Extra Opgaven

Analyse B-1

E.P. van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Voorjaar 1994

Extra opgaven Analyse B-1

Voorjaar 1994

Inleiding: Bij het college Analyse B-1 zullen opgaven uit het Analyse B diktaat opgegeven worden, alsmede extra opgaven uit de voor u liggende bundel. De opgaven uit het diktaat worden als volgt genoteerd: Opgave 7.29 betekent: opgave 29 bij hoofdstuk 7. Extra opgaven uit de huidige bundel worden genoteerd als E_1-1, E_1-2, enz.

De opgaven worden opgegeven met een A- of een B-typering. *A-opgaven* kunt u naar verwachting zonder problemen maken. Wij raden u aan deze opgaven thuis te maken voordat u het practicum bezoekt. *B-opgaven* zijn van een wat lastiger type: deze dient u bij de practicumleider in te leveren.

Opgave E_1**-1** Bepaal de volgende partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\log(1+x^2y^2), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y^2}\cos(xy^2)-x^3\right).$$

Bepaal voor $f(x,y)=\log(1+x^2y^2)$ de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Opgave E_1**-2** Onder een vectorveld op een open deel $U \subset \mathbf{R}^n$ verstaan we een afbeelding $v : U \to \mathbf{R}^n$. De naam vectorveld is afkomstig van het feit dat aan ieder punt van $x \in U$ een vector $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ toegevoegd wordt. In toepassingen stelt men zich vaak voor dat de vector $v(x)$ *aangrijpt* in het punt x : aldus wordt een 'veld' van vectoren op U gedefinieerd (denk bijvoorbeeld aan krachtvelden in de natuurkunde). Het vectorveld v heet C^k als iedere component v_j tot $C^k(U)$ behoort. Is $f \in C^2(U)$, dan is grad f een C^1–vectorveld op U.

(a) Toon aan: als het C^1–vectorveld $v : U \to \mathbf{R}^n$ de gradient van een C^2–funktie is, dan moet gelden:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad (1 \le i,j \le n).$$

Zij nu $n = 3$. Voor een C^1-vectorveld v op U definiëren we de rotatie van v als het vectorveld $\operatorname{rot} v$ gegeven door

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

(in de Engelstalige literatuur gebruikt men de notatie curl f i.p.v. rot f). Voorts wordt de divergentie van v gedefinieerd als de funktie $\operatorname{div} v : U \to \mathbf{R}$ gegeven door:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

(b) Laat zien dat voor $f \in C^2(U)$ geldt: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$.

(c) Laat zien dat voor elk C^2–vectorveld v op U geldt: $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$.

Men kan de definities van grad , rot en div onthouden door gebruik te maken van de formele notaties:

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$$

(spreek uit: nabla) en:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{rot} v = \nabla \times v, \quad \operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle.$$

De hierboven gedefinieerde differentiaaloperatoren spelen een belangrijke rol in de Maxwell theorie. Ze zijn verbonden door de belangrijke integraalstellingen van Gauss, Green en Stokes, die in Analyse C (of Infi B) worden bestudeerd.

Opgave E_1**-3** Gegeven is een veelterm $p(x,y)$ in twee variabelen, en een twee keer differentieerbare funktie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Toon aan dat

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(p(x,y)) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(p(x,y)).$$

Waarschuwing: we hebben niet verondersteld dat de tweede orde afgeleide f'' van f continu is.

Opgave E_1**-4** We gaan de functie $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbf{R}$, gegeven door $f(x,y) = x^2 + y$, op verschillende manieren illustreren.

(a) Teken een aantal *niveaulijnen* van f.

(b) Bepaal $\operatorname{grad} f$, en maak een schets van dit vectorveld.

(c) We kunnen ook *doorsneden* van vlakken met de grafiek van f tekenen. Dat doen we door één van de variabelen vast te houden; dat levert een functie van één variabele op.

Schets onder elkaar de grafieken van $x \mapsto f(x,0)$, $x \mapsto f(x,\frac{1}{2})$ en $x \mapsto f(x,1)$.

Maak ook enkele doorsneden evenwijdig aan de y-as.

(d) Maak een schets van de *driedimensionale grafiek* van f.

