Opgaven

Inleiding Analyse in Meer Variabelen

E.P. van den Ban

1 Partiële en totale afgeleiden

Opgave 1.1 Bepaal de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ en $\partial f/\partial z$ van de volgende functies

(a) $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}$, $\qquad ((x, y) \neq (0, 0))$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + yz \sin x$.

(c) $f(x, y, x) = xy \sin y \log(x^2 + 1)$.

$\oslash$

Opgave 1.2 Bepaal de partiële afgeleiden $\partial f/\partial r$ en $\partial f/\partial \varphi$

(a) als $f(r, \varphi) = r \cos \varphi$,

(b) als $f(r, \varphi) = r \sin \varphi$.

Zij $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $F(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

(c) Toon aan dat F partieel differentierbaar is en bepaal D_1F en D_2F.

$\oslash$

Opgave 1.3 We definiëren de veeltermfunctie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3.$$

Toon aan dat f richtingsdifferentieerbaar is in $(1, 0)$ en bepaal de richtingsafgeleide $D_vf(1, 0)$ voor elke $v \in \mathbb{R}^2$. $\oslash$

Opgave 1.4 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x^2y + ye^{xy}$. Bepaal de volgende richtingsafgeleiden:

(a) $D_{(1,2)}f(0, 0)$, $\qquad$ (b) $D_{(0,0)}f(1, 1)$, $\qquad$ (c) $D_{(2,1)}f(1, 1)$.

$\oslash$

Opgave 1.5 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door: $f(x,\, y) = x\, y^3 + \mathrm{e}^{x \cos y}$. Laat zien dat f in het punt $(1,\, 1)$ richtingsdifferentieerbaar is in iedere richting $v \in \mathbb{R}^2$. Geef een formule voor $D_vf(1,\, 1)$. $\oslash$

Opgave 1.6 Gegeven is een continue afbeelding $f : X \to Y$ tussen metrische ruimten. Toon aan: als f surjectief is en X boogsamenhangend, dan is Y boogsamenhangend. $\oslash$

Opgave 1.7 Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar iedere variabele en zij $\operatorname{grad} f(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat f constant is. $\oslash$

Opgave 1.8 Zij S de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. Is S boogsamenhangend? Is $\mathbb{R}^2 \setminus S$ boogsamenhangend? Bewijs de juistheid van je beweringen. $\oslash$

Opgave 1.9 Zij $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(a) Toon aan dat U open is in $\mathbb{R}^2$.

(b) Toon aan dat U boogsamenhangend is.

(c) Toon aan dat er een unieke partieel differentieerbare $f : U \to \mathbb{R}$ bestaat met

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^2} \quad \text{en} \quad f(1,0) = 1.$$

⊘

Opgave 1.10 We beschouwen de verzamaling $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x|\}$, voorzien van de beperking van de Euclidsiche metriek.

(a) Toon aan dat V niet boogsamenhangend is.

(b) Toon aan dat $V \cup \{(0,0)\}$ (voorzien van de beperking van de Euclidische metriek) wel boogsamenhangend is.

⊘

Opgave 1.11 Zij X een boogsamenhangende metrische ruimte, en $U \subset X$ een niet-lege deelverzameling die zowel open als gesloten is in X. Zij $f : X \to \{0,1\}$ de karakteristieke functie van U, d.w.z. $f(x) = 1$ voor alle $x \in U$ en $f(x) = 0$ voor alle $x \in X \setminus U$.

(a) Toon aan dat f lokaal constant is.

(b) Toon aan dat $U = X$.

Opmerking: Een metrische ruimte X heet samenhangend indien voor ieder open en gesloten deel U van X geldt: $U = \emptyset$ of $U = X$. Uit deze opgave volgt dat boogsamenhang van X samenhang van X impliceert. ⊘

Opgave 1.12 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x,\, y) = \left(1 - x^2\right)\,\left(1 - y^2\right)$.

a) Bereken alle stationaire punten van f.

b) Onderzoek in alle stationaire punten of f een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

⊘

Opgave 1.13 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x,\, y) = x\,y\,(x + y - 1)$.

a) Bewijs dat f vier stationaire punten heeft.

b) Bewijs dat f in precies één van deze punten een extremum heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

⊘

Opgave 1.14 Beschouw de veeltermfunctie

$$f(x,\, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + x\,y^2$$

van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f(x,\, y)/\partial x$ en $\partial f(x,\, y)/\partial y$ en bepaal de stationaire punten. Onderzoek of f zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak

$$V_+ = \{(x,\, y) \mid x \geq 0\},$$

respectievelijk op het linker halfvlak

$$V_- = \{(x,\, y) \mid x \leq 0\}.$$

Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x,\, y)$ vervangen door $g(x,\, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - x\, y^2$. $\oslash$

Opgave 1.15 Gegeven zijn twee vaste vectoren b en c in $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat elk der onderstaande afbeeldingen f in ieder punt a van $\mathbb{R}^n$ totaal differentieerbaar is door gebruik te maken van de definitie van totale differentieerbaarheid. Bepaal daarbij $Df(a)h$ voor elke $a \in \mathbb{R}^n$ en $h \in \mathbb{R}^n$.

a) $f(x) = \langle b,\, x\rangle$,

b) $f(x) = \langle b,\, x\rangle\, \langle c,\, x\rangle$,

c) $f(x) = \langle x, x\rangle$,

d) $f(x) = \langle b,\, x\rangle\, c$,

e) $f(x) = \langle x,\, x\rangle\, x$.

$\oslash$

Opgave 1.16 Gegeven is dat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbare functies zijn in $a \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$F(x) := \langle f(x),\, g(x)\rangle$$

ook totaal differentieerbaar is in a en bewijs dat de totale afgeleide $DF(a)$ gegeven wordt door de formule:

$$DF(a)(h) = \langle Df(a)(h),\, g(a)\rangle + \langle f(a),\, Dg(a)(h)\rangle, \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

$\oslash$

Opgave 1.17 Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een totaal differentieerbare functie en $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

a) Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is $Df(x) = L$.

b) Er is een $c \in \mathbb{R}^p$ met de eigenschap dat $f(x) = L(x) + c$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$.

Aanwijzing voor a) $\Rightarrow$ b): pas Opgave 1.7 toe op $f - L$. $\oslash$

Opgave 1.18 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0, 0) = 0$ en door

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{voor} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

(a) Toon aan dat f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$ en bepaal $Df(0,0)$.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide $D_v f(0,0)$ voor iedere $v \in \mathbb{R}^2$.

$\oslash$

Opgave 1.19 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0,0) = 0$ en door

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^4}, \quad \text{voor} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Toon aan dat f richtingsdifferentieerbaar in $(0,0)$ in iedere richting $v \in \mathbb{R}^2$. Bepaal tevens $D_v f(0,0)$.

(b) Toon aan dat f niet totaal differentieerbaar is in $(0,0)$. Hint: veronderstel dat f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$, bepaal $Df(0,0)$ en bestudeer vervolgens $f(t^2,t)$ en de bijbehorende restterm.

$\oslash$

Opgave 1.20 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$. Neem aan dat voor iedere $1 \leq i \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de i-de variabele en dat de functie $D_i f$ begrensd is op U.

(a) Bewijs dat f continu is.

(b) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die in $(0,\, 0)$ niet continu is, maar wel de eigenschap heeft dat beide eerste orde partiële afgeleiden in een omgeving van $(0,\, 0)$ bestaan. Merk op dat a) impliceert dat noodzakelijkerwijze één van de partiële afgeleiden onbegrensd is op iedere omgeving van $(0,\, 0)$. Verifieer dat dit bij het gevonden voorbeeld het geval is.

