Huiswerk Micro, serie 2, 22-2-12

Inleveren: Steropgave inleveren op 29-2 bij begin van hoorcollege. Eerder inleveren is uitsluitend mogelijk per email bij de student-assistent: `W.J.H.M.Taks@uu.nl`

Opgave 1. Maak de onderste twee E's (=exercises) op p. 57 (van de uitgedeelde syllabus).

Opgaven 2, 3 en 4. Maak de exercise vlak onder Figure 3.7, de exercise in de derde regel van p. 61 en de exercise op p. 68.

Opgave 5.* a. Bewijs: in het model van Voorbeeld 3.3.1.b heeft een portefeuille met waarden $B(\omega_i)$, $i = 1,2,3$, op $t = 1$ een afdekkende strategie (= hedging strategy) dan en slechts dan als geldt $B(\omega_1) - 3B(\omega_2) + 2B(\omega_3) = 0$.

b. Laat in hetzelfde model ook zien: een portefeuille met waarden $B(\omega_k)$, $k = 1,2,3$, op $t = 1$ heeft een afdekkende strategie (= hedging strategy) dan en slechts dan als geldt dat de uitdrukking in formule (3.5), gezien als functie van $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ op de verzameling Π uit Example 3.3.1, constant is (en uiteraard is die constante waarde dan de no-arbitrage prijs van de portefeuille op $t = 0$).

c. We gaan het in onderdeel b geconstateerde nu algemeen bewijzen.

Stap 0. Beschouw een portefeuille met waarden $B(\omega_k)$, $k = 1, \dots, l$ op $t = 1$, waarvoor gegeven is dat de uitdrukking in formule (3.5) eenzelfde waarde heeft voor elke risico-neutrale kansvector $\boldsymbol{\pi}$ (we nemen aan dat er minstens één zo'n kansvector bestaat, en dat is zo onder de no-arbitrage hypothese – zie p. 66). Noteer $\mathbf{B} := (B(\omega_1), \dots, B(\omega_l))^T$.

Stap 1. Volgens p. 66 is een vector $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^l_+$ met strikt positieve componenten een risico-neutrale kansvector dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^l \pi_k \mathbf{a}^k = \mathbf{b}$; zie p. 66.

Stap 2. Zij $\boldsymbol{\rho}$ een willekeurige vector in $\mathbb{R}^l$ waarvoor geldt $\sum_{k=1}^l \rho_k \mathbf{a}^k = \mathbf{0}$. Laat zien: voor elke $\epsilon \in \mathbb{R}$ waarvoor $|\epsilon|$ klein genoeg is geldt dat $\boldsymbol{\pi} + \epsilon\boldsymbol{\rho}$ een risico-neutrale kansvector is (N.B. je moet zelf aangeven wat "klein genoeg" hier betekent).

Stap 3. Vorm de matrix $A := (\mathbf{a}^1 | \cdots | \mathbf{a}^l)$. Toon aan: uit stappen 0, 1 en 2 volgt voor elke $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^l$ met $A\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ dat $\mathbf{B} \cdot \rho = 0$.

Stap 4. Bewijs: uit stap 3 volgt m.b.v. Theorem 3.1.13 dat de vector $\mathbf{B}$ een element is van de vectorruimte opgespannen door de kolommen van de getransponeerde matrix A^T. Leid hier ook uit af dat er een afdekkende strategie $\bar{\mathbf{h}}$ bestaat voor de portefeuille $\mathbf{B}$.

Stap 5. Uit stappen 0 t.e.m. 4 volgt dat voor een portefeuille zoals in stap 0 een afdekkende strategie bestaat. Concludeer als speciaal geval hieruit: als er slechts één risico-neutrale kansvector bestaat, dan heeft elke portefeuille een afdekkende strategie.

Stap 6. Bewijs ook de omkering van bovenstaande: als een portefeuille $B(\omega_k)$, $k = 1, \dots, l$, een afdekkende strategie heeft, dan heeft de uitdrukking in formule (3.5) eenzelfde waarde voor elke risico-neutrale kansvector $\boldsymbol{\pi}$.

Opgave 6. In het oorspronkelijke Example 1.1.1 (geval 1) van het dorp in de Jura werd $\hat{\theta} = 1.155$ gevonden voor de richtingscoëfficient van de regressielijn. Stel je nu voor dat, om bepaalde economische redenen, waarden van θ alleen zinvol zijn als ze hoogstens 1 zijn. Uiteraard gaat dat in Example 1.1.1 voeren tot de herziene richtingscoëfficient $\hat{\theta} = 1$. Maar hoe zou je dat kunnen aantonen naar analogie van Example 3.1.17? *Hint:* Herformuleer (o.a. met nieuwe parameter) het onderliggende lineaire model $y \approx \theta x$ zodanig dat het lijkt op Example 3.1.17, maar nu met de eis dat de nieuwe parameter niet positief mag zijn.

Opgave 7. Wat is de uitkomst van optimaliseringsprobleem (1.1) als $\min(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{5})$ wordt vervangen door $\max(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{5})$? Motiveer.