Opgave E_1**-5** Zij $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$. Beantwoord de vragen uit de vorige opgave voor de funktie $g : U \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door: $g(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Opgave E_1**-6** We definiëren de funktie $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ door $\varphi(x,y) = xy$. Laten $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differentieerbare funkties zijn. Gebruik Stelling 12.3 uit het WBA om

$$\frac{d}{dt}\varphi(f(t), g(t))$$

uit te drukken in f, g en hun afgeleiden f', g'. Kunt u het gevonden resultaat ook op een andere manier begrijpen? Formuleer en bewijs een produktregel voor differentiatie van een produkt van n funkties $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Opgave E_1**-7** (Zie ook WBA, opg 12.5) Laat $f \in C^1(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ zijn en $m \in \mathbf{R}$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(a) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.
(b) $f(tx) = t^m f(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ en $t > 0$.

Hint: Onderzoek de afgeleide naar t van de funktie:

$$t^{-m} f(tx) = t^{-m} f(tx_1, \ldots, tx_n).$$

De funktie heet *positief homogeen van de graad* m als zij aan (b) voldoet. De vergelijking in (a) heet de *differentiaalvergelijking van Euler.* Bewijs in het geval $n = 1$, dat f op een constante factor na is vastgelegd door (a). Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat dit niet meer het geval is, zodra $n > 1$.

Opgave E_1**-8** (zie ook WBA Opgave 12.2) Beschouw de veeltermfunktie

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$$

van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$, en bepaal de kritieke punten. Onderzoek of f zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak

$$V_+ = \{(x, y) \mid x \geq 0\},$$

respectievelijk op het linker halfvlak

$$V_- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}.$$

Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x, y)$ vervangen door $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - xy^2$.

Opgave E_1**-9** (zie ook WBA, opg. 12.6). Zij

$$r = r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

de afstand van het punt (x, y) in het vlak tot de oorsprong en zij

$$f(x, y) = \varphi(r(x, y))$$

een reëelwaardige funktie op $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, waarin $\varphi :]0, \infty[\to \mathbf{R}$ een nader te bepalen tweemaal differentieerbare funktie is. Bepaal de funkties φ, waarvoor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

op $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Hint: herken een Euler differentiaalvergelijking voor de funktie $\psi(r) = \varphi'(r)$.

Opgave E_1**-10** We beschouwen de funktie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2$.

(a) Schets de niveauverzameling N van f voor het niveau 6.
(b) Bepaal grad $f(1, 1, 1)$.
(c) Aan de in (a) gemaakte schets zien we dat N in $(1, 1, 1)$ een raakvlak behoort te hebben. Gebruik onderdeel (b) om een vergelijking voor dit raakvlak op te stellen.

Opgave E$_1$**-11** Schets elk van de volgende verzamelingen $V \subset \mathbf{R}^2$, en bepaal tevens het inwendige V^{inw}, de afsluiting $\overline{V}$ en de rand $\overline{V} \setminus V^{\text{inw}}$. Zeg tevens of de verzameling open of gesloten (of geen van beiden) is. U mag volstaan met het geven van antwoorden zonder motivatie.

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| < 1\}$,
(b) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| \leq 1\}$,
(c) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| \leq 1,\ y > 0\}$,
(d) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ xy \leq 1\}$,
(e) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ |x| < 1,\ |y| < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$,
(f) $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ xy = 1,\ y > 0\}$.

Opgave E$_1$**-12** Bewijs de juistheid van de in de vorige opgave in de onderdelen (a) en (b) gedane beweringen.

Opgave E$_1$**-13**

(a) Toon aan dat de funktie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x_j$ (de j–de coordinaats-funktie) continu is.
(b) Toon aan, door het vorige onderdeel en de rekenregels B.6.3.5 op blz. 141 te gebruiken, dat de volgende funkties $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continu zijn (zie ook Opmerking B.6.5.7):

$$f(x, y) = x + y^2 \cos(xy + 1), \qquad g(x, y) = \frac{\log(1 + x^2y^2) + \cos x}{x^4 + y^2 + 2}.$$

Opgave E_1**-14** Bepaal de poolcoördinaten van $1-i$, $\quad 527$, $\quad -527$, $\quad \sqrt{3}-i$, $\quad 3i+4$.