$\oslash$

Opgave 1.21 We definiëren de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $\varphi(x,\, y) = x\,y$. Laten $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbare functies zijn. Gebruik de kettingregel voor differentiëren langs een kromme om

$$\frac{d}{dt}\varphi(f(t),\, g(t))$$

uit te drukken in f, g en hun afgeleiden f' en g'. Kun je het gevonden resultaat ook op een andere manier begrijpen? Formuleer en bewijs een productregel voor differentiatie van een product van n functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\oslash$

Opgave 1.22 Laat $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ zijn en $m \in \mathbb{R}$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(a) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = mf(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) $f(t\,x) = t^m\, f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en $t > 0$.

Hint: Onderzoek de afgeleide naar t van de functie:

$$t^{-m} f(t\,x) = t^{-m} f\left(t\,x_1,\, \ldots,\, t\,x_n\right).$$

De functie heet *positief homogeen van de graad* m als zij aan b) voldoet. De vergelijking in a) heet de *differentiaalvergelijking van Euler.*

Bewijs dat als f aan (a) of (b) voldoet, dan is f eenduidig vastgelegd door zijn waarden op de sfeer

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$$

met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. (Hint: zoek t waarvoor $\|t\,x\| = 1$.) $\oslash$

Opgave 1.23

a) Zij $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, waarin $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ een nader te bepalen tweemaal differentieerbare functie is. Bewijs dat $\partial\|x\|/\partial x_j = x_j/\|x\|$. Bepaal de functies φ waarvoor

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x_i}^2} = 0$$

op $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Hint: herken een Euler differentiaalvergelijking voor de functie $\psi(r) = \varphi'(r)$.

b) Voor een differentieerbaar vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ in een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ definieert men de *divergentie* $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$ door middel van de formule

$$(\operatorname{div} v)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U.$$

Zij nu $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en v gedefinieerd door $v_i(x) = \|x\|^{-n}\, x_i$, voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ en iedere $1 \leq i \leq n$. Gebruik uw berekening in a) om aan te tonen dat $\operatorname{div} v = 0$.

$\oslash$

Opgave 1.24 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (t,\, \cos t), \qquad g(x,\, y) = \mathrm{e}^x\, \cos y.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

(a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.

(b) Door de kettingregel toe te passen.

$\oslash$

Opgave 1.25 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t), \qquad g(x,\, y,\, z) = (x + y)^2 - z^2.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

(a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.

(b) Door de kettingregel toe te passen.

$\oslash$

Opgave 1.26

(a) Gegeven zijn differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bewijs dat $\operatorname{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \operatorname{grad} g$.

(b) Gegeven zijn een differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en een C^1 functie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Bewijs dat de i-de component van $\operatorname{grad}(f \circ g)(x)$ gelijk is aan het inproduct in $\mathbb{R}^p$ van de vector $(\operatorname{grad} f)(g(x))$ met de vector $D_i g(x)$.

$\oslash$

Opgave 1.27 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : U \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Zij $a,\, b \in U$ en veronderstel dat het *lijnstuk*

$$L(a,\, b) := \{\, a + t\,(b-a) \mid \ t \in [0,\, 1]\,\}$$

van a *naar* b in zijn geheel bevat is in U. Definieer $g(t) := f(a + t\,(b-a))$.

(a) Bewijs dat er een $t \in]0,\, 1[$ is, waarvoor $g(1) - g(0) = g'(t)$. Laat zien dat bijgevolg

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a + t\,(b-a)),\, b - a \rangle$$

en dat

$$|f(b) - f(a)| \leq \|\operatorname{grad} f(a + t\,(b-a))\|\, \|b - a\|.$$

(b) Bewijs dat als $\operatorname{grad} f$ begrensd is op $L(a,\, b)$, dan is

$$|f(b) - f(a)| \leq M\, \|b - a\|, \quad \text{waarin} \quad M := \sup_{x \in L(a,\, b)} \|\operatorname{grad} f(x)\|.$$

(c) Een deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet *convex* als voor iedere $a,\, b \in U$ geldt dat $L(a,\, b) \subset U$. Bewijs dat als U convex is en $\operatorname{grad} f$ is begrensd op U, dan is er een constante C met de eigenschap dat voor iedere $a,\, b \in U$ geldt $|f(b) - f(a)| \leq C\, \|b - a\|$.

$\oslash$

Opgave 1.28

(a) Bewijs dat de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $f(x,\, y) = (x + y, x^2 + y^2, x\,y)$, in ieder punt van $\mathbb{R}^2$ totaal differentieerbaar is en bereken de Jacobi-matrix van f.

(b) Overeenkomstige vragen voor $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x,\, y,\, z) = x\,y\,z + x\,y + x$.

(c) Idem voor $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $\varphi(x) = (1,\, x,\, x^2)$.

$\oslash$

Opgave 1.29 Zij $m \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ positief homogeen van de graad m, zie Opgave 1.22. Neem aan dat f begrensd is op S en niet identiek gelijk aan nul.

(a) Bewijs dat als $f(x)$ convergeert voor $x \to 0$, dan is $m \geq 0$. Bewijs dat omgekeerd, als $m > 0$, dan geldt dat $f(x) \to 0$ als $x \to 0$ terwijl, als $m = 0$, dan convergeert $f(x)$ voor $x \to 0$ dan en slechts dan als f constant is.

(b) Zij nu $m > 0$ en definieer $f(0) = 0$. Bewijs dat als f richtingsdifferentieerbaar is in 0 in iedere richting, dan is $m \geq 1$. Is omgekeerd $m > 1$, dan is f richtingsdifferentieerbaar in het punt 0 in iedere richting en heeft richtingsafgeleide gelijk aan nul.

(c) f is totaal differentieerbaar in het punt 0 dan en slechts dan als ofwel $m > 1$, in welk geval $Df(0) = 0$, ofwel $m = 1$ en f is een lineaire functie.

⊘

Opgave 1.30 Van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven dat

$$(\text{grad}\, f)(x,\, y) = (y\, \mathrm{e}^x,\, \mathrm{e}^x - \frac{1}{y^2+1}).$$

Bereken alle f die hieraan voldoen. ⊘

Opgave 1.31 Van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de Jacobi-matrix gegeven door

$$J_f(x,\, y) = \begin{pmatrix} y^2\, \mathrm{e}^x & 2y\, \mathrm{e}^x \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bereken f als ook nog gegeven is dat $f(0,\, 1) = (1\,, 0)$. ⊘

Opgave 1.32 De afbeeldingen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$g(x,\, y,\, z) = (x\, z,\, \log(y^2 + \mathrm{e}^z)), \quad h(x,\, y) = (x + y,\, x\, y).$$

Bereken de Jacobi-matrix van $h \circ g$ op twee manieren:

(a) rechtstreeks, dat wil zeggen door $h \circ g$ te berekenen en de definitie van de Jacobi-matrix te gebruiken;

(b) met behulp van de kettingregel.

⊘

Opgave 1.33 De afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,\, y) = (x^2,\, y,\, x\, y), \quad g(x,\, y,\, z) = (x\, y\, z,\, z\, \sin(x\, y)).$$

Bereken de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$. ⊘

Opgave 1.34 Gegeven zijn differentieerbare afbeeldingen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Noem de componenten van g respectievelijk $g_1, \ldots, g_n$. Geef de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$ in termen van de partiële afgeleiden van f en de afgeleiden van de g_j. ⊘

Opgave 1.35 Gegeven is een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We definiëren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $F(x,\, y) = f(x + y,\, x - y)$.
Geef een formule die $D_1F + D_2F$ uitdrukt in D_1f en D_2f. ⊘

Opgave 1.36 We beschouwen een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. De functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $g(\rho,\, \phi) = f(\rho\, \cos\phi,\, \rho\, \sin\phi)$.

