Aantekeningen over tensoren

E.P. van den Ban

Najaar 2000

Contents

1 Lineaire ruimten en hun duale

In dit hoofdstuk veronderstellen we dat k een lichaam is. Voor de toepassingen zullen we alleen $k = \mathbb{R}$ en $k = \mathbb{C}$ nodig hebben.

Is E een lineaire ruimte over k, dan noteren we met E^* de ruimte van lineaire afbeeldingen $E \to k$. De lineaire ruimte E^* heet de **lineaire duale** van E.

Laat F een tweede lineaire ruimte over k zijn, dan schrijven we $\mathrm{Hom}(E, F)$ voor de ruimte van lineaire afbeeldingen $A : E \to F$. Zij $A \in \mathrm{Hom}(E, F)$, dan induceert A de afbeelding $A^* : F^* \to E^*$, gedefinieerd door

$$A^*\eta = \eta \circ A \qquad (\eta \in F^*).$$

Deze afbeelding is weer lineair en behoort dus tot $\mathrm{Hom}(F^*, E^*)$. Hij heet de getransponeerde van A. Merk op dat de getransponeerde van de identiteit

$I_E : E \to E,\ x \mapsto x$ gegeven wordt door

$$(I_E)^* = I_{E^*}. \tag{1}$$

Is $B : F \to G$ een tweede lineaire afbeelding, dan is

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*. \tag{2}$$

Opmerking 1.1 Wegens de eigenschappen (1) en (2) heet de toevoeging $E \rightsquigarrow E^*$ wel een functor. De functor $E \rightsquigarrow E^*$ heet contravariant, omdat hij afbeeldingspijlen omkeert: aan een homomorfisme $A : E \to F$ wordt een homomorfisme $A^* : E^* \leftarrow F^*$ toegevoegd. De (triviale) functor $E \rightsquigarrow E$, die aan een lineaire ruimte E zichzelf toevoegt, behoudt de richting van pijlen en heet daarom covariant. Verderop zullen we de covariante functor $E \rightsquigarrow E^{**}$ die aan een ruimte zijn dubbelduale toevoegt bestuderen. Voor de precieze definitie van een functor verwijzen we naar de paragraaf over categoriëntheorie in [Lang1, Ch. I, §7][1].

Is $A : E \to F$ een lineair isomorfisme, dan volgt uit de functoriële eigenschappen dat $(A^{-1})^* \circ A^* = [A \circ A^{-1}]^* = I_{F^*}$, terwijl $A^* \circ (A^{-1})^* = [A^{-1} \circ A]^* = I_{E^*}$, dus $A^* : F^* \to E^*$ is ook een lineair isomorfisme en de inverse wordt gegeven door:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

We veronderstellen nu dat E eindig dimensionaal is. Zij $d = \dim E$ en zij $e_1, \ldots, e_d$ een basis van E. We definiëren de lineaire functionalen $e^1, \ldots, e^d \in E^*$ door

$$e^i(e_j) = \delta^i_j. \tag{3}$$

Hierin is δ^i_j het Kronecker symbool: het is gelijk aan 1 als $i = j$, en gelijk aan 0 als $i \neq j$.

Lemma 1.2 *Is E eindig dimensionaal, en is $e_1, \ldots, e_d$ een basis van E, dan is $e^1, \ldots, e^d$ een basis van E^*. In het bijzonder heeft de ruimte E^* dezelfde dimensie als E.*

Bewijs. De collectie $e^1, \ldots, e^d$ is lineair onafhankelijk. Immers is $\sum_{i=1}^d \lambda_i e^i = 0$, dan volgt uit evalueren op e_j dat $\lambda_j = 0$, voor alle $1 \leq j \leq n$.

[1] S. Lang; Algebra, Addison-Wesley, 1965

De collectie $e^1, \ldots, e^d$ spant E^* op. Immers is $\xi \in E^*$, dan is

$$\xi = \sum_{i=1}^{d} \xi(e_i)\, e^i.$$

Men ziet dit gemakkelijk in door beide leden in elk der basisvectoren e_j te evalueren. We concluderen dat de collectie $e^1, \ldots, e^d$ een basis van E^* is. Hieruit blijkt dat $\dim(E^*) = d = \dim E$. $\square$

De in het bovenstaande gedefinieerde basis $e^1, \ldots, e^d$ van E^* staat bekend als de basis van E^* die **duaal** is aan de basis $e_1, \ldots, e_d$ van E.

Opmerking 1.3 Is $\xi \in E$, dan noteren we met $\operatorname{mat}\xi$ de matrix van ξ ten opzichte van de basis $\{e_i\}$ van E. Merk op dat deze matrix een rijvector met lengte d is. Merk op dat e^i het element van E^* is met matrix $(\delta_1^i, \ldots, \delta_d^i)$.

In het vervolg hanteren we de conventie dat $\mathbb{R}^d$ bestaat uit kolomvectoren. De reden hiervoor is dat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ gegeven wordt door de matrixvermenigvuldiging met $\operatorname{mat} A$, de matrix van A ten aanzien van de standaardbases. Met andere woorden $Ax = \operatorname{mat} A \cdot x$ voor alle $x \in \mathbb{R}^d$. Op deze wijze identificeren we $L(R^d, R^p)$ met de $p \times d$ matrices met reële coëfficiënten. In het bijzonder identificeren we $(\mathbb{R}^d)^*$ met de $1 \times d$ matrices, d.w.z. met de rijvectoren met lengte d.

