2011), 437–483.
- [78] Hamilton, A., Kabat, D.N., Lifschytz, G., Lowe, D.A. : *Local bulk operators in AdS/CFT : a boundary view of horizons and locality*, *Phys.Rev.* **D73** (2006), 086003.
- [79] Hawking, S.W. : *Particle creation by black holes*, *Commun. Math. Phys.*, **43** (1975), 199–220.
- [80] Hintz, P., Vasy, A. : *The global non-linear stability of the Kerr–de Sitter family of black holes*, *Acta Math.*, **220** (2018), 1–206.
- [81] Hollands, S. : *The Hadamard Condition for Dirac Fields and Adiabatic States on Robertson-Walker spacetimes*, *Comm. Math. Phys.* **216** (2001), 635–661.

- [82] Hollands, S. : *Renormalized quantum Yang-Mills fields in curved spacetime*, Rev. Math. Phys., 20 (2008), 1033-1172.
- [83] Hollands, S. : *Correlators, Feynman diagrams, and quantum no-hair in de Sitter spacetime*, Commun. Math. Phys. 319, 1 (2013).
- [84] Hollands, S., Wald, R.M. : *Local Wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved space-time*, Commun. Math. Phys. 223, 289 (2001).
- [85] Hollands, S., Wald, R.M. : *Existence of local covariant time ordered products of quantum fields in curved space-time*, Commun. Math. Phys. 231, 309 (2002).
- [86] Hollands, S., Wald, R.M. : *On the renormalization group in curved spacetime*, Commun. Math. Phys. 237, 123 (2003).
- [87] Hollands, S., Wald, R.M. : *Conservation of the stress tensor in interacting quantum field theory in curved spacetimes*, Rev. Math. Phys. 17, 227 (2005).
- [88] Hollands, S., Wald, R.M. : *Quantum fields in curved spacetime*, in : General Relativity and Gravitation : A Centennial Perspective, Cambridge University Press (2015).
- [89] Holzegel, G. : *Well-posedness for the massive wave equation on asymptotically anti-de Sitter space-times*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 09(02) :239-261, (2012).
- [90] Holzegel, G., Luk, J., Smulevici, J., Warnick, C. : *Asymptotic properties of linear field equations in anti-de Sitter space*, arXiv:1502.04965 (2015).
- [91] Holzegel, G., Shao, A. : *Unique continuation from infinity in asymptotically anti-de Sitter spacetimes*, Commun. Math. Phys. 347, (2016), 1–53.
- [92] Holzegel, G., Shao, A. : *Unique continuation from infinity in asymptotically Anti-de Sitter spacetimes II : Non-static boundaries*, Comm. Partial Differential Equations, 42 (2017), 1871–1922.
- [93] Holzegel, G., Smulevici, J. : *Quasimodes and a Lower Bound on the Uniform Energy Decay Rate for Kerr-AdS Spacetimes*, Anal. PDE 7, No. 5, 1057-1090 (2014).
- [94] Holzegel, G., Warnick, C.M. : *Boundedness and growth for the massive wave equation on asymptotically anti-de Sitter black holes*, J. Funct. Anal. 266 (4)15, (2014), 2436-2485.
- [95] Hörmander, L. : *A remark on the characteristic Cauchy problem*, J. Funct. Anal. **93**, (1990), 270-277.
- [96] Hörmander, L. : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* Vol. 1., Springer (1990).
- [97] Hörmander, L. : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* Vol. 3., Springer (1994).
- [98] Idelon–Riton, G. : *Scattering theory for the Dirac equation in Schwarzschild-Anti-de Sitter space-time*, preprint arXiv:1412.0869 (2014).
- [99] Ishibashi, A., Wald, R.M. : *Dynamics in non-globally-hyperbolic static space-times : 2. General analysis of prescriptions for dynamics*, Class. Quant. Grav. 20, 16, (2004), 3815–3826.
- [100] Ishibashi, A., Wald, R.M. : *Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times : 3. Anti-de Sitter space-time*, Class. Quant. Grav., 21, (2004), 2981-3014.
- [101] Isozaki, H. : *QFT for scalar particles in external fields on Riemannian manifolds*, Rev. Math. Phys. 13, No. 6 (2001), 767–798.

- [102] Joudioux, J. : *Integral formula for the characteristic Cauchy problem on a curved background*, J. Math. Pures et Appliquées vo. 95, 2 (2011), 151–193.
- [103] Junker, W. : *Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime*, thèse de doctorat, Université de Hambourg 1995.
- [104] Junker, W. : *Hadamard States, adiabatic vacua and the construction of physical states for scalar quantum fields on curved spacetime*, Rev. Math. Phys. **8**, (1996), 1091–1159.
- [105] Junker, W. : *Erratum to “Hadamard States, adiabatic vacua and the construction of physical states ...”*, Rev. Math. Phys. **207** (2002), 511-517.