(a) Geef een formule die de partiële afgeleiden van g uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van f.

(b) Geef een formule die de partiële afgeleiden van f uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van g.

(c) Geef een formule die

$$D_1^2 f + D_2^2 f$$

uitdrukt in ρ, ϕ en de (eventueel hogere orde) partiële afgeleiden van g.

$\oslash$

Opgave 1.37 De functie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$F(r,\, \theta,\, \phi) = (r\, \sin\theta\, \cos\phi,\, r\, \sin\theta\, \sin\phi,\, r\, \cos\theta).$$

Bereken de Jacobi-matrix van F. In welke punten is de determinant van deze matrix gelijk aan nul? $\oslash$

Opgave 1.38 Laten V en W open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn. Zij $f : V \to W$ bijectief en differentieerbaar en zij $f^{-1} : W \to V$ differentieerbaar. Bewijs dat voor iedere $a \in V$ de afgeleide $Df(a)$ bijectief is en dat $Df(a)^{-1} = D(f^{-1})(f(a))$. $\oslash$

Opgave 1.39 De verzameling van alle inverteerbare $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n)$ wordt met $\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ aangeduid, deze heet de *algemene lineaire groep in n reële variabelen*. Bewijs dat $\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ een open deelverzameling is van $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n)$ en dat de afbeelding $A \mapsto A^{-1}$ continu is van $\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ naar $\mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n)$.
Aanwijzing: gebruik dat als $A \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n)$, dan is $A \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ dan en slechts dan als $\det A \neq 0$. Gebruik verder de *formule van Cramer* voor A^{-1}, die zegt dat

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\, \frac{\det\left(A^{(ji)}\right)}{\det A}.$$

Hierin is $A^{(ji)}$ de $(n-1) \times (n-1)$-matrix die uit de matrix van A is verkregen door de i-de rij en de j-de kolom van de matrix van A te schrappen. $\oslash$

Opgave 1.40 Veronderstel dat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling is, $a \in U$ en $f : U \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar in a. Schrijf $R(x) = f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)$.

(a) Toon aan dat voor iedere $x \in U \setminus \{a\}$ door

$$\rho(x) : v \mapsto \langle x - a\,,\, v\rangle \|x-a\|^{-2} R(x)$$

een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd wordt en dat

$$\rho(x) \to 0 \text{ in } \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \quad \text{voor } x \to a.$$

Definieer $\rho(0) := 0$.

(b) Definieer $L : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ door $L(x) = Df(a) - \rho(x)$ voor $x \in U$. Toon aan dat

 (a) $\lim_{x\to a} L(x) = Df(a)$,

(b) $f(x) = f(a) + L(x)(x-a), \quad (x \in U)$.

$\oslash$

Opgave 1.41 Laten U en V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn en $f : U \to V$ een bijectieve afbeelding met inverse afbeelding g. Zij $a \in U$ en veronderstel dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(a) de afbeelding f is differentieerbaar in a en $Df(a)$ is bijectief,

(b) De afbeelding g is continu in $b := f(a)$.

Bewijs dat g differentieerbaar is in $f(a)$ en dat $(Dg)(f(a)) = (Df(a))^{-1}$.
Aanwijzing: Zij $f(x) - f(a) = L(x)(x-a)$ als in Opgave 1.40. Bewijs dat als $y = f(x)$, $x \in U$ en $L(x)$ is inverteerbaar, dan is

$$g(y) = g(b) + L(g(y))^{-1}\,(y-b).$$

Pas nu Opgave 1.39 toe. $\oslash$

Opgave 1.42 We beschouwen de functie $\gamma : t \mapsto (\cos t, \, \sin t)$.

(a) Toon aan dat γ differentieerbaar is, en bepaal de afgeleide γ'.

(b) Toon aan dat er geen $\tau \in [0, \, \pi]$ bestaat met de eigenschap dat

$$\gamma(\pi) - \gamma(0) = \pi\, \gamma'(\tau).$$

(c) Toon aan dat er wel een $\tau \in [0, \pi]$ bestaat waarvoor

$$\|\gamma(\pi) - \gamma(0)\| \leq \pi\, \|\gamma'(\tau)\|.$$

Het analogon van de middelwaardestelling geldt dus in het algemeen niet voor vectorwaardige functies.

De schatting in (c) is de in Opgave 1.44 verkregen 'middelwaardeschatting' voor vectorwaardige functies. $\oslash$

Opgave 1.43 Laat zien dat

$$\|A\| \quad := \quad \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

een norm definieert op de ruimte $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ van lineaire afbeeldingen en dat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$. Aanwijzing: ga eerst na dat

$$\|A\| \quad = \quad \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \quad .$$

$\oslash$

Opgave 1.44 (Dictaat, Opm. 1.50) Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een functie die overal totaal differentieerbaar is Veronderstel verder dat $p, q \in U$ en dat $[p, q] \subset U$. Veronderstel tenslotte dat $M > 0$ en dat $\|Df(x)\| \leq M$ voor alle $x \in [p, q]$.

(a) Toon aan dat voor alle $v \in \mathbb{R}^p$ geldt dat

$$|\langle f(q) - f(p)\,,\, v\rangle| \leq M\|v\|\|q-p\|.$$

Hint: beschouw de functie $F : x \mapsto \langle f(x)\,,\, v\rangle$.

(b) Toon aan dat

$$\|f(q) - f(p)\| \leq M\|q-p\|.$$

Hint: pas (a) toe met een geschikte keuze van $v \in \mathbb{R}^p$.

$\oslash$

Opgave 1.45 We beschouwen een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en totaal differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{R}$. De grafiek van f wordt gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x,y) \in U \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}.$$

We beschouwen de linearisatie F van f in $a \in U$ gedefinieerd door

$$F(x) = f(a) + Df(a)(x-a).$$

(a) Toon aan dat de grafiek $\mathrm{graph}(Df(a))$ van $Df(a)$ een lineaire deelvariëteit is van $\mathbb{R}^{n+1}$ van dimensie n.

(b) Toon aan dat de grafiek van F gegeven wordt door:

$$\mathrm{graph}(F) = (a, f(a)) + \mathrm{graph}(Df(a)).$$

(c) Toon aan dat voor elke differentieerbare kromme $c : [-\delta, \delta] \to U \times \mathbb{R}$ met $c(0) = (a, f(a))$ en $c([-\delta,\delta]) \subset \mathrm{graph}(f)$ geldt dat $c'(0) \in \mathrm{graph}(Df(a))$. Hint: schrijf $c = (b, c_{n+1})$ met $b = (c_1, \ldots, c_n)$.

(d) Toon aan dat omgekeerd voor iedere $v \in \mathrm{graph}(Df(a))$ een kromme c als in (c) bestaat, met $c'(0) = v$.

Wegens het bovenstaande kan $\mathrm{graph}(F)$ opgevat worden als de raakruimte van $\mathrm{graph}(f)$ in $(a, f(a))$. Interpreteer de bovenstaande beweringen voor het geval $n = 1$. $\oslash$

2 Hogere orde partiële afgeleiden

Opgave 2.1 Zij $\mathcal{F}$ de ruimte van functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Voor $h_1, h_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiëren we de lineaire afbeeldingen $\Delta_j : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, voor $j = 1, 2$, door

$$\Delta_j f(x) = \frac{f(x + h_j e_j) - f(x)}{h_j}, \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

voor $f \in \mathcal{F}$. Toon aan dat voor alle $f \in \mathcal{F}$ geldt:

$$\Delta_1(\Delta_2 f) = \Delta_2(\Delta_1 f).$$

⊘

Opgave 2.2 Gegeven is een C^2 functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en een twee keer differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 f(g(x,\, y))}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(g(x,\, y))}{\partial y\, \partial x}.$$

Waarschuwing: we hebben niet verondersteld dat de tweede orde afgeleide f'' van f continu is. ⊘

Opgave 2.3 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0,0) = 0$ en door

$$f(x,y) = \frac{|x|xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{als} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Toon aan dat $D_1 f(0,y)$ bestaat voor alle $y \in \mathbb{R}$ en bepaal de functie $y \mapsto D_1 f(0,y)$.