Opmerking 1.4 Is de lineaire ruimte E reëel en voorzien van een positief definiet inprodukt $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$, dan kunnen we een afbeelding $\mathbf{i} : E \to E^*$ definiëren door $\mathbf{i}\,(v)(w) = \langle v\,,\, w \rangle$, voor $v, w \in E$. Men ziet direkt dat $\mathbf{i}$ lineair is en een triviale kern heeft; de afbeelding is derhalve een lineair isomorfisme. Men gaat gemakkelijk na dat een basis $\{e_j\}$ orthonormaal is ten aanzien van het gegeven inprodukt dan en slechts dan als $\{\mathbf{i}\,(e_j)\}$ de duale basis van E^* is. Vaak identificeert men de ruimte E met zijn duale E^* door middel van de afbeelding $\mathbf{i}$; men dient zich daarbij te realizeren dat de identificatie afhankelijk is van de keuze van het inprodukt.

Opmerking 1.5 In de analyse treden rijvectoren en kolomvectoren bijvoorbeeld als volgt op. Is $c : I \to \mathbb{R}^n$ een differentieerbare kromme, dan is, voor iedere $t \in I$, de snelheidsvector $c'(t)$ een kolomvector in $\mathbb{R}^n$. Is een scalaire funktie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in het punt a, dan is de afgeleide $df(a) = Df(a)$ een element van $(R^n)^*$, dus een rijmatrix.

Laat $\mathrm{grad}\, f(a)$ de unieke vector in $\mathbb{R}^n$ zijn met $\mathbf{i}\,(\mathrm{grad}\, f(a)) = Df(a)$; hierin is $\mathbf{i}$ als in de voorgaande opmerking gedefinieerd ten aanzien van het standaardinprodukt. Dan is $\mathrm{grad}\, f(a)$ de kolomvector in $\mathbb{R}^n$ met componenten $\partial_i f(a)$, $1 \le i \le n$. Om typografische redenen noteren we de gradient toch vaak als rijvector. Strikt genomen zou het beter zijn om de notatie $(v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ voor de kolomvector met componenten $v_1, \ldots, v_n$ te gebruiken; hierbij staat T voor transpositie.

Door een tweede keer te dualiseren verkrijgen we de dubbelduale $E^{**} := (E^*)^*$ van de lineaire ruimte E. Er is een natuurlijke lineaire afbeelding $\iota : E \to E^{**}$; is $x \in E$, dan wordt $\iota(x)$ gegeven door

$$\iota(x)(\xi) = \xi(x) \qquad (\xi \in E^*).$$

Is $\iota(x) = 0$, dan is $\xi(x) = 0$ voor alle $\xi \in E^*$, waaruit we afleiden dat $x = 0$. Hieruit volgt dat ι een injectieve lineaire afbeelding is. We noemen ι wel de kanonieke inbedding van E in de dubbelduale E^{**}.

Lemma 1.6 *Zij E een eindig dimensionale lineaire ruimte over het lichaam k. Dan is de canonieke inbedding $\iota : E \to E^{**}$ een lineair isomorfisme.*

Bewijs. De lineaire afbeelding ι is injectief. Aangezien $\dim(E^{**}) = \dim E^* = \dim E$, is ι tevens surjectief. □

In het vervolg zullen we de dubbelduale E^{**} van een eindig dimensionale lineaire ruimte E via het isomorfisme ι identificeren met E.

Veronderstel dat E eindig dimensionaal is met basis $e_1, \ldots, e_d$. Zij $e^1, \ldots, e^d$ de duale basis van E^*. De hierbij behorende duale basis van E^{**} correspondeert onder de genoemde identificatie precies met de oorspronkelijke basis $e_1, \ldots, e_d$. Immers: $\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j$ voor alle $1 \le i, j \le n$.

Laat F een tweede eindig dimensionale lineaire ruimte zijn, met basis $f_1, \ldots, f_p$. Zij $f^1, \ldots, f^p$ de bijbehorende duale basis van F^*. De matrix van een lineaire afbeelding $A : E \to F$ ten opzichte van de gekozen bases heeft elementen $A_j^i \in k$ die bepaald zijn door de formule $A(e_j) = \sum_i A_j^i f_i$. Door hierop f^i te laten werken zien we dat

$$A_j^i = f^i(Ae_j). \tag{4}$$

De matrix van A ten aanzien van de genoemde bases noteren we met $\mathrm{mat}\, A$, diens gespiegelde met $(\mathrm{mat}\, A)^{\mathrm{T}}$.

Lemma 1.7 $\mathrm{mat}\,(A^*) = (\mathrm{mat}\, A)^{\mathrm{T}}$

Bewijs. Er geldt dat

$$A^i_j = f^i(A(e_j)) = [A^*(f^i)](e_j) = e_j(A^*(f^i)) = (A^*)^j_i.$$

□

2 Het tensorprodukt van lineaire ruimten

Voor k-lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$ en F noteren we met

$$L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

de lineaire ruimte van $n-$multilineaire afbeeldingen $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ ($n-$multilineariteit betekent dat f in elk van zijn n variabelen lineair is).

Merk op dat in het bijzonder voor een lineaire ruimte E geldt dat $E^* = L^1(E; k)$. Is E eindig dimensionaal, dan volgt uit de identificatie $E^{**} = E$ dat $E = L^1(E^*; k)$.

Definitie 2.1 Laten $E_1, \ldots, E_n$ eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn ($n \geq 1$).

(a) We definiëren $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n := L^n(E_1^*, \ldots, E_n^*; k)$.

