Achtergrond: symmetrische matrices

In het vervolg veronderstellen we dat V een reële lineaire ruimte is van dimensie $n < \infty$.

Verder veronderstellen we dat V voorzien is van een inproduct $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. Een lineaire afbeelding $A : V \to V$ heet symmetrisch ten aanzien van dat inproduct indien voor alle $v, w \in V$ geldt dat

$$\langle Av\,,\,w \rangle = \langle v\,,Aw \rangle.$$

Laat nu $e_1, \dots, e_n$ een orthonormale basis van V zijn, dwz. een basis met $\langle e_i\,,\,e_j \rangle = \delta_{ij}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Zo'n basis bestaat (Gramm–Schmid). Een lineaire afbeelding $A : V \to V$ heeft ten aanzien van de basis een matrix $\mathrm{mat}(A) = (A_{ij})$, die bepaald is door

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i.$$

Uit de orthonormaliteit van de basis volgt dat

$$A_{ij} = \langle e_i\,,Ae_j \rangle.$$

Symmetrie van A is nu af te lezen uit symmetrie van zijn matrix ten aanzien van de orthonormale basis.

Lemma 1. *A is symmetrisch dan en slechts dan als $A_{ij} = A_{ji}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$.*

Bewijs Zij A symmetrisch, dan is $A_{ij} = \langle Ae_j\,,\,e_i \rangle = \langle e_j\,,Ae_i \rangle = \langle Ae_i\,,\,e_j \rangle = A_{ij}$. Derhalve is $\mathrm{mat}(A)$ symmetrisch. Zij omgekeerd $\mathrm{mat}(A)$ symmetrisch. Dan geldt voor alle i, j dat $\langle Ae_j\,,\,e_i \rangle = A_{ij} = A_{ji} = \langle e_j\,,Ae_i \rangle$. Voor $v, w \in V$ schrijven we

$$v = \sum_j v^j e_j, \qquad w = \sum_j w^j e_j.$$

Dan is $v^j = \langle v\,,\,e_j \rangle$ en $w^j = \langle w\,,\,e_j \rangle$. Nu is

$$\langle Av\,,\,w \rangle = \sum_{i,j} v^j w^i \langle Ae_j\,,\,e_i \rangle = \sum_{i,j} v^j w^i \langle e_j\,,Ae_i \rangle = \langle v\,,Aw \rangle.$$

Dus A is symmetrisch. $\square$

Het bovenstaande geldt in het bijzonder als $V = \mathbb{R}^n$, voorzien van het standaardinproduct.

We veronderstellen in het vervolg dat $A : V \to V$ symmetrisch is. Voor twee vectoren $v, w \in V$ schrijven we $v \perp w$ indien $\langle v\,,\,w \rangle = 0$. Dergelijke vectoren heten onderling orthogonaal. Is $S \subset V$ een deelverzameling en $v \in V$ dan betekent $v \perp S$ dat $v \perp s$ voor alle $s \in S$.

Voor een deel $S \subset V$ definiëren we het orthocomplement $S^\perp$ door

$$S^\perp = \{v \in V \mid v \perp S\}.$$

Het is niet moeilijk te bewijzen dat

$$V = \langle S \rangle \oplus S^{\perp},$$

met waarbij $\langle S \rangle$ staat voor het lineaire opspansel van S. In het bijzonder geldt voor iedere $v \in V \setminus \{0\}$ dat

$$V = \mathbb{R}v \oplus v^{\perp}.$$

In het bijzonder is $\dim(v^{\perp}) = n - 1$.

Lemma 2. *Laat $A : V \to V$ symmetrisch zijn. Dan zijn er een orthononormale basis $f_1, \ldots, f_n$ van V en reële getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ zo dat*

$$Af_j = \lambda_j f_j, \quad (1 \leq j \leq n).$$

Bewijs We gebruiken inductie naar n. Voor $n = 1$ is de stelling waar. Veronderstel dat $n > 1$ en dat de bewering waar is voor kleinere waarden van n.