Opgave E_1**-15** Bepaal reëel en imaginair deel van $e^{\pi i}$, $\quad e^{2\pi i}$, $\quad e^{-\pi i/4}$, $\quad e^{1993\pi i}$, $\quad e^{i}$.

Opgave E_1**-16** Gegeven is een continue funktie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ met

$$\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = 0.$$

Toon aan dat de funktie f begrensd is, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zo dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathbf{C}$.

Opgave E_1**-17** We bekijken de functie $r : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$ gegeven door $r(z) = (\frac{\bar{z}}{z})^2$.

(a) Laat zien dat $\lim\limits_{z\to 0,\, z\in\mathbf{R}} r(z) = 1$.

(b) Onderzoek $\lim\limits_{z\to 0,\, z\in i\mathbf{R}} r(z)$.

(c) Onderzoek $\lim\limits_{z\to 0} r(z)$.

Opgave E_1**-18** Bepaal $\log i$, $\log(1+i)$, $\log(1-i\sqrt{3})$, $\log(-5)$, $\log e^{-2\pi i/3}$ en $\log e^{-4\pi i/3}$.

Opgave E_1**-19**

(a) Schets de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{C}$:

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 2\}, \quad \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 2\}, \quad \{i+7\}$$
$$?, \quad \mathbf{R}, \quad \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \left\{1 + \tfrac{i}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\right\}.$$

(b) Welke van deze verzamelingen zijn open deelverzamelingen van $\mathbf{C}$? En welke gesloten deelverzamelingen?

(c) Welke van deze deelverzamelingen van $\mathbf{C}$ hebben inwendige punten? Geef één inwendig punt aan in elke verzameling waarvoor dat kan.

Opgave E_1**-20**

(a) Geef een continue functie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ zo dat de beeldverzameling $f(\mathbf{C})$ gesloten en begrensd is.

(b) Geef een continue functie $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ zo dat de beeldverzameling $g(\mathbf{C})$ gesloten, maar niet begrensd is.

(c) Probeer ook een continue functie $h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ te vinden zo dat de beeldverzameling $h(\mathbf{C})$ begrensd, maar niet gesloten is.

(d) Geef een functie $k : \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\} \to \mathbf{C}$ zo dat de beeldverzameling $k(\mathbf{C})$ niet begrensd is.

Opgave E$_1$**-21** Doel van deze opgave is het volgende te bewijzen: *Voor elk tweetal reële getallen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ geldt:*

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leq |\beta - \alpha|.$$

(a) Maak eerst een plaatje waaruit de meetkundige betekenis van de bovenstaande bewering blijkt.

(b) Bewijs de schatting door integratie van de funktie $t \mapsto e^{it}$.

Opgave E$_1$**-22** Uit Analyse A is bekend dat een differentieerbare funktie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met afgeleide $g' = 0$ constant is. Doel van deze opgave is het analogon van deze stelling te bewijzen voor funkties $\mathbf{C}$ æ $\mathbf{C}$.

Gegeven zijn $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ zijn met $a < b$ en $c < d$. Beschouw de open deelverzameling $V =]a, b[\times]c, d[$ van $\mathbf{C}$ (hier gebruiken we de identificatie $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$). Laat $f : V \to \mathbf{C}$ een complex differentieerbare funktie zijn met complexe afgeleide $f'(z) = 0$ voor alle $z \in V$.

(a) Toon aan dat voor iedere $\alpha \in V$ geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) = 0.$$

Hint: gebruik de definities.

(b) Toon aan dat f constant is op V.

Gebruik het bovenstaande om de volgende stelling te bewijzen voor $r > 0$:

(c) *Is $F : B(0; r) \to \mathbf{C}$ een complex differentieerbare funktie met $F' = 0$ op $B(0; r)$, dan is $F(z) = F(0)$ voor alle $z \in B(0; r)$.*

Opgave E$_1$**-23** We gaan de vergelijking $\sin z = 2$ oplossen.

(a) Geef alle complexe getallen w waarvoor $w^2 + 4iw - 1 = 0$.

Aanwijzing: Waaraan moet w+2i voldoen?

(b) Geef alle complexe getallen z die voldoen aan $e^{iz} = -i(\sqrt{3} + 2)$.