- [106] Junker, W., Schrohe, E. : *Adiabatic Vacuum States on General Space-time Manifolds : Definition, Construction, and Physical Properties*, Ann. Henri Poincaré, **3** (2002), 1113-1181.
- [107] Kay, B.S. : *Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields. I. A one particle structure for the stationary case*, Commun. Math. Phys. **62**, 55 (1978).
- [108] Kay, B.S. : *The principle of locality and quantum field theory on (non globally hyperbolic) curved spacetimes*, Rev. Math. Phys. (Special Issue), (1992), 167–195.
- [109] Kay, B.S., Larkin, P. : *Pre-Holography*, Phys. Rev. D **77** (2008), 121501R.
- [110] Kay, B.S., Ortíz, L. : *Brick walls and AdS/CFT*, Gen. Relativ. Gravit. **46** (2014), 1727.
- [111] Kay, B.S., Radzikowski, M., Wald, R.M. : *Quantum field theory on spacetimes with a compactly generated Cauchy horizon*, Commun. Math. Phys. **183** (3), (1997), 533-556.
- [112] Kay, B.S., Wald, R.M. : *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate Killing horizon*, Phys. Rep. **207**, 49 (1991)
- [113] Kent, C., Winstanley, E. : *Hadamard renormalized scalar field theory on anti-de Sitter spacetime*, Physical Review D **91.4** (2015), 044044.
- [114] Khavkine, I., Moretti, V. : *Algebraic QFT in curved spacetime and quasifree Hadamard states : an introduction*, in : Advances in Algebraic Quantum Field Theory, Springer (2015).
- [115] Kordyukov, Y. : *L^p -theory of elliptic differential operators on manifolds of bounded geometry*, Acta Appl. Math. **23** (1991), 223–260.
- [116] Lebeau, G. : *Propagation des ondes dans les variétés à coin*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **30**, (1997), 429–497.
- [117] Leray, J. : *Hyperbolic Differential Equations*, Unpublished Lecture Notes, Princeton, 1953.
- [118] Lichnerowicz, A. : *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*, Publ. math. IHES **10** (1961), 5-56.
- [119] Lundberg, L.-E. : *Relativistic quantum theory for charged spinless particles in external vector fields*, Comm. Math. Phys. **31**, (1973), 295–316.
- [120] Maldacena, J. : *The large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38.4** (1999), 1113-1133.
- [121] Melrose, R. : *Transformation of boundary problems*, Acta Math., **147**(3–4), (1993), 149–236.
- [122] Melrose, R. : *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Vol. 4. Wellesley : AK Peters, (1993).

- [123] Melrose, R. : *Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces*, in : Spectral and scattering theory (M. Ikawa, ed.), Marcel Dekker, (1994).
- [124] Melrose, R. : *Geometric scattering theory*, Vol. 1, Cambridge University Press (1995).
- [125] Moretti, V. : *Comments on the stress-energy tensor operator in curved spacetime*, Commun. Math. Phys. **232**, 189 (2003).
- [126] Moretti, V. : *Uniqueness theorem for BMS-invariant states of scalar QFT on the null boundary of asymptotically flat spacetimes and bulk-boundary observable algebra correspondence*, Comm. Math. Phys. **268** (2006), 727-756.
- [127] Moretti, V. : *Quantum out-states holographically induced by asymptotic flatness : invariance under spacetime symmetries, energy positivity and Hadamard property*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), 31-75.
- [128] Morrison, I.A. : *Boundary-to-bulk maps for AdS causal wedges and the Reeh-Schlieder property in holography*, J-HEP. (5), (2014), 1–29.
- [129] Nicolas, J.-P. : *Dirac fields on asymptotically flat spacetimes*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 408 (2002), 85.
- [130] Nicolas, J.-P. : *On Lars Hörmander’s remark on the characteristic Cauchy problem*, Ann. Inst. Fourier, 56, 3 (2006), 517-543.
- [131] O’Neill, B. : *The Geometry of Kerr Black Holes*, A K Peters, 1995.
- [132] Oulghazi, O. : thèse en préparation.
- [133] Radzikowski, M. : *Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved spacetime*. Comm. Math. Phys. **179** (1996), 529–553.
- [134] Rehren, K.-H. : *Local quantum observables in the anti-de Sitter-conformal QFT correspondence*, Phys. Lett. B 493.3 (2000), 383-388.
- [135] Rehren, K.-H. : *Algebraic holography*, Ann. Henri Poincaré 1, (2000), 607.
- [136] Ribeiro, P.L. : *Algebraic holography in asymptotically simple, asymptotically AdS spacetimes*, Progress in Mathematics 251, (2007), 253–270.