We tonen eerst aan dat er een $f_1 \in V$ bestaat met lengte 1 en een $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ zo dat $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Kies een orthonormale basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ van V en zij $T : \mathbb{R}^n \to V$ de unieke lineaire afbeelding met $T(e_j) = \varepsilon_j$. Dan is T een lineair isomorfisme van $\mathbb{R}^n$ op V. We beschouwen de lineaire afbeelding $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeven door $M = T^{-1}AT$. De matrix van M ten aanzien van de standaardbasis wordt gegeven door $M_{ij} = (Me_j)_i$, en dit is tevens de matrix van A ten aanzien van (ε_j). Aangezien A symmetrisch is, is de matrix M dat ook.

De n-de graads veeltermvergelijking $\det(M - zI) = 0$ heeft een oplossing $z \in \mathbb{C}$, wegens de hoofdstelling van de algebra. Er geldt voor die z dat de complexe matrix $M - zI$ rang kleiner dan n heeft. Er is dus een complexe kolomvector $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ zo dat

$$(M - zI)v = 0.$$

Hieruit volgt $Mv = zv$. Zij $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ het complexe standaardinproduct op $\mathbb{C}^n$. Dan volgt uit de symmetrie van M dat

$$z\langle v \,, v \rangle = \langle Mv \,, v \rangle = \langle v \,, Mv \rangle = \bar{z}\langle v \,, v \rangle.$$

Aangezien $\langle v \,, v \rangle = \|v\|^2 > 0$ volgt hieruit daat $z = \bar{z}$ dus $\lambda_1 := z \in \mathbb{R}$. We merken op dat $Mv = \lambda_1 v$ en $M(iv) = \lambda_1 iv$. Door reële delen te nemen volgt voor $w = \mathrm{Re}\,(v)$ en $w = \mathrm{Re}\,(iv)$ dat $Mw = \lambda_1 w$. Omdat v en iv niet beide imaginair zijn volgt dat $Mw = \lambda_1 w$ voor een $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

We beschouwen de vector $u \in V$ gegeven door $u = Tw$. Aangezien $M = T^{-1}AT$ volgt nu dat

$$Au = \lambda_1 u.$$

De vector $f_1 := \|u\|^{-1} u$ voldoet daarom aan de gestelde eisen.

We kunnen nu het bewijs als volgt voltooien. Is $v \in f_1^{\perp}$ dan geldt dat

$$\langle Av \,, f_1 \rangle = \langle v \,, Af_1 \rangle = \lambda_1 \langle v \,, f_1 \rangle = 0,$$

dus $Av \in f_1^\perp$. We zien dat $A(f_1^\perp) \subset f_1^\perp$. De beperking $A|_W$ van A tot $W := f_1^\perp$ is een lineaire afbeelding $W \to W$ die symmetrisch is voor de beperking van het inproduct $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ tot W. Aangezien $\dim(W) = n-1$ volgt op grond van de inductiehypothese dat er een orthonormale basis $f_2, \dots, f_n$ van W en $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat $Af_j = \lambda_j f_j$ voor alle $2 \leq j \leq n$. Het is gemakkelijk in te zien dat $f_1, \dots, f_n$ een orthonormale basis van V is, terwijl $Af_j = \lambda_j f_j$ voor alle $1 \leq j \leq n$. $\square$

Merk op dat de inductie in het bovenstaande bewijs soepel werkt in de context van eindig dimensionale lineaire ruimten, algemener dan $\mathbb{R}^n$. Deelruimten van $\mathbb{R}^n$ kunnen zo deel uitmaken van het inductieproces.

Extra Opgave 1

Een symmetrische lineaire afbeelding $A : V \to V$ heet positief definiet indien

$$\langle Av \, , \, v \rangle > 0$$

voor alle $v \in V \setminus \{0\}$. Toon aan dat dit gelijkwaardig is met de bewering dat alle eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ van A positieve reële getallen zijn.

Veronderstel nu dat A positief definiet is en zij $m = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dan is $m > 0$. Toon aan dat voor alle $v \in V$ geldt:

$$\langle Av \, , \, v \rangle \geq m\|v\|^2.$$