

Extra opgaven Functies en Reeksen, 2019

Opgave E.1 Zij $U := I \times J \subset \mathbb{R}^2$ het product van twee open intervallen. Zij $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie waarvan de partiële afgeleiden voldoen aan

$$|D_j f(x)| \leq M, \quad (x \in U).$$

(a) Toon aan dat voor alle $a, b \in U$ geldt

$$|f(b) - f(a)| \leq M(|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|).$$

(b) Toon aan dat voor alle $a, b \in U$ geldt

$$|f(b) - f(a)| \leq 2M\|b - a\|.$$

De schatting in (b) zal nog verscherpt worden in Opgave 1.15, door gebruik te maken van de kettingregel.

Opgave E.2 We beschouwen de functies $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gegeven door $f_k(x) = ke^{x/k} - k$, ($x \in \mathbb{R}$).

- (a) Toon aan dat de rij $(f_k)_{k \geq 1}$ puntsgewijs convergent is op \mathbb{R} . Bepaal de puntsgewijze limiet.
- (b) Toon aan dat de rij $(f_k)_{k \geq 1}$ uniform convergent is op $[-R, R]$, voor alle $R > 0$.
- (c) Toon aan dat de rij $(f_k)_{k \geq 1}$ niet uniform convergent is op \mathbb{R} .