(b) Voor $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ definiëren we het element $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ door

$$[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n](\xi_1, \ldots, \xi_n) := \xi_1(x_1) \cdots \xi_n(x_n). \tag{5}$$

Opmerking 2.2 Zij $\iota_k : E_k \to E_k^{**}$ de natuurlijke inbedding, voor $1 \leq k \leq n$. Dan kan het rechterlid van (5) herschreven worden als $\prod_{k=1}^n \iota_k(x_k)(\xi_k)$. In het bijzonder is de bovenstaande definitie voor $n = 1$ compatibel met de identificatie $L^1(E_1^*; k) = E_1$.

Opmerking 2.3 Men verifieert gemakkelijk dat de afbeelding $\nu : E_1 \times \cdots \times E_n \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ gegeven door $\nu(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ multilineair is. Met andere woorden, het tensorprodukt voldoet aan de volgende rekenregel, voor $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, en voor $x'_j \in E_j, \lambda \in k$:

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \cdots \otimes (x_j + \lambda x'_j) \otimes \cdots \otimes x_n = \\ = \quad (x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n) \quad + \quad \lambda\,(x_1 \otimes \cdots \otimes x'_j \otimes \cdots \otimes x_n) \end{aligned}$$

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $E_1, \ldots, E_n$ eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn.

Lemma 2.4 *Laat voor iedere $1 \leq k \leq n$ een basis $e_{k,1} \ldots e_{k,d_k}$ van E_k gegeven zijn. Zij $\mathcal{I}$ de collectie van rijtjes $i = (i(1), \ldots, i(n))$ met $i(k) \in \{1, \ldots, d_k\}$, voor alle $1 \leq k \leq n$. Dan is de collectie*

$$\{e_{1,i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{n,i(n)} \mid i \in \mathcal{I}\}$$

een basis van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Bewijs. Voor $1 \leq k \leq n$ noteren we de duale basis van E_k^* met $e_k^1, \ldots, e_k^{d_k}$. Voor $i \in \mathcal{I}$ noteren we met $e_\cdot^i$ het rijtje vectoren $(e_1^{i(1)}, \ldots, e_n^{i(d_k)})$. Zij $t \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, dan volgt uit de multilineariteit van t dat $t = 0$ dan en slechts dan als $t(e_\cdot^i) = 0$ voor alle $i \in \mathcal{I}$.

Voor $i \in \mathcal{I}$ noteren we met $(\otimes e)_i$ de vector $e_{1,i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{n,i(n)}$ uit $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Is ook $j \in \mathcal{I}$, dan is $(\otimes e)_i(e_\cdot^j)$ gelijk aan 1 als $i = j$, en gelijk aan 0 als $i \neq j$. Laat nu voor iedere $i \in \mathcal{I}$ een scalar $\lambda^i \in k$ gegeven zijn en veronderstel dat $\sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda^i (\otimes e)_i = 0$. Door evalueren van beide leden in het rijtje $e_\cdot^j$ volgt dat $\lambda^j = 0$ voor alle $j \in \mathcal{I}$. De vectoren $(\otimes e)_i$, $i \in \mathcal{I}$ zijn dus lineair onafhankelijk.

Zij tenslotte $t \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Schrijf $t^i = t(e_\cdot^i)$, voor $i \in \mathcal{I}$. Dan geldt

$$t = \sum_{i \in \mathcal{I}} t^i (\otimes e)_i.$$

Dit blijkt door beide leden van deze gelijkheid op elk rijtje vectoren $e_\cdot^j$, $j \in \mathcal{I}$, te evalueren. Hieruit volgt dat de vectoren $(\otimes e)_i$, $i \in \mathcal{I}$, de ruimte $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ opspannen. $\square$

Stelling 2.5 *Zij $E_1, \ldots, E_n$ een stel eindig dimensionale lineaire ruimten. Dan voldoet de multilineaire afbeelding $\nu : E_1 \times \cdots \times E_n \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ aan de volgende* **universele eigenschap**.

Voor iedere lineaire ruimte F en iedere multilineaire afbeelding $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ bestaat er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F$ zo dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu"'] & F \\ E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Bewijs. In het vervolg gebruiken we de notaties uit Lemma 2.4 en haar bewijs. Dan is $\{(\otimes e)_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ een basis van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Zij $f \in L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Dan is er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F$ met $\bar{f}((\otimes e)_i) = f(e_{1,i(1)}, \ldots, e_{n,i(n)})$ voor alle $i \in \mathcal{I}$. Men gaat nu gemakkelijk na dat $\bar{f} \circ \nu = f$ op elk rijtje $(e_{1,i(1)}, \ldots, e_{n,e(n)})$, $i \in \mathcal{I}$. Wegens de multilineariteit van beide leden volgt hieruit dat $\bar{f} \circ \nu = f$. De uniciteit van $\bar{f}$ is een direkt gevolg van Lemma 2.4. $\square$

Opmerking 2.6 Door $\varphi \mapsto \varphi \circ \nu$ wordt een lineaire afbeelding

$$\mathrm{Hom}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F) \longrightarrow L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

gedefinieerd. Het existentiegedeelte van de universele eigenschap zegt precies dat de bovenstaande afbeelding surjectief is. Het uniciteitsgedeelte drukt uit dat de bovenstaande afbeelding injectief is. De bovenstaande natuurlijke afbeelding is derhalve een lineair isomorfisme.

Voorbeeld 2.7 Is X een verzameling, dan noteren we met $\mathcal{F}(X)$ de lineaire ruimte van alle funkties $X \to k$. Is $a \in X$ dan schrijven we e_a voor het element van $\mathcal{F}(X)$ dat gegeven wordt door $e_a(x) = 0$ als $x \neq a$ en $e_a(a) = 1$. Is X eindig dan vormen de e_a, $a \in X$, een basis van $\mathcal{F}(X)$. De duale basis wordt gegeven door e^a, $a \in X$, met $e^a : f \mapsto f(a)$.