(c) Bekijk de definitie van de complexe sinusfunctie. Wat heeft de vergelijking $w^2+4iw-1 = 0$ met de vergelijking $\sin z = 2$ te maken?

(d) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $\sin z = 2$.

Opgave E$_1$**-24**

(a) Schrijf $1 + i$ in poolcoördinaten.

(b) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(1 + i)^{86}$.

(c) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(i - \sqrt{3})^{19}$.

(d) Geef alle $z \in \mathbf{C}$ die voldoen aan $z^3 = i$.

(e) Geef ook alle $z \in \mathbf{C}$ die voldoen aan $z^7 = 128$.

(f) Schets de oplossingsverzamelingen van de vergelijkingen in d) en e).

Opgave E$_1$-**25** Probeer voor elk van de volgende rijen zoveel mogelijk te zeggen over de verzameling van limietpunten.

$$\left(e^{\pi i n/3}\right)_{n\geq 1}, \quad \left((1+i)^n\right)_{n\geq 1}, \quad \left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right)_{n\geq 1}, \quad \left(e^{in}\right)_{n\geq 1}.$$

Opgave E$_1$-**26** Gegeven is een interval $I \subset \mathbf{R}$, en een tweetal funkties $f, g : I \to \mathbf{C}$.

(a) Toon aan: als f en g differentieerbaar zijn in $a \in I$, dan is $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ dat ook, en er geldt:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(b) Toon aan: als f en g continu differentieerbaar zijn op $[a, b] \subset I$, dan geldt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Opgave E$_1$-**27** Laat een tweetal funkties f : $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}$ en g : $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{C}$ gegeven zijn, en veronderstel dat $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en $f(a) \in \mathrm{Dom}(g)$. Dan geldt: als f differentieerbaar is in a, en g in $f(a)$, dan is de samenstelling $g \circ f$ differentieerbaar in a en:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Opgave E$_1$-**28** Bereken de integraal:

$$\int_0^\pi e^{it}(t+i)^2\,dt.$$

Opgave E_1**-29**

(a) Gegeven zijn twee $n+1$ keer differentieerbare funkties $f, g : I \to \mathbf{C}$, met $I \subset \mathbf{R}$ een interval. Als gegeven is dat de formule van Leibniz voor $(fg)^{(n)}$ op I geldt, bewijs dan dat op I tevens geldt:

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \tbinom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

(b) Bewijs de formule van Leibniz door gebruik te maken van volledige induktie.

Opgave E_1**-30** Gebruik de resultaten in Stelling B.1.9.3 om voor de volgende functies de Taylorreeks in het aangegeven steunpunt op te stellen. Beredeneer op welk gebied de Taylorreeks naar de functie convergeert.

$$\begin{array}{ll} x \mapsto \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{steunpunt } 0 \\ x \mapsto \sqrt{x} & \text{steunpunt } 4 \\ x \mapsto (\sin x)/x \text{ als } x \neq 0, \quad 1 \text{ als } x = 0 & \text{steunpunt } 0 \end{array}$$

Opgave E_1**-31** Bepaal de volgende limieten met behulp van de formule van Taylor.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

Opgave E_1**-32** Bewijs zorgvuldig uitgaande van de definitie van $\mathcal{O}$:

$$\begin{array}{ll} x^2 + x = \mathcal{O}(x^2) & (x \to \infty) \\ x^2 + x = \mathcal{O}(x) & (x \to 0) \\ x^2 + x = \mathcal{O}(1) & (x \to 9) \end{array}$$

Opgave E_1**-33** Waar of onwaar? Geef argumenten.

$$\begin{array}{rl} x = o(\sqrt{x}) & (x \to \infty) \\ x = o(\sqrt{x}) & (x \downarrow 0) \\ x \log x = o(x) & (x \downarrow 0) \\ x \log x = o(x \log x) & (x \downarrow 0) \end{array}$$

Opgave E_1**-34** Bepaal de volgende limieten.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) \qquad \lim_{n \to \infty} n \log\left(1 + \frac{5}{n}\right) \qquad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$$

Opgave E_1**-35** Onderzoek de volgende reeksen op convergentie.

$$\sum_{n \geq 0} (1+i)^n, \quad \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{i + n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in^2}}{n^2}.$$

Welke van deze reeksen zijn absoluut convergent? Van welke kunt u de som bepalen?

