

Uitwerking Tweede Quiz M & I, 24-5-12

Opgave 1 [30 pt]. a. Zij (X, \mathcal{A}, μ) een eindige maatruimte en zij $u : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ een meetbare functie met de volgende eigenschap: voor elke $\epsilon > 0$ en elke $B \in \mathcal{A}$ met $\mu(B) > 0$ is er een $B' \in \mathcal{A}$ met $B' \subset B$, $\mu(B') > 0$, en $\int_{B'} u \, d\mu \leq \epsilon \mu(B')$. Bewijs: dan geldt $u = 0$ b.o.

b. Laat zien d.m.v. een tegenvoorbeeld: de implicatie in onderdeel a is niet geldig als zou worden toegestaan dat $\mu(X)$ oneindig is.

Oplossing. a. Zij $B_j := \{u \geq \frac{1}{j}\}$. Dan $B_j \uparrow \{u > 0\}$ en dus is het voldoende om te laten zien dat voor elke j geldt: $\mu(B_j) = 0$. Dit kan met tegenspraak: stel er was een j met $\mu(B_j) > 0$. Wegens het gegeven zou er dan een meetbare $B'_j \subset B_j$ zijn met $\mu(B'_j) > 0$ en $\int_{B'_j} u \, d\mu \leq \frac{1}{2j} \mu(B'_j)$. Maar wegens $\int_{B'_j} u \, d\mu \geq \frac{1}{j} \mu(B'_j)$ (en $\mu(B_j) < \infty!$) geeft dit $\frac{1}{j} \leq \frac{1}{2j}$ en dus volgt tegenspraak.

b. Neem $X := \{1\}$, $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$, uitgerust met $\mu(\emptyset) := 0$ en $\mu(X) := \infty$. Dan definieert $u(1) := 2$ een meetbare $u : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, die niet b.o. gelijk is aan nul. Toch geldt voor “elke” $B \in \mathcal{A}$ met $\mu(B) > 0$ (d.w.z., $B = \{1\}$) en elke $\epsilon > 0$ dat voor $B' := \{1\}$ de ongelijkheid $\infty = 2\mu(\{1\}) = \int_{\{1\}} u \leq \epsilon \mu(\{1\}) = \infty$ stand houdt.

Opgave 2 [35 pt]. a. Zij (X, \mathcal{A}, μ) een eindige maatruimte en zij $(u_j)_{j=1}^\infty$ een rij van \mathcal{A} -meetbare functies $u_j : X \rightarrow \mathbb{R}$. Bewijs de equivalentie van de volgende twee uitspraken.

(i) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\{|u_j| \geq \epsilon\}) = 0$,

(ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} \, d\mu = 0$.

b. Laat zien: de equivalentie in onderdeel a is niet geldig als $\mu(X) = +\infty$ zou worden toegestaan. Doe dit door middel van een geschikt tegenvoorbeeld.

Oplossing. a. (i) \Rightarrow (ii): Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. De functie $\xi \mapsto \frac{\xi}{1+\xi}$ is strikt stijgend op \mathbb{R}_+ en van boven begrensd door 1. Dus volgt voor elke j

$$0 \leq \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} \, d\mu \leq \int_{\{|u_j| < \epsilon\}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \, d\mu + \int_{\{|u_j| \geq \epsilon\}} 1 \, d\mu.$$

De eerste term rechts wordt gemajoreerd door $\epsilon \mu(X)$ en (i) zegt dat de tweede term rechts naar nul gaat. Dus volgt het gevraagde (mede dankzij $\mu(X) < \infty$).

(ii) \Rightarrow (i): Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Op de verzameling $\{|u_j| \geq \epsilon\}$ geldt $\frac{|u_j|}{1+|u_j|} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Dus volgt het gevraagde uit

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \mu(\{|u_j| \geq \epsilon\}) \leq \int_{\{|u_j| \geq \epsilon\}} \frac{|u_j|}{1+|u_j|} \, d\mu \leq \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} \, d\mu \rightarrow 0.$$

b. Bovenstaand commentaar geeft al aan dat het tegenvoorbeeld moet gaan over (i) $\not\Rightarrow$ (ii). Je zoekt dus een rij $(u_j)_{j=1}^\infty$ die wel voldoet aan (i), maar niet aan (ii). Neem nogmaals $X := \{1\}$, $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{1\}\}$, met $\mu(\emptyset) := 0$ en $\mu(\{1\}) := \infty$. Kies $u_j(1) := \frac{1}{j}$. Voor elke $\epsilon > 0$ geldt dan dat $\{|u_j| \geq \epsilon\} = \emptyset$ voor alle $j > \frac{1}{\epsilon}$. Dus aan (i) is voldaan. Echter, wegens

$$\int_X \frac{|u_j|}{1 + |u_j|} d\mu = \frac{1}{j+1} \mu(\{1\}) = \infty$$

voor elke j , geldt (ii) nu niet.