Laat Y een tweede eindige verzameling zijn. We zullen aantonen dat het tensorprodukt $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$ op natuurlijke wijze isomorf is met $\mathcal{F}(X \times Y)$. Daartoe beschouwen we de bilineaire afbeelding $\varphi : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X \times$

Y) die gegeven wordt door $\varphi(f,g)(x,y) = f(x)g(y)$. Wegens de universele eigenschap factoriseert de afbeelding φ naar een lineaire afbeelding

$$\bar{\varphi} : \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X \times Y).$$

Deze afbeelding voert de basis $\{e_a \otimes e_b \mid a \in X, b \in Y\}$ over in de basis $\{e_{(a,b)} \mid (a,b) \in X \times Y\}$ van $\mathcal{F}(X \times Y)$ en is dus een lineair isomorfisme.

In het vervolg identificeren we $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$ met $\mathcal{F}(X \times Y)$ via het natuurlijke isomorfisme $\bar{\varphi}$. In het bijzonder noteren we, voor $f \in \mathcal{F}(X)$ en $g \in \mathcal{F}(Y)$, de funktie $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ met $f \otimes g$.

De bovenstaande situatie treedt bijvoorbeeld op bij de combinatie van twee quantummechanische systemen A en B met eindig vele quantumtoestanden. Laten de quantumtoestanden van A gelabeld zijn door de verzameling X en die van B door Y. Dan zijn $\mathcal{F}(X)$ en $\mathcal{F}(Y)$ de toestandsruimten van A en B. De toestandsruimte van het gecombineerde systeem is $\mathcal{F}(X \times Y) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$.

De universele eigenschap in Stelling 2.5 motiveert ons tot de volgende definitie.

Definitie 2.8 Onder een **tensorprodukt** van de lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$ verstaan we een lineaire ruimte G, met daarbij een afbeelding $g \in L^n(E_1, \ldots, E_n; G)$ zo dat de volgende universele eigenschap geldt: *Voor iedere lineaire ruimte F en iedere multilineaire afbeelding $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ bestaat er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : G \to F$ zo dat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \bar{f}} & \\ G & & \end{array}$$

Opmerking 2.9 Na deze definitie kunnen we Stelling 2.5 als volgt herformuleren: *Het paar $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \nu$ is een tensorprodukt van de lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$.*

Het volgende lemma brengt tot uitdrukking dat alle tensor produkten van $E_1, \ldots, E_n$ op natuurlijke wijze isomorf zijn met $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. In het vervolg zullen we daarom spreken over het tensorprodukt $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Lemma 2.10 *Laten G, g en G', g' twee tensorprodukten van $E_1, \dots, E_n$ zijn. Dan bestaat er een unieke lineaire afbeelding $h : G \to G'$ zo dat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} & G' \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \arrow[uu] \end{tikzcd} . \tag{6}$$

De afbeelding h is een lineair isomorfisme.

Bewijs. Het bestaan en de uniciteit van h volgen uit de universele eigenschap van G, g (er geldt dat $h = \bar{g}'$). Uit de universele eigenschap van G', g' volgt verder het bestaan van een unieke lineaire afbeelding $h' : G' \to G$ zo dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} & G \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G' \arrow[uu] \end{tikzcd} . \tag{7}$$

Uit de commutativiteit van de diagrammen (6) en (7) blijkt dat het volgende diagram commutatief is als voor de verticale afbeelding de compositie $h' \circ h$ genomen wordt; anderzijds is het ook commutatief als de identiteit I_G genomen wordt:

$$\begin{tikzcd} & G \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \arrow[uu] \end{tikzcd} .$$

Het uniciteitsgedeelte van de universele eigenschap leert ons nu dat $h' \circ h = I_G$. Op soortgelijke wijze concluderen we dat $h \circ h' = I_{G'}$. Dus h is een isomorfisme.
□

We merken op dat Definitie 2.8 en Lemma 2.10 ook geldig zijn in het geval de ruimten $E_1, \dots, E_n$ niet noodzakelijkerwijs eindig dimensionaal zijn. In dat geval is $L^n(E_1, \dots, E_n; k)$ echter geen tensorprodukt meer. Daarom hebben we voor de bovenstaande definitie door middel van de universele eigenschap gekozen. Het aantonen van het bestaan van een tensorprodukt is nu een probleem dat op een andere manier opgelost kan worden. Het bovenstaande lemma garandeert de uniciteit op lineaire isomorfie na.

Deze aanpak werkt ook in de algemenere context van het tensorprodukt van modulen $E_1, \dots, E_n$ over een commutatieve ring met eenheid. Voor details verwijzen we de lezer naar [Lang1, Ch. XVI].

We eindigen deze paragraaf met een nuttig lemma.

Lemma 2.11 *Zij $E_1, \dots, E_n$ een stel eindig dimensionale lineaire ruimten over k. Dan is er een natuurlijk isomorfisme*

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^* \simeq E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*.$$

Bewijs. Er geldt dat $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^* = \mathrm{Hom}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, k) \simeq L^n(E_1, \dots, E_n; k)$, zie Opmerking 2.6. Wegens Lemma 1.6 is de laatste ruimte op natuurlijke wijze isomorf met $L^n(E_1^{**}, \dots, E_n^{**}; k) = E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*$. $\square$

3 Tensoren en componenten

In het vervolg veronderstellen we dat E een eindig dimensionale lineaire ruimte over k is, met basis $e_1, \dots, e_d$. De duale basis van E^* noteren we met $e^1, \dots, e^d$. Is $x \in E$, dan schrijven we

$$x = \sum_{i=1}^{d} x^i e_i;$$

de coefficiënten hierin worden gegeven door $x^i = e^i(x)$. Is $\xi \in E^*$, dan schrijven we

$$\xi = \sum_{i=1}^{d} \xi_i e^i;$$

de coëfficiënten worden nu gegeven door $\xi_i = \xi(e_i)$.