(b) Toon aan dat $D_2 f(x,0)$ bestaat voor voor alle $x \in \mathbb{R}$ en bepaal de functie $x \mapsto D_2 f(x,0)$.

(c) Toon aan dat $D_2 D_1 f(0,0)$ en $D_1 D_2 f(0,0)$ bestaan maar niet gelijk zijn aan elkaar.

Hoe is (c) te rijmen met de stelling over verwisseling van partiële afgeleiden? ⊘

Opgave 2.4 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Onder een vectorveld op U verstaan we een afbeelding $U \to \mathbb{R}^n$. Als $f : U \to \mathbb{R}$ een differentieerbare reëlwaardige functie is op U, dan is de gradiënt $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$ van f een vectorveld op U.

Als $v : U \to \mathbb{R}^n$ een differentieerbaar vectorveld is, dan is de *divergentie* $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$ van v gedefinieerd als

$$(\operatorname{div} v)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}.$$

Zij nu $n = 3$. Dan definiëren we het vectorveld $\operatorname{rot} v : U \to \mathbb{R}^3$ door

$$(\operatorname{rot} v)_1 = D_2 v_3 - D_3 v_2, \quad (\operatorname{rot} v)_2 = D_3 v_1 - D_1 v_3, \quad (\operatorname{rot} v)_3 = D_1 v_2 - D_2 v_1.$$

Het vectorveld $\operatorname{rot} v$ wordt de *rotatie* van v genoemd.

a) Laat zien dat voor elke C^2 functie f op U geldt: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

b) Laat zien dat voor elk C^2–vectorveld v op U geldt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$.

$\oslash$

Opgave 2.5 Laten $U \subset \mathbb{R}^n$ en $V \subset \mathbb{R}^p$ open deelverzamelingen zijn, $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ en $g \in C^k(V, \mathbb{R}^q)$ zo dat $f(U) \subset V$. Toon aan dat $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$. Hint: reduceer naar $q = 1$ en gebruik inductie naar k. $\oslash$

Opgave 2.6 Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn, en $f : U \to \mathbb{R}$ een C^2-functie.

(a) Toon aan dat $g := \operatorname{grad} f$ een C^1-functie $U \to \mathbb{R}^n$ is.

(b) Toon aan dat voor alle $x \in U$ geldt:

$$Dg(x) = H_f(x).$$

$\oslash$

Opgave 2.7 In het vervolg beschouwen we de verzameling $\mathbb{N}^n$. Voor $\alpha \in \mathbb{N}^n$ schrijven we $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ en

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \qquad \alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!$$

Het getal $|\alpha|$ heet de orde van α. We noteren

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$$

Hierbij spreken we af dat $x_j^0 = 1$, waardoor we garanderen dat $x \mapsto x^\alpha$ een continue functie is.

Onder een veelterm functie van graad hoogstens k op $\mathbb{R}^n$ verstaan we een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ waarvoor coëfficiënten $d_\alpha \in \mathbb{R}$, voor $\alpha \in \mathbb{N}^n$, bestaan zo dat

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} d_\alpha x^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \qquad (*)$$

(a) Toon aan dat voor zo'n veeltermfunctie f en voor iedere $\beta \in \mathbb{N}^n$ met $\beta \neq \alpha$ geldt:

$$\left.\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}(x^\alpha)\right|_{x=0} = 0,$$

terwijl

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(x^\alpha)\right|_{x=0} = \alpha!$$

(b) Toon aan dat uit (*) volgt dat

$$d_\alpha = \frac{1}{\alpha!}[D^\alpha f](0), \quad (|\alpha| \le k).$$

In het bijzonder zijn de coëfficiënten d_α uniek bepaald door f. $\oslash$

Opgave 2.8 We beschouwen de volgende functie $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, voor $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(x) = \frac{1}{k!}(x_1 + \cdots + x_n)^k.$$

(a) Toon aan dat f een veeltermfunctie is van graad hoogstens k.

(b) Bewijs dat voor elke $1 \leq j \leq n$ en iedere $k \geq 1$ geldt:

$$D_j f_k = f_{k-1}.$$

(c) Bepaal $D^\alpha f(0)$ voor iedere $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(d) Toon aan dat

$$\frac{1}{k!}(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Merk op dat de formule gezien kan worden als generalisatie van de binomiaalformule.

⊘

Opgave 2.9

(a) Toon aan dat iedere veelterm-functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van graad hoogstens 2 op een unieke manier beschreven kan worden door

$$f(x) = a + \langle b\,,\, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Cx\,,\, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een constante, $b \in \mathbb{R}^n$ een constante vector en $C \in M_n(\mathbb{R})$ een *symmetrische* $n \times n$-matrix.

(b) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ geldt $\operatorname{grad} f(x) = b + Cx$. Definieer nu het vectorveld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ door $v(x) = \operatorname{grad} f(x)$.

(c) Laat zien dat v totaal differentieerbaar is in iedere $x \in \mathbb{R}^n$ met totale afgeleide $Dv(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ h \mapsto Ch$.

(d) Toon aan dat $H_f(x) = C$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.

⊘

Opgave 2.10 Zij C een symmetrische 2×2 matrix. We veronderstellen dat $\det C \neq 0$. Uit de lineaire algebra is bekend dat er een orthonomale basis $\{v_1, v_2\}$van $\mathbb{R}^2$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestaan zo dat

$$Cv_j = \lambda_j v_j, \qquad (j = 1, 2).$$

We veronderstellen dat $\det C < 0$. Dan geldt $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Na eventuele verwisseling van volgorde mogen we dus veronderstellen dat $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 < 0$.

(a) Toon aan dat er vectoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ bestaan zo dat

$$\langle Cu\,,\, u\rangle > 0 \quad \text{en} \quad \langle Cv\,,\, v\rangle < 0$$

Zij nu $U \subset \mathbb{R}^2$ open en $f : U \to \mathbb{R}$ een C^2-functie met een stationair punt $a \in U$. Veronderstel verder dat $\det H_f(a) < 0$.

(b) Toon aan dat er twee vectoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ met lengte 1 bestaan en een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(a;\delta)$ geldt

$$\langle H_f(x)u\,,\,u\rangle > 0, \quad \text{en} \quad \langle H_f(x)v\,,\,v\rangle < 0.$$

(c) Laat u voldoen aan (b). Toon aan dat voor $t \in \mathbb{R}$ geldt:

$$0 < |t| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; f(a + tu) > f(a).$$

(d) Toon aan dat f geen lokaal extreem heeft in a.

$\oslash$

Opgave 2.11 Bepaal alle lokale extrema van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, en de aard ervan (max of min) als

(a) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} - 2x^2 - y^2$;
(b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + e^{xy}$;
(c) $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + e^{xy}$;
(d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$.

$\oslash$

Opgave 2.12 Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^3(U)$. Toon aan dat

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x - a)^\alpha + R(x),$$

waarbij $\lim_{x \to a} \|x - a\|^{-2} R(x) = 0$. $\oslash$

Opgave 2.13 Gegeven is een veeltermfunctie $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van graad hoogstens 2. Zij $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn

(1) $D^\alpha p(a) = 0$ voor alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ met $|\alpha| \leq 2$.
(2) $\lim_{x \to a} \|x - a\|^{-2} p(x) = 0$.
(3) $p = 0$.