Opgave E$_1$**-36** We bekijken de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ voor $s \in \mathbf{C}$. De door deze reeks gedefinieerde functie heet de *zetafunctie van Riemann.*

(a) Geef een niet-lege open deelverzameling $A \subset \mathbf{C}$ zo dat de reeks absoluut convergeert voor elke $s \in A$.

(b) Geef een niet-lege open deelverzameling $N \subset \mathbf{C}$ zo dat de reeks divergeert voor elke $s \in N$.

Opgave E$_1$**-37** Voor een benadering van $n!$ voor grote $n \in \mathbf{N}$ kan men de *formule van Stirling* gebruiken:

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

Deze formule bewijzen we hier niet; we beperken ons ertoe te laten zien dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ bestaat.

(a) Veronderstel dat we van een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ weten dat $a_n - a_{n+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ voor $n \to \infty$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

(b) Pas dit toe op de logaritmen van $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

(c) Wat valt er op grond van b) over $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ te zeggen? Wat geeft de formule van Stirling als waarde van deze limiet?

Opgave E$_1$**-38** Doel van deze opgave is de stelling van Leibniz (3.15.5) te bewijzen zonder partiële sommatie te gebruiken.
Gegeven is een reeks $(a_n)_{n\geq 1}$, waarvoor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \geq 1$. We gaan laten zien dat $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ convergeert.

(a) Geef de n-de partiële som aan met s_n. Laat zien dat $(s_{2n})_{n\geq 1}$ een monotoon dalende rij is, en $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ een monotoon stijgende rij.

(b) Laat zien dat de limieten $S_e = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ en $S_o = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ beide bestaan.

(c) Laat zien dat $S_o = S_e$.

(d) Laat zien dat $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ convergeert.

Opgave E$_1$**-39** We onderzoeken de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Waarom is deze reeks convergent?

(1) Blader terug naar de Taylorreeksen, en geef de som van bovenstaande reeks.

(2) Noem $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}/k$ en $t_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

   (a) Waarom bestaat $\lim_{n\to\infty} s_n$?
   (b) Druk s_{2n} uit in t_{2n} en t_n.
   (c) In 3.14.5 is t_n vergeleken met $\log n$. Gebruik dit om te bewijzen dat

   $$\lim_{n\to\infty} (s_{2n} - \log(2n) + \log n) = 0.$$

   (d) Bepaal $\lim_{n\to\infty} s_n$, en vergelijk de limietwaarde met de in i) gevonden waarde.

Opgave E_1**-40** Bepaal de convergentiecirkel van de machtreeks

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(z-i)^n}{\sqrt{n}}.$$

Geef een punt op de convergentiecirkel waar de reeks convergent is, en ook een punt waar divergentie optreedt.

Opgave E_1**-41** We bekijken de functie $\mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$.

(a) Wat is de convergentiecirkel van $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$? Ga na dat deze machtreeks rond 1 binnen de convergentiecirkel de functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ voorstelt.

(b) Geef de machtreeks in $z-5$ die op een cirkelschijf rond 5 de functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ voorstelt. Wat is de straal van deze cirkelschijf?

(c) Stel $z \mapsto \frac{1}{z}$ ook door een machtreeks voor rond de punten i, $-2+i$ en $-2-i$.

(d) Teken de convergentiecirkels van deze vijf machtreeksen.

Opgave E_1**-42** De machtreeks rond 0 van $z \mapsto \log(1+z)$ is in 5.9.5 opgesteld uitgaande van de reële Taylorreeks rond 1, en door vergelijking met de machtreeks van de complexe afgeleide.

(a) Herschrijf dit resultaat als de machtreeks rond 1 van de complexe logaritme.

(b) Stel de machtreeks van de complexe logaritme op rond de punten i, $-2+i$ en $-2-i$.

(c) Bekijk het gebied waar de convergentiegebieden met middelpunten i en $-2+i$ overlappen. Stellen de machtreeksen rond i en $-2+i$ op deze doorsnede dezelfde functie voor?

(d) Bekijk ook het gebied waar de machtreeksen rond $-2+i$ en $-2-i$ beide convergeren. Stellen deze machtreeksen hier ook dezelfde functie voor?