Uitwerking Eerste Quiz Microeconomie, 6-4-2011

Opgave 1 [30 pt.] Beschouw in $\mathbb{R}^n$ de lineaire deelruimte L die wordt opgespannen door de twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, die lineair onafhankelijk zijn (ze vormen dus een lineair onafhankelijk stelsel).

a. Bepaal de algemene formule voor de orthogonale projectie $P_L(\mathbf{y})$ van de algemene vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ op L door een kunstmatig bijbehorend regressieprobleem te verzinnen en door daarop vervolgens de bekende formule voor de LSE-vector toe te passen.

b. Controleer de correctheid van je uitkomst in onderdeel a door *concreet* te laten zien dat je daar gevonden formule geeft dat $P_L(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

Oplossing.a. Zij X de matrix met kolommen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dan

$$X^T X = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \|\mathbf{b}\|^2 \end{pmatrix} \text{ en } X^t\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{y} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Dus volgt voor de LSE-vector $\boldsymbol{\theta} := (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$:

$$(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2} \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}\|^2 \mathbf{a}\cdot\mathbf{y} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}) \\ \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{b}\cdot\mathbf{y} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

waarbij opgemerkt moet worden dat $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \neq (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$ volgt uit de verscherpte ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, vanwege het gegeven dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ lineair onafhankelijk zijn. Voor de gevraagde orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op L geeft dit $P_L(\mathbf{y}) = \theta_1\mathbf{a} + \theta_2\mathbf{b}$ met θ_1, θ_2 als hierboven.

b. Neem $\mathbf{y} = \mathbf{a}$. Dan volgen $\theta_1 = 1$ en $\theta_2 = 0$ na invullen. Dus geeft de gevonden formule $P_L(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, zoals het moet.

Opgave 2 [45 pt.] Gegeven is de nutsfunctie $u(x_1, x_2) := \min(\frac{1}{2}x_1^2, x_2 - 1)$, $(x_1, x_2) \in X := \mathbb{R}^2_+$.

a. Bepaal op grafische wijze de optimale oplossing $\mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ van het nutsmaximalisatieprobleem van de consument (prijzen $p_1, p_2 > 0$ en inkomen $y \geq 0$), d.w.z. op basis van een figuur, waarin je de budgetverzameling en geschikt gekozen indifferentiecurves van u afbeeldt. Geef in het bijzonder de optimale oplossing voor het geval $p_1 = p_2 = 1$ en $y = 4$.

b. Bepaal eveneens op grafische wijze de optimale oplossing van het uitgavenminimalisatieprobleem van de consument (prijzen $p_1, p_2 > 0$ en nutsdrempelwaarde v).

c. Controleer de correctheid van je uitkomst bij onderdeel a door hetzelfde nutsmaximalisatieprobleem nogmaals op te lossen, maar nu met behulp van de *UMP solution method* uit het collegedictaat.

d. Controleer de correctheid van je uitkomst bij onderdeel b door expliciet te controleren dat de identiteit van Shephard geldt.

e. Controleer nogmaals de correctheid van je uitkomst bij onderdeel a door p_1, de prijs van goed 1, naar oneindig te laten gaan en daarbij te vast te stellen wat $\lim_{p_1\to\infty} \mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ is.

Oplossing. a. Merk alvast op: u is strikt stijgend en continu. Voor $c \in u(X) = [-1, \infty[$ bepalen we de indifferentiecurve

$$I_c := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \min(\frac{1}{2}x_1^2, x_2 - 1) = c\} = I_c^1 \cup I_c^2$$

met

$$I_c^1 := \begin{cases} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_2 \geq \frac{1}{2}x_1^2 + 1, x_1 = \sqrt{2c}\} & \text{als } c \geq 0 \\ \emptyset & \text{als } c < 0 \end{cases}$$

en

$$I_c^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_2 \leq \frac{1}{2}x_1^2 + 1, x_2 = c + 1\}$$

In geval $c \geq 0$ geeft dit een L-vormige curve I_c. Deze heeft de knik op de parabool $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$, welke de verticale as in het punt $(0, 1)$ snijdt. Echter, als $-1 \leq c < 0$ bestaat I_c alleen uit de *horizontale* halflijn $x_2 = c+1,\ x_1 \geq 0$! Grafisch leidt dit dan tot de volgende opdeling voor de locatie van de budget-verzameling.