Zij nu $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $a \in U$. Zij $f \in C^3(U)$.

(b) Toon aan dat er precies één veeltermfunctie $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van graad hoogstens 2 bestaat zo dat

$$\lim_{x \to a} \|x - a\|^{-2} |f(x) - p(x)| = 0.$$

De generalisatie van dit resultaat naar $f \in C^{k+1}$ en p van graad hoogstens k staat bekend als de k-de orde formule van Taylor met rest. Zie dictaat, §2.3, voor details. $\oslash$

3 Integralen met een parameter

Instructie vooraf: oneigenlijke integralen

In de onderstaande opgaven zul je 'oneigenlijke' integralen tegenkomen van het type

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad (*)$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$ en $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ een functie die lokaal Riemann-integreerbaar is, dwz. Riemann-intgreerbaar over $[a, \beta]$ voor iedere $\beta \geq a$. De integraal heet *convergent* indien de limiet van $\int_a^\beta f(x)\,dx$ bestaat voor $\beta \to \infty$. In dat geval kennen we een waarde toe aan (*) en schrijven we

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Een niet convergente integraal heet divergent. Convergentie van integralen over een onbegrensd interval van de vorm $]-\infty, b]$ wordt op een soortgelijke wijze gedefinieerd.

Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar, dwz. integreerbaar over ieder interval van de vorm $[\alpha, \beta]$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\alpha \leq \beta$, dan heet $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ convergent indien de integralen over zowel $]-\infty, 0]$ als $[0, \infty[$ convergeren. In dat geval kennen we aan de integraal de volgende waarde toe:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Opgave 3.1 Zij $f(x, y) = e^{-x\,y}\,y$. Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$, dat voor iedere $y \geq 0$ de oneigenlijke integraal

$$F(y) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,y}\,y\,dx$$

bestaat, maar dat de functie $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ niet continu is in het punt 0.
Stelling 2.2 is dus niet zonder meer goed voor oneigenlijke integralen. $\oslash$

Opgave 3.2

a) Bereken $\int_0^A (x^2 + t)^{-2}\,dx$ voor $t > 0$ door differentiatie naar t van $\int_0^A (x^2 + t)^{-1}\,dx$.

b) Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-2}\,dx$ en verifieer dat deze gelijk is aan min de afgeleide naar t van de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-1}\,dx$.

c) Bereken $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-2}\,dx$ en $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-3}\,dx$.

$\oslash$

Opgave 3.3 Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)/2}}{1 + t^2}\,dt.$$

a) Bewijs dat $f(0) = \pi/4$. Bewijs door differentiatie naar a, gevolgd door een substitutie van variabelen, dat geldt:

$$f'(a) = -\mathrm{e}^{-a^2/2} \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx, \quad a > 0.$$

Definieer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door:

$$g(a) = f(a) + \left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx \right)^2 /2.$$

b) Bewijs dat $g' = 0$ op $\mathbb{R}$. Concludeer dat $g(a) = g(0) = \pi/4$, voor alle $a \in \mathbb{R}$.

c) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq f(a) \leq \mathrm{e}^{-a^2/2}$. Bewijs dat $f(a) \to 0$ als $a \to \infty$. Bewijs hiermee tenslotte dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dit is een bekende formule van Gauss. ⊘

Opgave 3.4 Zij

$$F(x) := \int_0^{\pi/2} \log(1 + x\cos^2\theta)\, d\theta, \quad x > -1.$$

Bewijs door middel van differentiatie naar x en de substitutie $t = \sin\theta/\cos\theta$ dat

$$F'(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1+x} \right) dt = \frac{\pi}{2}\, \frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{1+x}}.$$

Bereken $F(x)$.
Hint: schrijf $G(u) = F\left(u^2 - 1\right)$ en onderzoek $G'(u)$. Wat is $F(0)$? ⊘

Opgave 3.5 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu. Veronderstel dat f differentieerbaar is naar de eerste variabele en dat $D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu is. Definieer

$$F(x) = \int_a^x f(x, y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bewijs dat F continu differentieerbaar is en dat

$$F'(x) = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy,\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Bewijs dat

$$\int_a^c f(c, y)\, dy = \int_a^c f(x, x)\, dx + \int_a^c \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy\, dx.$$

$\oslash$

Opgave 3.6 Bewijs achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\cos(x\,\cos t)\right) &= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\sin(x\,\cos t)\right), \quad (x \neq 0),\\
\frac{d}{dx}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\cos(x\,\cos t)\,dt &= -\frac{\sin x}{x}, \quad (x \neq 0),\\
\int_0^y \frac{\sin x}{x}\,dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,\cos(y\,\cos t)\,dt, \quad (y > 0),\\
\left|\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,\cos(y\,\cos t)\,dt\right| &\leq \int_0^{\epsilon}\mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,dt + \int_{\epsilon}^{\pi/2}\mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,dt\\
&\leq \epsilon + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-y\,\sin\epsilon}, \quad (0 < \epsilon < \pi/2),\\
\lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\,dx &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Opmerking: in het college Functies en Reeksen wordt de limiet op een heel andere manier uitgerekend. $\oslash$

Opgave 3.7

a) Toon aan dat de functie $(x,\,y) \mapsto y/(x^2+y^2)$ continu is op $[0,\,1]\times[1,\,2]$.

b) Controleer d.m.v. een direkte berekening dat

$$\int_1^2\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_1^2 \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$

$\oslash$

Opgave 3.8 Gegeven zijn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < b$ en $0 < c < d$.

a) Toon aan dat de functie $f : (x,\,y) \mapsto 1/(x+y)$ continu is op $[a,\,b]\times[c,\,d]$.

b) Controleer d.m.v. een rechtstreekse berekening dat

$$\int_a^b\int_c^d \frac{1}{x+y}\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$$

$\oslash$

4 Inverse functiestelling en toepassingen

Opgave 4.1 In het dictaat wordt de bolcoordinaatafbeelding $\Phi : U :=]0,\infty[\times]-\pi,\pi]\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta).$$

Laat zien dat

$$\det D\Phi(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta, \qquad ((r,\varphi,\theta)\in U).$$

⊘

Opgave 4.2 We brengen in herinnering dat de hyperbolische functies $\cosh, \sinh : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \text{en} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

We definiëren de afbeelding $F : U :=]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ door

$$F(\rho,t) = \rho(\cosh t, \sinh t).$$

(a) Bereken $\det DF(\rho,t)$.

(b) Toon aan dat F een diffeomorfisme is van U op een open deel V van $\mathbb{R}^2$ en bepaal V.

⊘

Opgave 4.3 We beschouwen de afbeelding $f : U :=]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(r,t) = r(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}) \qquad ((r,t)\in U).$$

(a) Toon aan dat f een C^1-afbeelding is en dat

$$\det Df(r,t) = -\frac{r}{\cosh t}.$$

(b) Toon aan dat f een diffeomorfisme is van U op het bovenhalfvlak $V := \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$.

⊘

Opgave 4.4 We beschouwen de verzameling U van punten $x\in\mathbb{R}^2$ met $n(x) := 1 + x_1 + x_2 \neq 0$ en de functie $f : U\to\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x}{n(x)}$$

(a) Toon aan dat U een open deel is van $\mathbb{R}^2$.

(b) Toon aan f injectief is.

(c) Toon aan dat

$$\det Df(x) = \frac{1}{n(x)^3} \quad (x\in U).$$

(d) Volgens de inverse functiestelling is f een diffeomorfisme van U op een open deel V van $\mathbb{R}^2$. Verifieer dit door V en $f^{-1} : V \to U$ expliciet te bepalen.

$\oslash$

Opgave 4.5

(a) Bewijs dat $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ een open deel is van $\mathbb{R}^n$.