We behandelen nu een nuttig voorbeeld van een tensorprodukt. Zij F een tweede eindig dimensionale lineaire ruimte over k, met basis $f_1, \dots, f_p$. We gebruiken de notatie $\mathrm{Hom}(E, F)$ voor de ruimte van lineaire afbeeldingen $E \to F$.

Lemma 3.1 *Er is een unieke lineaire afbeelding $\varphi : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}(E, F)$ waarbij voor $\xi \in E^*, y \in F$ het element $\varphi(y \otimes \xi) \in \mathrm{Hom}(E, F)$ gegeven wordt door*

$$\varphi(y \otimes \xi) : E \to F, \ x \mapsto \xi(x)y.$$

De lineaire afbeelding φ is een isomorfisme.

Bewijs. Zij $f \in L^2(F, E^*; \mathrm{Hom}(E, F))$ gedefinieerd door $f(y, \xi) : x \mapsto \xi(x)y, E \to F$ voor $\xi \in E^*, y \in F$. Wegens de universele eigenschap van het tensorprodukt factoriseert de afbeelding naar een unieke lineaire afbeelding $\bar{f} : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}(E, F)$. Dit is de unieke afbeelding φ.

Voor $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq d$ definiëren we de lineaire afbeelding L^i_j : $E \to F$ door $L^j_i = \varphi(f_i \otimes e^j)$. Dus L^j_i wordt gegeven door

$$L^j_i(x) = x^j f_i.$$

Is $A : E \to F$ een lineaire afbeelding dan is zijn matrix gelijk aan $(A^i_j)_{i,j}$, waarbij $A^i_j = A(e_j)^i$. Men gaat nu gemakkelijk na dat

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p}} A^i_j L^j_i.$$

Immers de i-de component van zowel het linkerlid als het rechterlid geëvalueerd in e_j is gelijk aan A^i_j. Hieruit blijkt dat de L^j_i een basis van $\mathrm{Hom}(E, F)$ vormen. De afbeelding φ voert een basis in een basis over en is dus een lineair isomorfisme. $\square$

In het vervolg zullen we het isomorfisme φ uit het bovenstaande lemma als identificerende afbeelding gebruiken. Na deze identificatie is $F \otimes E^* = \mathrm{Hom}(E, F)$. Het element $f_i \otimes e^j$ van $F \otimes E^*$ identificeren we met de afbeelding $L^j_i \in \mathrm{Hom}(E, F)$ uit het bovenstaande bewijs. Voor een lineaire afbeelding $A \in \mathrm{Hom}(E, F)$ verkrijgen we zo de tensornotatie

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq d}} A^i_j \, f_i \otimes e^j,$$

met $(A^i_j)_{i,j}$ de matrix van A ten aanzien van de bases $e_1, \ldots, e_d$ van E en $f_1, \ldots, f_p$ van F. De matrix van A verschijnt hier dus als collectie componenten van de tensor $A \in F \otimes E^*$ ten aanzien van de basis $f_i \otimes e^j$ van $F \otimes E^*$.

We gebruiken de notatie $\mathrm{End}(E) = \mathrm{Hom}(E, E)$ voor de ruimte van lineaire endomorfismen van E. Met de bovenstaande identificatie, toegepast op $F = E$, zien we dat

$$E \otimes E^* = \mathrm{End}(E). \tag{8}$$

De natuurlijke bilineaire afbeelding $c : E \times E^* \to k$ gegeven door $c(x, \xi) = \xi(x)$ factoriseert wegens de universele eigenschap van het tensorprodukt naar een unieke lineaire afbeelding $C : E \otimes E^* \to k$. Deze lineaire afbeelding wordt **contractie** genoemd.

Lemma 3.2 *Via de identificatie (8) correspondeert de contractie* $C : E \otimes E^* \to k$ *met het spoor* $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(E) \to k,\ A \mapsto \mathrm{tr}\,(A)$.

Bewijs. Ten aanzien van de basis $e_1, \ldots, e_d$ van E schrijven we $A = \sum_{1 \le i,j \le d} A^i_j e_i \otimes e^j$. Dan is

$$C(A) = \sum_{1 \le i,j \le d} A^i_j C(e_i \otimes e^j) = \sum_{1 \le i,j \le d} A^i_j \delta^j_i = \sum_{1 \le i \le d} A^i_i = \mathrm{tr}\,(A).$$

□

Het volgende lemma staat om voor de hand liggende redenen bekend als de associativiteit van het tensorprodukt.

Lemma 3.3 *Laten* E, F, G *eindig dimensionale lineaire ruimten over* k *zijn. Er is een natuurlijk isomorfisme*

$$(E \otimes F) \otimes G \simeq E \otimes F \otimes G;$$

het wordt gegeven door $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$. *Analoog is er een natuurlijk isomorfisme* $E \otimes (F \otimes G) \simeq E \otimes F \otimes G$.