Geval 1: $y > p_2$. In dit geval toont "schuin naar rechtsboven duwen langs de parabool" van de L-vormige indifferentiecurven dat het snijpunt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ van de budgetlijn en bovengenoemde parabool de unieke optimale bundel weergeeft. We bepalen nu dit snijpunt door substitutie van $x_2 = (y - p_1 x_1)/p_2$ in $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$. Dat geeft $\frac{p_2}{2}x_1^2 + p_1 x_1 + p_2 - y = 0$ (merk op: de determinant is positief dankzij $y > p_2$). Van de twee oplossingen hiervan is één oplossing strikt negatief en dus van geen verdere betekenis. De andere is

$$\bar{x}_1 := -\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}$$

en deze oplossing is strikt positief (gebruik $\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}} > p_1/p_2$ of lees dit af uit bovengenoemde grafische voorstelling). Ook geldt $\bar{x}_1 < y/p_1$, omdat

$$\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}} < \frac{y}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}$$

equivalent is met $-2 < y^2/p_1^2$ (kwadrateer beide zijden hierboven). De bijbehorende tweede coördinaat volgt uit $\bar{x}_2 = (y - p_1\bar{x}_1)/p_2$. Wegens $\bar{x}_1 < y/p_1$ geldt dat $\bar{x}_2 > 0$ (ook deze eigenschap kan uit bovenstaande grafische representatie worden afgelezen). Doorrekenen geeft

$$\bar{x}_2 = \frac{y}{p_2} + \frac{p_1^2}{p_2^2} - \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}.$$

De bundel $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ is, zoals gezegd, optimaal.

Geval 2: $y \leq p_2$. In dit geval volgt door "recht omhoogduwen" van de horizontale niveaulijnen onmiddelijk dat $(0, y/p_2)$ de unieke optimale bundel is.

Zo volgt voor Marshalliaanse vraagbundel

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left(-\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}, \frac{y}{p_2} + \frac{p_1^2}{p_2^2} - \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}\right) & \text{als } y > p_2, \\ (0, y/p_2) & \text{als } y \leq p_2. \end{cases}$$

Voor de speciale situatie $p_1 = p_2 = 1$ en $y = 4$ geven deze formules $(x_1^*, x_2^*) = (\sqrt{7} - 1, 5 - \sqrt{7})$, en deze uitkomst kan ook afzonderlijk worden verkregen door het oplossen van $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$ en $x_1 + x_2 = 4$ met behulp van $4 - x_1 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$.

b. Zij $v \in [-1, \infty[= u(X)$. De verzameling L_v volgt gemakkelijk uit bovenstaande afleiding van I_v: het is het gehele gebied ten "noordoosten" van I_v (d.w.z. $L_v = I_v + \mathbb{R}_+^2$). Dit leidt tot de volgende opdeling:

Geval 1: $v > 0$. In dit geval is het "knikpunt" $(\sqrt{2v}, v+1) \in X$ van I_v, dat tevens hoekpunt is van L_v, de unieke optimale oplossing. Dat geeft $e(p_1, p_2, v) = p_1\sqrt{2v} + p_2(v+1)$ voor de uitgavenfunctie.

Geval 2: $v \leq 0$. In dit geval is het hoekpunt $(0, v+1)$ van L_v de unieke optimale oplossing. Dat geeft $e(p_1, p_2, v) = p_2(v+1)$ voor de uitgavenfunctie.

Voor de Hicksiaanse vraagbundel volgt dus:

$$(x_{*1}, x_{*2}) = \begin{cases} (\sqrt{2v}, v+1) & \text{als } v > 0, \\ (0, v+1) & \text{als } -1 \leq v \leq 0. \end{cases}$$

c. Stap 0: u is evident continu en strikt stijgend op X.

Stap 1: De niet-differentieerbaarheidspunten van u (stap 1a) zijn de punten (x_1, x_2) in X met $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$. Omdat zulke punten ook budget-gebalanceerd moeten zijn behoort dezelfde bundel

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in X$ als hierboven tot de verzameling C, mits $y \geq p_2$. In het geval $y < p_2$ is er geen enkel punt $(x_1,x_2) \in X$ met $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$ en $p_1x_1 + p_2x_2 = y$. Stap 1c geeft de twee hoekbundels $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$. Wat betreft stap 1b, in de punten (x_1,x_2) van X met $x_2 > \frac{1}{2}x_1^2 + 1$ geldt $u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2$ en dus $\nabla u(x_1,x_2) = (x_1, 0)$. Dus geeft stap 1b daar $x_1/p_1 = 0$, d.w.z., $x_1 = 0$ en zo volgt de hoekbundel $(0, y/p_2)$ nogmaals, mits $x_2 > 1$, d.w.z. mits $y > p_2$. In de punten (x_1,x_2) van X met $x_2 < \frac{1}{2}x_1^2 + 1$ geldt $u(x_1,x_2) = x_2 - 1$ en dus $\nabla u(x_1,x_2) = (0,1)$. Daarom geeft stap 1b daar niets.