We beschouwen de afbeelding $f : U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ gegeven door $f(x) = \|x\|^{-2}x$.

(b) Toon aan dat f een diffeomorfisme is van U op zichzelf.

(c) Veronderstel dat $n = 2$ en bereken de Jacobiaan $\det Df(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^2$.

We zullen nu een methode aangeven om de Jacobiaan te berekenen voor algemene $n \geq 2$.

(d) Toon aan dat $\det Df(r, 0, \ldots, 0) = -r^{-2n}$ voor alle $r > 0$.

(e) Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een orthogonale lineaire afbeelding. Toon aan dat voor alle $x \in U$ geldt

$$A \circ Df(x) = Df(Ax) \circ A.$$

Hint: Beschouw $A \circ f$.

(f) Bepaal een formule die $\det Df(x)$ uitdrukt in de norm van $\|x\|$, voor $x \in U$. Hint: uit de lineaire algebra is bekend dat er voor ieder $x \in U$ een orthogonale afbeelding A bestaat met $Ae_1 = \|x\|^{-1}x$.

$\oslash$

Opgave 4.6 Zij A een symmetrische $n \times n$ matrix met reële coëfficiënten. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \langle Ax\,,\, x\rangle.$$

Zij $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$.

(a) Toon aan dat er een $a \in S$ bestaat zo dat $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in S$.

(b) Toon aan dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $Aa = \lambda a$. Hint: gebruik de methode van Lagrange met $g(x) = \|x\|^2 - 1$.

$\oslash$

Opgave 4.7 (vervolg van Opgave 4.6)

We beschouwen nu een aantal elementen $a_1, \ldots, a_k \in S$ zo dat $a_1, \ldots, a_k$ lineair onafhankelijk zijn. Zij V de lineaire deelruimte $a_1^\perp \cap \cdots \cap a_k^\perp$ van $\mathbb{R}^n$ en veronderstel dat $A(V) \subset V$.

(c) Toon aan dat er een $b \in S \cap V$ bestaat zo dat $f(x) \leq f(b)$ voor alle $x \in V$.

(d) Zij b als in (c). Toon aan dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $Ab = \lambda b$ Hint: gebruik de methode van Lagrange met geschikte functies $g, g_1, \ldots, g_k$ en gebruik dat $A(V) \subset V$.

(e) Bewijs dat er een orthonormaal stel vectoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ en reële constanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bestaan zo dat

$$Aa_j = \lambda_j a_j, \quad (1 \leq j \leq n).$$

$\oslash$

Opgave 4.8 We beschouwen de parabool $P \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door de vergelijking $x^2 - 4y = 0$.

(a) Toon aan dat voor iedere $t \in \mathbb{R}$ de functie $x \mapsto d_t(x) = \|x - (0,t)\|$ een minimum waarde $d((0,t),P)$ aanneemt op P.

(b) Gis hoe de functie $t \mapsto d((0,t),P)$ zich gedraagt op $\mathbb{R}$ en schets de verwachte grafiek.

(c) Bereken $d((0,t),P)$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$, door gebruik te maken van de methode van Lagrange. Vergelijk het verkregen antwoord met de gis in (b).

$\oslash$

Opgave 4.9 Gegeven zijn $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Toon aan dat de functie $f : x \mapsto \sum_{j=1}^{k} a_j x_j$ een maximale waarde en een minimale waarde aanneemt op de eenheidssfeer $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Bepaal die maximale en minimale waarde op twee manieren:

(a) door gebruik te maken van de methode van Lagrange;

(b) door gebruik te maken van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

$\oslash$

Opgave 4.10 We beschouwen het vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $\langle b\,,\,x\rangle = c$, met $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ en $c \in \mathbb{R}$. Bepaal het punt op V met minimale afstand tot een gegeven $a \in \mathbb{R}^3$. Controleer dit antwoord voor $c = 0$. $\oslash$

Opgave 4.11 Gegeven is een tweetal vlakken V en W in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijkingen $V : \langle a\,,\,x\rangle = p$ en $W : \langle b\,,\,x\rangle = q$, met $a, b \in \mathbb{R}^3$ lineair onafhankelijk en $p, q \in \mathbb{R}$. Bepaal het punt $x \in V \cap W$ met de kleinste afstand tot de oorsprong. $\oslash$

Opgave 4.12

(a) Bepaal het maximum van $(x_1 x_2 \cdots x_n)^2$ onder de voorwaarde dat $\|x\|^2 = 1$.

(b) Gebruik (a) om aan te tonen dat voor alle $a_1, \ldots, a_n > 0$ geldt:

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

$\oslash$

Opgave 4.13 Gegeven is het hypervlak $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = a\}$, waarin $a > 0$. We beschouwen het deel H_+ van H bestaande uit de punten $x \in H$ met $x_j \geq 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$ en het deel H_{++} van H bestaande uit de punten $x \in H$ met $x_j > 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$.

Gegeven is verder de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} x_j^k;$$

hierin is $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Doel van deze opgave is te bewijzen dat f op H_+ de minimale waarde $\mathbf{m}_n := n^{1-k} a^k$ aanneemt.

(a) Toon aan dat f op H_+ de waarde $\mathbf{m}_n$ aanneemt.

(b) Toon aan dat f op H_+ een minimale waarde μ_n aaneemt.

(c) Toon aan dat de waarde μ_n in H_{++} aangenomen wordt. Hint: gebruik inductie naar n.

(d) Gebruik de methode van Lagrange om aan te tonen dat

$$\mu_n = \mathbf{m}_n.$$

(e) Interpreteer de bewering (d) meetkundig voor $k = 2$.

$\oslash$

Opgave 4.14 (Schatting van Hadamard). We beschouwen de verzameling $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ van reële $n \times n$ matrices $x = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Voorzien van de componentsgewijze optelling en scalar vermenigvuldiging is $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ een lineaire ruimte van dimensie n^2. Door de componentposities te nummeren van 1 tot n^2 kunnen we deze ruimte identificeren met $\mathbb{R}^{n^2}$. Elke differentieerbare functie $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heeft nu een gradient $\operatorname{grad} f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Toon aan dat de functie $f : x \mapsto \det(x)$ differentieerbaar is, met als gradient

$$(\operatorname{grad} f(x))_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}(x), \qquad (1 \le i, j \le n).$$

Hierin is $D_{ij}(x)$ de determinant van de matrix die uit x ontstaat door schrappen van de i-de rij en de j-de kolom.

Dus

$$\operatorname{grad} f(x) = (x^{\mathrm{co}})^{\mathrm{T}},$$

waarbij co aangeeft dat de co-matrix en T dat de getransponeerde genomen wordt. Volgens de regel van Cramer is

$$x^{\mathrm{co}} x = \det(x) \cdot I.$$

In het vervolg noteren we voor $1 \le i \le n$ de i-de rij van een matrix x met $R_i(x) := (x_{i1}, \dots, x_{in})$.

(b) Laat zien dat de gradient van de functie $g_i : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto \|R_i(x)\|^2$ gegeven wordt door

$$(\operatorname{grad} g_i(x))_{jk} = 2\delta_{ij} x_{jk}, \qquad (1 \le j, k \le n).$$

Veronderstel dat $d_1, \dots, d_n > 0$ en definieer

$$S_i := \{x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|R_i(x)\|^2 = d_i^2\}, \qquad (1 \le i \le n).$$

(c) Laat zien dat de functie f op $S := S_1 \cap \cdots \cap S_n$ een maximum $M > 0$ aanneemt. Als $x \in S$ en $f(x) = M$, toon aan dat er $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestaan zo dat

$$x^{\mathrm{co}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} x^{\mathrm{T}}$$

(d) Als $x \in S$ en $f(x) = M$, toon aan dat

$$x^{\mathrm{T}} x = \begin{pmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^2 \end{pmatrix}$$

en concludeer dat $M = d_1 \cdots d_n$.