- [137] Ribeiro, P.L. : *Structural and Dynamical Aspects of the AdS-CFT Correspondence : a Rigorous Approach*, thèse de doctorat, Université de São Paulo (2007)
- [138] Roe, J. : *An index theorem on open manifolds I*, J. Diff. Geom. 27 (1988), 87-113.
- [139] Ruijsenaars, S.N.M. : *Charged particles in external fields I. Classical theory*, J. Math. Phys. 18 (4), (1977), 720–737.
- [140] Sahlmann, H., Verch, R. : *Passivity and microlocal spectrum condition*, Commun. Math. Phys. **214** (2000), 705–731.
- [141] Sanders, K. : *Equivalence of the (Generalised) Hadamard and Microlocal Spectrum Condition for (Generalised) Free Fields in Curved Spacetime*, Commun. Math. Phys. 295, 2 (2010), 485–501.
- [142] Sanders, K. : *On the construction of Hartle-Hawking-Israel state across a static bifurcate Killing horizon*, Lett. Math. Phys. 105, 4 (2015), 575–640.
- [143] Schapira, P. : *Wick rotation for D-modules*, preprint [arXiv:1702.00003](https://arxiv.org/abs/1702.00003), (2017).
- [144] Seeley, R. : *Complex powers of an elliptic operator*, in *Singular Integrals*, Proc. Symp. Pure Math., AMS, Providence, RI, (1967), 288–307.

- [145] Seiler, R. : *Quantum theory of particles with spin zero and one half in external fields*, Comm. Math. Phys. 25, (1972), 127–151.
- [146] Sewell, G.L. : *Quantum fields on manifolds : PCT and gravitationally induced thermal states*, Ann. Phys. 141, (1982), 201–224.
- [147] Shubin, M.A. : *Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds*, Astérisque 207 (1992), 37–108.
- [148] Strohmaier, A., Verch, R., Wollenberg, M. : *Microlocal analysis of quantum fields on curved space-times : analytic wave front sets and Reeh-Schlieder theorems*, J. Math. Phys. **43** (2002), 5514-5530.
- [149] Unruh, W.G. : *Notes On Black Holes Evaporation*, Phys. Review D 14, (1976), 870–892.
- [150] Vasy, A. : *The wave equation on asymptotically de Sitter-like spaces*, Adv. Math., 223 (1), (2010), 49–97.
- [151] Vasy, A. : *The wave equation on asymptotically Anti-de Sitter spaces*, Analysis & PDE, 5, (2012), 81–144.
- [152] Vasy, A. : *Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic spaces and high energy resolvent estimates*, MSRI Publications, vol. 60, Cambridge University Press, (2012).
- [153] Vasy, A. : *Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic and Kerr-de Sitter spaces, (With an appendix by S. Dyatlov)*, Inventiones Math., 194 :381–513, (2013), 194.2 : 381-513.
- [154] Vasy, A. : *Propagation phenomena*, Lecture Notes, Stanford University (2014).
- [155] Vasy, A. : *Resolvents, Poisson operators and scattering matrices on asymptotically hyperbolic and de Sitter spaces*, J. Spect. Theory, vol. 4 (4), (2014), 643–673.
- [156] Vasy, A. : *On the positivity of propagator differences*, Ann. Henri Poincaré, 18, (2017), 983–1007.
- [157] Vasy, A. : *Essential self-adjointness of the wave operator and the limiting absorption principle on Lorentzian scattering spaces*, preprint [arXiv:1712.09650](https://arxiv.org/abs/1712.09650), (2017).
- [158] Wald, R.M. : *Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times*, J. Math. Phys., 21, 2802-2805 (1980).
- [159] Wald, R.M. : *Existence of the S-matrix in quantum field theory in curved space-time*, Ann. Phys. (N. Y.), t. 118, (1979), 490–510.
- [160] Warnick, C.M. : *The Massive Wave Equation in Asymptotically AdS Space-times*, Comm. Math. Phys., 321(1) :85-111, (2013).
- [161] Warnick, C.M. : *On quasinormal modes of asymptotically Anti-de Sitter black holes*, Comm. Math. Phys., 333(2) :959-1035, (2015).
- [162] Witten, E. : *Notes on some entanglement properties of Quantum Field Theory*, preprint [arXiv:18013.04993](https://arxiv.org/abs/18013.04993), (2018).
- [163] Wrochna, M. : *Quantum field theory in static external potentials and Hadamard states*, Ann. Henri Poincaré 13 (8), (2012), 1841-1871.
- [164] Yagdjian, K., Galstian, A. : *The Klein-Gordon equation in Anti-de Sitter spacetime*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 67, (2009), 291-292.
- [165] Zahn, J. : *Generalized Wentzell boundary conditions and holography*, preprint [arXiv:1512.05512](https://arxiv.org/abs/1512.05512) (2015).