Bewijs. Definieer de afbeelding $f : E \times F \times G \to (E \otimes F) \otimes G$ door $f(x, y, z) = (x \otimes y) \otimes z$. De afbeelding f is multi-lineair en factoriseert derhalve naar een lineaire afbeelding $\bar{f} : E \otimes F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$. Merk op dat $\bar{f}(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Laten $(e_i), (f_j)$ en (g_k) bases van, respectievelijk, E, F en G zijn. Dan voert $\bar{f}$ de basis $e_i \otimes f_j \otimes g_k$ van $E \otimes F \otimes G$ over in de basis $(e_i \otimes f_j) \otimes g_k$ van $(E \otimes F) \otimes G$. Hieruit volgt dat $\bar{f}$ een lineair isomorfisme is. De inverse van $\bar{f}$ voldoet aan de eisen van het bovenstaande lemma. Het laatste deel van het lemma wordt op soortgelijke wijze bewezen. □

Opmerking 3.4 In het vervolg zullen we volgens de hierboven beschreven natuurlijke isomorfismen identificeren. Met andere woorden, we maken geen onderscheid meer tussen $E \otimes F \otimes G$, $(E \otimes F) \otimes G$ of $E \otimes (F \otimes G)$.

Voorbeeld 3.5 In dit voorbeeld laten we zien dat de samenstelling van twee lineaire afbeeldingen door middel van een contractie beschreven kan worden.

Dit leidt op natuurlijke wijze tot de bekende formule voor de vermenigvuldiging van matrices.

Laten E, F, G eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn, en $A : E \to F$ en $B : F \to G$ lineaire afbeeldingen. We vatten A als op als tensor in $F \otimes E^*$ en B als tensor in $G \otimes F^*$. De tensor $B \otimes A$ is dus bevat in $G \otimes F^* \otimes F \otimes E$ (hier gebruiken we de associativiteit van het tensorprodukt).

De multilineaire afbeelding $G \times F^* \times F \times E^* \to G \otimes E$, $(g, f^*, f, e^*) \mapsto f^*(f)\, g \otimes e^*$ factoriseert naar een unieke lineaire afbeelding $C_2^3 : G \otimes F^* \otimes F \otimes E \to G \otimes E$ die we om voor de hand liggende redenen de contractie naar de 2-de en 3-de component noemen. We zullen aantonen dat

$$B \circ A = C_2^3(B \otimes A). \tag{9}$$

De afbeeldingen $\varphi : (B, A) \mapsto B \circ A$ en $\psi : (A, B) \mapsto C_2^3(B \otimes A)$ zijn beide bilineair als afbeeldingen van $G \otimes F^* \times F \otimes E^*$ naar $G \otimes E^*$. Het is derhalve voldoende de gelijkheid van φ en ψ te controleren op elementen van de vorm $A = f \otimes e^*$ en $B = g \otimes f^*$. Welnu, voor elementen van die vorm geldt, als $e \in E$,

$$\varphi(B, A)(e) = [g \otimes f^*](e^*(e) f) = e^*(e) f^*(f) g = f^*(f)[g \otimes e^*](e) = \psi(A, B)(e).$$

Hiermee is (9) aangetoond.

Uit de formule leiden we verder nog af dat het volgende geldt voor de componenten ten aanzien van bases van E, F, G en de corresponderende duale bases van E^*, F^*. Er geldt:

$$(B \circ A)_i^k = [C_2^3(A \otimes B)]_i^k = \sum_j (B \otimes A)_{ji}^{kj} = \sum_j B_j^k A_i^j.$$

Dit is de bekende formule die uitdrukt dat de matrix van de samenstelling $B \circ A$ verkregen wordt door vermenigvuldiging van de matrices van A en B.

In het vervolg gebruiken we, voor $r \geq 1$, de notatie

$$\otimes^r E := \overbrace{E \otimes \cdots \otimes E}^{r}$$

voor het r-voudige tensorprodukt van E met zichzelf. Met $\otimes^1 E$ bedoelen we de ruimte $L^1(E^*; k) = E^{**}$, zie Definitie 2.1. Wegens Lemma 1.6 is deze ruimte op natuurlijke wijze isomorf met E; dus $\otimes^1 E = E$. Tenslotte spreken we af dat $\otimes^0 E := k$. De ruimte $\otimes^r E$ heet de ruimte van contravariante tensoren van graad r op E. Deze traditionele terminologie is helaas tegengesteld aan die welke men op grond van de categorieëntheorie zou verwachten. Verderop zullen we zien dat door $E \rightsquigarrow \otimes^r E$ een covariante functor gedefinieerd wordt.

Is $s \in \mathbb{N}$, dan heet $\otimes^s E^*$ de ruimte van covariante tensoren van de graad s op E. Verderop zullen we namelijk zien dat door $E \rightsquigarrow \otimes^s E^*$ een contravariante functor gedefinieerd wordt.

Voor $r, s \in \mathbb{N}$ definiëren we de ruimte

$$\mathcal{T}^r_s E := \otimes^r E \otimes \otimes^s E^* = \overbrace{E \otimes \cdots \otimes E}^{r} \otimes \overbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}^{s};$$

de elementen van deze ruimte heten: (gemengde) tensoren op E van contravariantiegraad r en covariantiegraad s.

Merk op dat uit de definities volgt dat

$$\mathcal{T}^r_s E = L^{r+s}(\overbrace{E^*, \ldots, E^*}^{r}, \overbrace{E, \ldots, E}^{s}; k) \tag{10}$$

We merken tenslotte op dat uit (8) volgt dat $\mathcal{T}^1_1 E = \mathrm{End}(E)$.