(e) Bewijs de volgende schatting van Hadamard, voor iedere $x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det x| \le \|R_1(x)\| \cdots \|R_n(x)\|.$$

$\oslash$

5 Lijnintegralen van vectorvelden

Opgave 5.1 Bereken de lijnintegralen $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ van de volgende vectorvelden en krommen in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$.

(a) $v(x,y,z) = (x, y, xy - z)$ en $\gamma(t) = t(1,2,4)$, $(0 \leq t \leq 1)$.

(b) $v(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en γ een stuksgewijze C^1-parametrisering van de rand van de rechthoek R bestaande uit de punten (x,y) met $0 \leq x \leq a$ en $0 \leq y \leq a$, positief (tegen de klokrichting in) doorlopen, waarbij $a > 0$.

(c) $v(x,y,z) = (y, z, x)$ en γ is een C^1-parametrisering van de doorsnede van de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en de cilinder $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2, z > 0$, waarbij $a > 0$. Als beginpunt $\gamma(0)$ wordt $(\frac{a}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{a}{2}\sqrt{2})$ genomen, terwijl $\gamma'(t) \neq 0$ voor alle t en $\gamma'(0)_2 > 0$.

⊘

Opgave 5.2 We beschouwen het vectorveld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $v(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, en de kromme $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin^2 t)$.

(a) Bepaal de lijnintegraal $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ door een directe berekening.

(b) Laat zien dat v rotatievrij is, en bepaal een potentiaal voor v op $\mathbb{R}^3$.

(c) Bereken de lijnintegraal $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ nogmaals, door gebruik te maken van (b).

⊘

Opgave 5.3 De lengte $L(\gamma)$ van een C^1-kromme $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(a) Zij $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ een monotone C^1-afbeelding. Toon aan dat de herparametrisering $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ een C^1-kromme is die voldoet aan

$$L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma).$$

(b) Toon aan dat er voor iedere continu vectorveld v gedefinieerd op $\gamma([a,b])$ een constante $M > 0$ bestaat zo dat $\|v(x)\| \leq M$ voor alle $x \in \gamma([a,b])$.

(c) Toon aan dat voor v en M als in (b) geldt:

$$\left| \int_\gamma v(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) M.$$

(d) Formuleer hoe het bovenstaande uitgebreid kan worden naar stuksgewijze C^1-krommen in $\mathbb{R}^n$, en bewijs de bijbehorende beweringen.

⊘

Opgave 5.4 Zij $\mathcal{O} =]0,\infty[\times \mathbb{R}$ en beschouw de poolcoordinaatafbeelding $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Eerder is met de inverse functiestelling bewezen dat voor iedere $(r_0, \varphi_0) \in \mathcal{O}$ een open omgeving $U \subset \mathcal{O}$ bestaat zo dat $\Phi(U)$ open is in $\mathbb{R}^2$ en Φ is een C^1-diffeomorfisme van U op $\Phi(U)$.

(a) Toon aan dat voor iedere $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ een open deel $U \subset \mathcal{O}$ bestaat zo dat $\Phi(U)$ een open omgeving van x^0 is en $\Phi : U \to \Phi(U)$ een diffeomorfisme.

We noteren de inverse van $\Phi|_U$ met Ψ en definiëren de de functie $\psi = \psi_U : \Phi(U) \to \mathbb{R}$ door $\psi(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2)_2$.

(a) Laat zien dat ψ een C^1-functie is op $\Phi(U)$ en dat $\Phi(\|x\|, \psi(x)) = x$ voor alle $x \in \Phi(U)$.

(b) Laat zien dat het vectorveld $\operatorname{grad} \psi$ op $\Phi(U)$ gelijk is aan v, waarbij het vectorveld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ gegeven wordt door

$$v(x) = \|x\|^{-2}(-x_2, x_1).$$

Hint: gebruik een formule voor $D\Psi(x)$.

Zij $R : [0,1] \to \,]0, \infty[$ en $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ een tweetal continue functies. Laat de continue kromme $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gedefinieerd zijn door

$$\gamma(t) = R(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)).$$

(c) Toon aan dat door $f(t) = \varphi(t)$ een potentiaal van v langs γ gedefinieerd wordt.

(d) Bepaal $\int_\gamma v(x) \cdot dx$.

$\oslash$

Opgave 5.5 Gegeven is een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ en een rotatievrij vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$. Gegeven is verder een continue kromme $\gamma : [a, b] \to U$. Toon aan dat door

$$f(\tau) := \int_{\gamma|_{[a,\tau]}} v(x) \cdot dx$$

een potentiaal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt van v langs γ. $\oslash$

Opgave 5.6 Gegeven is een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ met $f(0) = f(1) = 0$. Laat zien dat de krommen $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\gamma_0(t) = (t, 0) \quad \text{en} \quad \gamma_1(t) = (t, f(t))$$

homotoop zijn met behoud van eindpunten. $\oslash$

Opgave 5.7 Zij $c, d : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ een tweetal continue krommen met $c(0) = d(0)$ en $c(1) = d(1)$. Toon aan dat er een homotopie van c en d met behoud van eindpunten bestaat. $\oslash$

Opgave 5.8 Gegeven is een metrische ruimte (X, d) met een tweetal p en q. De verzameling continue krommen $c : [0,1] \to X$ met $c(0) = p$ en $c(1) = q$ noteren we met $\mathcal{K}$. We definiëren de relatie $\sim$ op $\mathcal{K}$ door $c \sim d$ indien c en d homotoop zijn met behoud van eindpunten.

(a) Toon aan dat $c \sim c$.

(b) Toon aan dat $c \sim d \Rightarrow d \sim c$.

(c) Zij $c \sim d$ en $d \sim e$. Toon aan dat er een continue afbeelding $H : [0,1] \times [0,2] \to X$ bestaat met
$$H(s,0) = c(s) \quad \text{en} \quad H(s,2) = e(s).$$

(d) Toon aan dat $\sim$ een equivalentierelatie op $\mathcal{K}$ is.

(e) Formuleer en bewijs soortgelijke beweringen voor gesloten krommen in X.

$\oslash$

Opgave 5.9

(a) Toon aan dat er een continue afbeelding $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestaat zo dat $f(0,x) = x$, en $f(1,x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Toon aan dat $\mathbb{R}^n$ enkelvoudig samenhangend is; dwz. iedere continue gesloten kromme in $\mathbb{R}^n$ is samentrekbaar.

$\oslash$

Opgave 5.10 Op $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ beschouwen we het vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door
$$v(x) = \|x\|^{-2}(-x_2, x_1).$$

(a) Laat zien dat v rotatievrij is.

(b) Zij $c_\pm : [0,\pi] \to U$ gedefinieerd door $c_\pm(t) = (\cos t, \pm \sin t)$. Bereken de integralen
$$\int_{c_+} v(x) \cdot dx \quad \text{en} \int_{c_-} v(x) \cdot dx.$$

(c) Bewijs dat c_+ en c_- in U niet homotoop zijn met behoud van eindpunten.

$\oslash$

Opgave 5.11 Het doel van deze opgave is aan te tonen dat $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ enkelvoudig samenhangend is voor $n \geq 3$. Zij daartoe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ een gesloten continue kromme.

(a) Toon aan dat er een $r > 0$ bestaat zo dat $\|\gamma(t)\| \geq r$ voor alle $t \in [0,1]$.

(b) Toon aan dat voor $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B(0;r)$ geldt
$$\|x - y\| < r \Rightarrow 0 \notin [x,y].$$

(c) Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $t_1, t_2 \in [0,1]$ geldt
$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow 0 \notin [\gamma(t_1), \gamma(t_2)].$$

Hint: gebruik een stelling over uniforme continuïteit uit Inleiding Analyse.