Stap 2: Als $y > p_2$ bestaat C uit de drie punten $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$. Er geldt $u(y/p_1, 0) = -1 < u(0, y/p_2) = 0$, dus moeten we de waarde $u(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \min(\frac{1}{2}\bar{x}_1^2, \bar{x}_2 - 1) = \frac{1}{2}\bar{x}_1^2 > 0$ vergelijken met $u(0, y/p_2) = 0$. Dus is $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ de optimale bundel. Als $y = p_2$ dan valt $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ samen met het hoekpunt $(0, y/p_2)$, zodat we alleen maar moeten vergelijken $u(y/p_1, 0) = -1$ en $u(0, y/p_2) = 0$. In dit geval is $(0, y/p_2)$ de optimale bundel. Tenslotte, als $y < p_2$, dan bestaat C slechts uit $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$, zodat alweer $(0, y/p_2)$ de optimale bundel is. Als we dit samenvatten vinden we weer de formule voor bovenstaande Marshalliaanse vraagbundel (x_1^*, x_2^*).

d. In geval 1 ($v > 0$) van onderdeel b geldt $e(p_1,p_2,v) = p_1\sqrt{2v} + p_2(v+1)$, dus $e_{p_1} = \sqrt{2v}$ en $e_{p_2} = v+1$. Dus $(e_{p_1}, e_{p_2}) = (\sqrt{2v}, v+1)$. Dit klopt met de Hicksiaanse bundel verkregen in geval 1 van onderdeel b.

In geval 2 ($v \leq 0$) van onderdeel b geldt $e(p_1,p_2,v) = p_2(v+1)$, dus $e_{p_1} = 0$ en $e_{p_2} = v+1$. Dus $(e_{p_1}, e_{p_2}) = (0, v+1)$. Dit klopt met de Hicksiaanse bundel verkregen in geval 2 van onderdeel b.

e. Als $y > p_2$ volgt door teller en noemer in de uitdrukking voor $\bar{x}_1$ te vermenigvuldigen met $\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}$ dat

$$x_1^* = \bar{x}_1 = \frac{-2 + \frac{2y}{p_2}}{\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\frac{p_1^2}{p_2^2} - 2 + \frac{2y}{p_2}}}$$

naar nul convergeert voor $p_1 \to \infty$ en dan volgt tegelijk dat $x_2^* = \bar{x}_2 = (y - p_1\bar{x}_1)/p_2$ naar y/p_2 convergeert. Als $y \geq p_2$ geldt $(x_1^*, x_2^*) = (0, y/p_2)$; deze goederenbundel, welke niet expliciet afhangt van p_1, is dus ook de gewenste limiet voor $p_1 \to \infty$.

Opgave 3 [25 pt.] Gegeven is de volgende nutsfunctie op $X = \mathbb{R}_+^2$:

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{als } 0 \leq x_1 + x_2 < 1 \text{ of } (x_1,x_2) = (0,1), \\ x_1 + x_2 + 1 & \text{als } x_1 + x_2 \geq 1 \text{ en } (x_1,x_2) \neq (0,1). \end{cases}$$

Laat zien dat u strikt stijgend is. Beschouw vervolgens voor $v = 2$ het bijbehorende uitgavenminimalisatieprobleem. Laat zien dat dit probleem geen optimale oplossing heeft voor geschikt gekozen waarden van p_1 en p_2 (n.b., je hoeft dus alleen *één* geschikt paar (p_1,p_2) te kiezen).

Oplossing. Om te bewijzen dat u strikt stijgend is, kies (x_1', x_2') en (x_1,x_2) in X met $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$. Er zijn precies drie mogelijkheden waarin moet worden aangetoond dat $u(x_1', x_2') > u(x_1,x_2)$:

A. (x_1', x_2') en (x_1,x_2) voldoen beide aan de bovenste keuzevork: dus $0 \leq x_1' + x_2' < 1$ of $(x_1', x_2') = (0,1)$ en $0 \leq x_1 + x_2 < 1$ of $(x_1,x_2) = (0,1)$. In dit geval moet worden aangetoond dat $x_1' + x_2' > x_1 + x_2$.