Uit Lemma 2.4 volgt dat een basis van $\mathcal{T}^r_s := \mathcal{T}^r_s E$ gegeven wordt door de vectoren

$$e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)},$$

met $i \in \mathcal{I}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$. Hierbij hebben we de notatie $\mathcal{I}_r := \{1, \ldots, d\}^r$ gebruikt. Het is de gewoonte om de volgende componentnotatie voor de elementen van $\mathcal{T}^r_s$ te gebruiken:

$$T = \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_r \\ j \in \mathcal{I}_s}} T^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)}\, e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)}.$$

Door evalueren op geschikte rijen duale basisvectoren ziet men gemakkelijk in dat de componenten in deze uitdrukking gegeven worden door

$$T^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)} = T(e^{i(1)}, \ldots, e^{i(r)}, e_{j(1)}, \ldots, e_{j(s)}).$$

Definitie 3.6 Zij $1 \leq k \leq r$ en $1 \leq l \leq s$. Dan definiëren we de **contractie** C^k_l als de lineaire afbeelding $\mathcal{T}^r_s \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}$ gegeven door

$$C^k_l : x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^s \mapsto \xi^l(x_k)\, x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}^l \otimes \cdots \otimes \xi^s.$$

Hierbij geeft het symbool $\widehat{\ }$ over een element aan dat het betreffende element weggelaten wordt.

Bedenk dat de afbeelding C_l^k goed gedefinieerd is op grond van de universele eigenschap van het tensorprodukt. Immers, C_l^k is de afbeelding die ontstaat door factorisatie van de multi-lineaire afbeelding

$$(x_1,\dots x_r,\xi^1,\dots \xi^s)\mapsto \xi^l(x_k)\,x_1\otimes\cdots\otimes\hat{x}_k\otimes\cdots\otimes x_r\otimes\xi^1\otimes\cdots\otimes\hat{\xi}^l\otimes\cdots\otimes\xi^s.$$

De contractie C_l^k is niets anders dan de eerder gedefinieerde contractie C toegepast op de k-de contravariante en de l-de covariante component van het tensorprodukt. Met behulp van Lemma 3.2 leiden we nu af dat de contractie op de tensorcomponenten werkt als het spoor ten aanzien van de k-de contravariante en de l-de covariante component. Is $T\in\mathcal{T}_s^r$, dan worden de componenten van $C_l^k(T)$ in termen van die van T gegeven door:

$$C_l^k(T)^{i(1),\dots,\widehat{i(k)}\dots i(r)}_{j(1),\dots,\widehat{j(l)}\dots j(s)}=\sum_{\nu=1}^{d}T^{i(1),\dots,i(k-1),\nu,i(k+1)\dots i(r)}_{j(1),\dots,j(l-1),\nu,j(l+1),\dots j(s)}.$$

4 Transformatie van tensoren onder afbeeldingen

We veronderstellen dat E en F twee eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn. We beschrijven hoe een lineaire afbeelding $A:E\to F$ een lineaire afbeelding op tensoren induceert.

Zij $r\in\mathbb{N}$. De afbeelding $(x_1,\dots,x_r)\mapsto Ax_1\otimes\cdots\otimes Ax_r$, $E\times\cdots\times E\to\otimes^r F$ is multilineair, en induceert wegens de universele eigenschap een lineaire afbeelding $\otimes^r E\to\otimes^r F$ die we noteren met $\otimes^r A$. Er geldt:

$$\otimes^r A\,(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)=Ax_1\otimes\cdots\otimes Ax_r.$$

Wegens (5) betekent dit dat

$$[\otimes^r A]S=S\circ(\overbrace{A^*\times\cdots\times A^*}^{r}).$$

Merk op dat $\otimes^r I_E$ gelijk is aan de identiteit op $\otimes^r E$. Is G een derde eindig dimensionale lineaire ruimte, en $B:F\to G$ een lineaire afbeelding, dan is

$$\otimes^r(B\circ A)=\otimes^r B\circ\otimes^r A.$$

Op grond van deze twee eigenschappen heet de toevoeging $E \rightsquigarrow \otimes^r E$ een covariante functor.

Lemma 4.1 *Is $A : E \to F$ een lineair isomorfisme, dan is ook $\otimes^r A : \otimes^r E \to \otimes^r F$ een lineair isomorfisme.*

Bewijs. Wegens de functoriële eigenschappen geldt dat

$$\otimes^r(A^{-1}) \circ \otimes^r A = \otimes^r(A^{-1} \circ A) = \otimes^r(I_E) = I_{\otimes^r E}.$$

In omgekeerde volgorde geeft de compositie de identiteit op $\otimes^r F$. Hieruit volgt dat $\otimes^r A$ een lineair isomorfisme is met inverse $\otimes^r A^{-1}$. $\square$

Tenslotte beschrijven we de afbeelding $\otimes^r A$ in componenten. Laat $e_1, \dots, e_p$ een basis van E zijn, en $f_1, \dots, f_q$ een basis van F. Laten $\{e^i\}$ en $\{f^j\}$ de corresponderende duale bases zijn van E^* respectievelijk F^*. Is $T \in \otimes^r E$, dan worden de componenten van $S = [\otimes^r A](T)$ gegeven door

$$\begin{aligned} S^{i(1)\dots i(r)} &= S(f^{i(1)}, \dots, f^{i(r)}) \\ &= T(A^* f^{i(1)}, \dots, A^* f^{i(r)}) \end{aligned}$$