(d) Toon aan dat γ binnen U homotoop is met een gesloten stuksgewijs lineaire kromme $c : [0,1] \to U$. Dit laatste betekent dat er een verdeling $0 = t_0 < t_1 < \dots t_k = 1$ van $[0,1]$ bestaat zo dat voor elke $1 \le j \le k$ geldt:

$$c(t_{j-1} + \tau(t_j - t_{j-1})) = c(t_{j-1}) + \tau(c(t_j) - c(t_{j-1})), \quad (\tau \in [0,1]).$$

(e) Toon aan dat er voor iedere $1 \le j \le k$ een eenheidsvector n_j bestaat zo dat $n_j \perp c(t_{j-1})$ en $n_j \perp c(t_j)$.

(f) Toon aan dat er een $p \in \mathbb{R}^n$ bestaat met $\langle p\,,\, n_j\rangle \neq 0$ voor alle $1 \le j \le k$.

(g) Toon aan dat voor alle $\xi \in c([0,1])$ geldt dat $0 \notin [p, \xi]$.

(h) Toon aan dat c in U homotoop is met de constante kromme $t \mapsto p$.

(k) Toon aan dat U enkelvoudig samenhangend is.

$\oslash$

Opgave 5.12 Zij $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en zij Zij $f : U \to \mathbb{R}$ de unieke potentiaal van het vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ uit Voorbeeld 5.41, die voldoet aan $f(e_1) = 0$. Zij S de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^n$.

(a) Toon aan dat $f(re_1) = \frac{1}{r} - 1$, voor alle $r > 0$.

(b) Toon aan dat voor iedere orthogonale lineaire transformatie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en iedere C^1-kromme $\gamma : [0,1] \to U$ geldt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_{A \circ \gamma} v(x) \cdot dx.$$

(b) Toon aan dat voor ieder tweetal vectoren $y, z \in S$ met $y, z \perp e_1$ een orthogonale transformatie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestaat met $Ae_1 = e_1$ en $Ay = z$.

(c) Toon aan dat voor alle $y, z \in S \cap e_1^\perp$ geldt $f(y) = f(z)$.

(d) Toon aan dat voor alle $x \in S$ geldt dat $f(x) = 1$.

(e) Toon aan dat $f(x) = \|x\|^{-1} - 1$ voor $x \in U$.

(f) Toon op twee manieren aan dat door $g : x \mapsto \|x\|^{-1}, U \to \mathbb{R}$ een potentiaal van v gedefinieerd wordt: (1) door (e) te gebruiken, (2) door een directe berekening.

$\oslash$

6 Reeksen en oneigenlijke integralen

Opgave 6.1 Ga na of de volgende reeksen convergent of divergent zijn;

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$; (b) $\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n^4}$; (c) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; (e) $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n^3}$; (f) $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$.

$\oslash$

Opgave 6.2 Beschouw de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathbb{R}$ met $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$.

(a) Bewijs dat de reeks convergent is.

(b) Bewijs dat de reeks niet absoluut convergent is.

(c) Definieer een bijectie $k \mapsto n(k)$ van $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ op zichzelf, zo dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} a_{n(k)}$$

convergent is met som 0.

$\oslash$

Opgave 6.3

(a) Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks $\sum_{k\geq 1} \frac{\log k}{k^a}$ convergent is. Hint: gebruik het bekende feit dat $\lim_{k\to\infty} k^{-\epsilon} \log k = 0$ voor $\epsilon > 0$.

(b) Beantwoord dezelfde vraag voor de reeks $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^a \log k}$.

$\oslash$

Opgave 6.4 Voor welke reële waarden van x zijn de volgende reeksen convergent?

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$; (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}+\cos nx}{n^2+1}$; (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{x^2+n^2}$.

$\oslash$

Opgave 6.5 Laat met een resultaat uit het dictaat zien dat er een constante $C > 0$ en een rij (r_n) reële getallen bestaan zo dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + r_n, \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

(a) Toon aan dat

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 + r_{2n} - r_n.$$

(b) Toon dat $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ convergent is en dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2.$$

$\oslash$

Opgave 6.6 Toon aan dat de reeks

$$\sum_{n\geq 2} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

convergent is. Hint: majoreer door Taylor met rest te gebruiken. $\oslash$

Opgave 6.7 Gegeven zijn complexe rijen $(a_k)_{k\geq 0}$ en $(b_k)_{k\geq 0}$. We definiëren

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad (n \geq 0).$$

(a) Toon aan dat voor alle $n \geq 0$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

Hint: schrijf $b_k = B_k - B_{k-1}$, voor $k \geq 1$.

In het vervolg veronderstellen we dat (a_k) een monotoon dalende rij positieve reële getallen is met $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Verder veronderstellen we dat een $M > 0$ bestaat zo dat $|B_n| \leq M$ voor alle $n \geq 0$.

(b) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})B_k$ convergent is en dat

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+1})B_k\right| \leq a_0 M.$$

(c) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ convergent is en dat

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k\right| \leq 2a_0 M.$$

(d) Toon aan dat de reeks

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

convergent is voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \leq 1$, $z \neq 1$. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de reeks divergent kan zijn voor $z = 1$.

$\oslash$

Opgave 6.8 Gegeven is een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 f(t)\, t^x (1-t)^y \; dt$$

convergent is voor $x, y > -1$, en op dat gebied een continue functie van (x, y) definieert. $\oslash$

Opgave 6.9 Gegeven is een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 1$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} \; dt$$

divergeert. $\oslash$

Opgave 6.10 Toon aan de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} \; dt$$

convergeert. $\oslash$

Opgave 6.11

(a) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} \; dx$$

convergeert.

(b) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \; dt$$

convergeert. Hint: dit lukt niet met het majorantie-criterium. Beschouw de integraal $\int_1^\beta \frac{\sin t}{t}\; dt$ en gebruik partiële integratie om de integraal te vergelijken met de integraal in (a).

$\oslash$

Opgave 6.12 We bekijken nogmaals de volgende oneigenlijke integraal uit Opgave 2.6:

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + t} \; dx, \qquad (t > 0).$$

Gebruik in de volgende onderdelen direct de behandelde stellingen over oneigenlijke integratie.

(a) Laat zien dat de integraal convergeert voor iedere $t > 0$.

(b) Bewijs dat de functie F continu differentieerbaar is, met afgeleide

$$F'(t) = -\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + t)^2} \; dx.$$

(c) Toon aan dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^{k+1}} \; dx = \frac{(2k)!\pi}{2^{2k+1}(k!)^2}.$$

$\oslash$

Opgave 6.13

(a) Laat zien dat door

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\ dt$$

een continu differentieerbare functie gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat $xf(x) = -2f'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Toon aan dat

$$f(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4},$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hint: differentieer de functie $g(x) = f(x)e^{x^2/4}$.

$\oslash$

Opgave 6.14 In deze opgave zullen we laten zien dat de integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$$

niet absoluut convergent is. We doen dit door middel van een tegenspraak. Veronderstel dus dat de integraal wel absoluut convergent is.

(a) Toon aan dat uit de aanname volgt dat de integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x}\ dx$$

convergent is.

(b) Toon aan dat voor alle $R > 1$ geldt dat

$$\int_1^{R} \frac{(\sin x)^2}{x}\ dx \geq \int_{1+\pi/2}^{R+\pi/2} \frac{(\cos x)^2}{x}\ dx.$$

(c) Toon aan dat uit de aanname ook volgt dat de integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{(\cos x)^2}{x}\ dx$$

convergeert.

(d) Laat zien dat (a) en (c) tot een tegenspraak leiden.

$\oslash$