Opgave 3 [35 pt]. Zij (X, \mathcal{A}, μ) een maatruimte. Uit opgave 9.11 weet je dat een kern een afbeelding $N : X \times \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ is met de volgende twee eigenschappen: (1) voor elke $x \in X$ is $A \mapsto N(x, A)$ een maat op (X, \mathcal{A}) en (2) voor elke $A \in \mathcal{A}$ is $x \mapsto N(x, A)$ een meetbare functie.

a. Bewijs wat je ook in opgave 9.11 moest bewijzen:

(i) $\nu : A \mapsto \int_X N(x, A) \mu(dx)$ is een maat op (X, \mathcal{A})

(ii) $v : x \mapsto \int_X u(y) N(x, dy)$ is een meetbare functie voor elke $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$

(iii) $\int_X u d\nu = \int_X v d\mu$.

b. Zij $M : X \times \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ ook een kern (deze heeft dus dezelfde eigenschappen (1)-(2) als N). Bewijs: $R(x, A) := \int_X N(x, dy) M(y, A)$ definieert een kern $R : X \times \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$.

c. Zij $x \in X$ en zij $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Geef een formule voor $\int_X w(z) R(x, dz)$ waarin de kernen N en M uit b voorkomen (maar niet meer R) en bewijs die formule.

Oplossing. a. De oplossing van a is op het internet te vinden.

b. Om te beginnen is $R(x, A)$ welgedefinieerd voor elke $x \in X$ en $A \in \mathcal{A}$: immers, $u := M(\cdot, A)$ behoort tot $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ wegens de eigenschappen van de kern M , en $N(x, \cdot)$ is een maat (eigenschap (1) van de kern N). Je laat vervolgens zien dat R de twee gewenste eigenschappen heeft.

Eigenschap (1): Kies $x \in X$ vast en noteer $\pi := N(x, \cdot)$; π is een maat op (X, \mathcal{A}) wegens eigenschap (1) van de kern N . Uiteraard heb je dan $\int_X N(x, dy) M(y, \emptyset) = 0$, want $M(y, \emptyset) = 0$ voor elke y . Zij nu $(A_j)_j$ een aftelbare rij van onderling disjuncte verzamelingen in \mathcal{A} . Je moet aantonen

$$\int_X N(x, dy) M(y, A) = \sum_j \int_X N(x, dy) M(y, A_j) \quad (1)$$

voor $A := \dot{\cup}_j A_j$. Nu geldt $u(y) := M(y, A) = \sum_j M(y, A_j) = \sum_j u_j(y)$ wegens eigenschap (1) van de kern M , waarbij $u := M(\cdot, A)$ en $u_j := M(\cdot, A_j)$ niet-negatieve meetbare functies zijn. Uit Corollary 9.9 volgt dan $\int_X u d\pi = \sum_j \int_X u_j d\pi$, wat equivalent is met (1).

Eigenschap (2): voor vaste $A \in \mathcal{A}$ is $u := y \mapsto M(y, A)$ een \mathcal{A} -meetbare functie. Dus volgt de meetbaarheid van $R(x, A) := \int_X N(x, dy) M(y, A)$ uit onderdeel a, deel (ii).

c. De vereiste alternatieve formule voor $\int_X w(z) R(x, dz)$ is

$$\int_X \left[\int_X w(z) M(y, dz) \right] N(x, dy)$$

Je bewijst dit met het gebruikelijke stappenprocédé:

Stap 1: $w = 1_A$. De alternatieve formule geldt hier per definitie van R .

Stap 2: $w = \sum_{i=1}^N c_i 1_{A_i}$. Nu is $\int_X w(z)R(x, dz) = \sum_{i=1}^N c_i R(x, A_i)$ en dat is gelijk aan de alternatieve formule $\int_X [\int_X w(z)M(y, dz)]N(x, dy) = \sum_{i=1}^N c_i \int_X M(y, A_i)N(x, dy)$.

Stap 3: algemene $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Dan geldt $w = \lim_j \uparrow w_j$ met w_j stapfuncties zoals in stap 2. Dan volgt met de MCT dat

$$\lim_j \uparrow \int_X \underbrace{\left[\int_X w_j(z)M(y, dz) \right]}_{g_j(y)} N(x, dy) = \int_X \underbrace{\left[\int_X w(z)M(y, dz) \right]}_{g(y)} N(x, dy).$$

Hier is de MCT tweemaal toegepast: eerst op de binnenintegraal om $g_j(y) \uparrow g(y)$ te krijgen voor elke vaste $y \in X$, en dan nogmaals om $\int_X g_j \uparrow \int_X g$ te krijgen. Wegens stap 2 is het linkerlid in bovenstaande identiteit ook gelijk aan $\lim_j \uparrow \int_X w_j(z)R(x, dz)$, d.w.z. aan $\int_X w(z)R(x, dz)$ vanwege nogmaals een toepassing van de MCT.