Inleiding Analyse in Meer Variabelen Proeftentamen 29/10 - 2020, 3 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**. Later zullen we beschrijven hoe het tentamen gescand dient te worden, en ingediend in blackboard.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 50. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/5$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** Gegeven is een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. De functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiëren we door

$$g(x) := \langle f(x)\, ,\, L(x) \rangle.$$

Toon vanuit de definitie van totale differentieerbaarheid aan: als f totaal differentierbaar is in a, dan is g dat ook, terwijl de totale afgeleide $Dg(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$Dg(a)(h) = \langle Df(a)(h)\, ,\, L(a) \rangle + \langle f(a)\, ,\, L(h) \rangle, \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2**

5 pt (a) Toon aan dat door

$$f(x) = \int_0^{2020} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^3}\, dt$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

5 pt (b) Toon aan dat f continu differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $|f'(x)| \leq 1$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de hyperbool

$$H := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_1 > 0\}.$$

Je mag gebruiken dat H een gesloten deel van $\mathbb{R}^2$ is. Zij $t \in \mathbb{R}$ en zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x_1^2 + (x_2 - t)^2.$$

3 pt (a) Toon aan dat de verzameling $A := \{x \in H \mid f(x) \leq f(1, 0)\}$ een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^2$ is.

3 pt (b) Bewijs dat f op H een minimale waarde m aanneemt in een punt $a \in H$. Toon aan dat voor elk zodanig punt a moet gelden dat $a \in A$.

4 pt (c) Toon aan dat er precies één punt $a \in H$ is met $f(a) = m$ en bepaal m.

10 pt totaal **Opgave 4** We beschouwen het vectorveld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$v(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{\|x\|^2}, \quad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

3 pt (a) Bepaal de lijnintegraal $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ als $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd is door $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

3 pt (b) Laat zien dat v rotatievrij is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4 pt (c) Toon aan dat v geen primitieve $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ heeft.

10 pt totaal **Opgave 5** De volgende onderdelen staan los van elkaar.

3 pt (a) Bepaal of de reeks $\sum_{n\geq 1}(\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ convergeert of divergeert, en bewijs de juistheid van je bewering.

4 pt (b) Gegeven is een rij complexe getallen c_k met

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = L, \quad (L \in]0, \infty[\,).$$

Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1/L$ en divergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| > 1/L$.

3 pt (c) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k\sqrt{k}}$ convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$.