B. (x_1', x_2') en (x_1,x_2) voldoen beide aan de onderste keuzevork: dus $x_1' + x_2' \geq 1$ en $(x_1', x_2') \neq (0,1)$ en ook $x_1 + x_2 \geq 1$ en $(x_1,x_2) \neq (0,1)$. In dit geval moet worden aangetoond dat $x_1' + x_2' + 1 > x_1 + x_2 + 1$.

C. (x_1,x_2) voldoet aan de bovenste keuzevork en (x_1', x_2') aan de onderste: dus $0 \leq x_1 + x_2 < 1$ of $(x_1,x_2) = (0,1)$ en $x_1' + x_2' \geq 1$ en $(x_1', x_2') \neq (0,1)$. In dit geval moet worden aangetoond dat $x_1' + x_2' + 1 > x_1 + x_2$.

Merk hierbij op dat een vierde mogelijkheid, n.l. dat (x_1', x_2') voldoet aan de bovenste keuzevork en (x_1,x_2) aan de onderste, meteen is verworpen, omdat $x_1 + x_2 < x_1' + x_2' \leq 1$ tot een contradictie leidt.

Mogelijkheid A. In dit geval kan $(x_1', x_2') = (0,1)$ niet, want dan zou $0 = x_1' > x_1 \geq 0$. Maar ook $(x_1,x_2) = (0,1)$ kan niet, want dan zou $1 = x_1 + x_2 < x_1' + x_2' < 1$. De enige resterende combinatie is dat zowel $0 \leq x_1' + x_2' < 1$ als $0 \leq x_1 + x_2 < 1$. Dus volgt de gevraagde ongelijkheid $x_1' + x_2' > x_1 + x_2$ trivialiter uit $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$.

Mogelijkheid B. De gevraagde ongelijkheid volgt trivialiter uit $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$.

Mogelijkheid C. Als $0 \leq x_1 + x_2 < 1$ en $x_1' + x_2' \geq 1$ en $(x_1', x_2') \neq (0,1)$, dan volgt $x_1' + x_2' + 1 > x_1 + x_2$ trivialiter uit $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$. Anderzijds, als $(x_1, x_2) = (0,1)$ en $x_1' + x_2' \geq 1$ en $(x_1', x_2') \neq (0,1)$, dan volgt $x_1' + x_2' + 1 > x_1 + x_2 = 1$ eveneens trivialiter uit $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$.

Conclusie: u is strikt stijgend op X.

Vervolgens laten we zien dat het EMP geen optimale oplossing heeft. Uit de definitie van u volgt dat voor $v = 2$

$$L_v = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,1)\} : x_1 + x_2 \geq 1\}.$$

Door $p_1 > p_2$ te kiezen, "dreigt" er een voorkeur voor het punt $(0,1) \notin L_v$ te ontstaan. Kies dus zo'n prijzenpaar, bijvoorbeeld $p_1 = 2$ en $p_2 = 1$. Dan luidt het bijbehorende EMP $(\mathbb{E}_2)$

$$\text{minimaliseer } 2x_1 + x_2 \text{ over alle } (x_1, x_2) \in L_v.$$

Merk op: voor elke $(x_1, x_2) \in L_v$ geldt $2x_1 + x_2 \geq x_1 + x_2 \geq 1$. Dus volgt dat de minimumwaarde van $(\mathbb{E}_2)$ niet lager kan zijn dan 1. Maar ook komt $2x_1 + x_2$ willekeurig dicht bij de waarde 1 op de verzameling L_v: kies $(\epsilon, 1-\epsilon) \in L_v$ met $\epsilon > 0$ en laat ϵ van boven naar nul gaan; dan $u(\epsilon, 1-\epsilon) = 1 + \epsilon \downarrow 1$. Dus is 1 de enig mogelijke minimumwaarde (voor de liefhebbers: het is dus de infimum-waarde) van $(\mathbb{E}_2)$). Echter, deze waarde kan niet worden aangenomen: als je $2x_1 + x_2 = 1$ had voor $(x_1, x_2) \in L_v$, dan zou $1 = x_1 + x_1 + x_2 \geq x_1 + 1$ leiden tot $x_1 = 0$ en daarmee tot $x_2 = 1$ en $(x_1, x_2) = (0,1) \notin L_v$. Tegenspraak.

Opmerking: De efficientie-vergelijking (zoals in Propositie 3.5.7) kan hier niet rechtstreeks worden aangeroepen, omdat een belangrijke voorwaarde uit die stelling niet is vervuld: u is namelijk niet continu.