Wegens Lemma 1.7 worden de matrixcoefficënten van A^* gegeven worden door

$$(A^*)^i_j = A^j_i.$$

Passen we dit toe op het bovenstaande, dan vinden we

$$\begin{aligned} S^{i(1)\dots i(r)} &= T(\sum_{k=1}^{d} A^{i(1)}_k e^k, \dots, \sum_{k=1}^{d} A^{i(r)}_k e^k) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_r} A^{i(1)}_{k(1)} \cdots, A^{i(r)}_{k(r)} T(e^{k(1)}, \dots, e^{k(r)}). \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_r} A^{i(1)}_{k(1)} \cdots, A^{i(r)}_{k(r)} T^{k(1)\dots k(r)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Zij $s \in \mathbb{N}$. Een lineaire afbeelding $A : E \to F$ induceert de lineaire afbeelding $A^* : F^* \to E^*$. De afbeelding A^* induceert een lineaire afbeelding $\otimes^s A^* : \otimes^s F^* \to \otimes^s E^*$. Wegens (5) betekent dit dat

$$[\otimes^r A^*] S = S \circ (\overbrace{A \times \cdots \times A}^{r}).$$

Er geldt dat $\otimes^s I_E^* = I_{\otimes^s E^*}$. Is ook $B : F \to G$ een lineaire afbeelding, dan is

$$\otimes^s (B \circ A)^* = \otimes^s A^* \circ \otimes^s B^*.$$

Op grond van deze eigenschappen heet $E \rightsquigarrow \otimes^s E^*$ een contravariante functor (nogmaals: de elementen in de tensorruimte die men verkrijgt heten covariant).

Is $T \in \otimes^s F^*$, dan behoort de tensor $S = [\otimes^s A^*](T)$ tot $\otimes^s E^*$. Door het bovenstaande te combineren met (11) vinden we dat de componenten van S gegeven worden door de formule:

$$S_{j(1)\dots j(s)} = \sum_{l \in \mathcal{I}_s} A_{j(1)}^{l(1)} \cdots A_{j(s)}^{l(s)} \, T_{l(1)\dots l(s)} \tag{12}$$

Tenslotte bestuderen we hoe gemengde tensoren transformeren onder lineaire afbeeldingen. Vanwege het gemengd co- en contravariante karakter kunnen we dit alleen doen voor lineaire isomorfismen. Zij A een lineair isomorfisme van E op F, met inverse $A^{-1} : F \to E$. Dan is $A^* : F^* \to E^*$ een lineair isomorfisme van F^* op E^*, met inverse $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Met Lemma 4.1 zien we nu dat door een lineair isomorfisme $A : E \to F$ het isomorfisme

$$A_* := [\otimes^r A] \otimes [\otimes^s A^{-1*}] : \mathcal{T}_s^r E \to \mathcal{T}_s^r F.$$

geïnduceerd wordt. Zij $T \in \mathcal{T}_s^r E$, dan zien we door combineren van (11) en (12) dat de componenten van de tensor $A_* T$ gegeven worden door:

$$[A_* T]_{j(1)\dots j(s)}^{i(1)\dots i(r)} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_r \\ j \in \mathcal{I}_s}} A_{k(1)}^{i(1)} \cdots A_{k(r)}^{i(r)} [A^{-1}]_{j(1)}^{l(1)} \cdots [A^{-1}]_{j(s)}^{l(s)} \, T_{l(1)\dots l(s)}^{k(1)\dots k(r)}. \tag{13}$$

5 Tensorbundels en tensorvelden

In deze paragraaf wordt van lineaire ruimten steeds verondersteld dat ze gedefinieerd zijn over het grondlichaam $k = \mathbb{R}$.

Laat M een gladde variëteit zijn (met glad bedoelen we in deze paragraaf steeds C^∞). Is $\pi : \mathcal{V} \to M$ een gladde vectorbundel, dan schrijven we $\mathcal{V}_p$ voor de vezel $\pi^{-1}(p)$ boven een punt $p \in M$. Is bovendien $\Omega \subset M$ een open deelverzameling, dan schrijven we $\mathcal{V}_\Omega$ voor het volledige origineel $\pi^{-1}(\Omega)$; dit is de disjuncte vereniging van de vezels $\mathcal{V}|_p, p \in \Omega$. We schrijven $\Gamma(\Omega, \mathcal{V})$ voor de (lineaire) ruimte van gladde snedes $\Omega \to \mathcal{V}$. De ruimte $\Gamma(M, \mathcal{V})$ noteren we kort met $\Gamma(\mathcal{V})$.

Onder een **frame** van $\mathcal{V}$ op een open verzameling $\Omega \subset M$ verstaan we een geordend m-tal snedes $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ in $\Gamma(\Omega, \mathcal{V})$ zo dat de collectie $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_m(p)$ een basis van de vezel $\mathcal{V}_p$ is, voor elke $p \in \Omega$. Het volgende resultaat is een onmiddellijk gevolg van de definitie van een vectorbundel.

Lemma 5.1 *Zij $\pi : \mathcal{V} \to M$ een gladde vectorbundel van rang r. Zij $\Omega \subset M$ open. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *De vectorbundel $\mathcal{V}$ is triviaal over Ω.*

(b) *De vectorbundel $\mathcal{V}$ heeft een frame $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ over Ω.*

Bewijs. '$(a) \Rightarrow (b)$': Laat $\mathcal{V}$ triviaal zijn over Ω. Dan is er een trivialisatie $\tau : \mathcal{V}_\Omega \to \Omega \times V$, met V een lineaire ruimte van dimensie r. Kies een basis $e_1, \ldots, e_r$ van V, en definieer $\bar{\sigma}_j : \Omega \to \Omega \times V$ door $\bar{\sigma}_j(p) = (p, e_j)$. Dan wordt door $\sigma_j := \tau^{-1} \circ \bar{\sigma}_j$ een frame van $\mathcal{V}$ over Ω gedefinieerd.

'$(b) \Rightarrow (a)$': laat $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ een frame van $\mathcal{V}$ over Ω zijn. Dan wordt door

$$\rho : (p, a) \mapsto (p, a_1\sigma_1(p) + \cdots + a_r\sigma_r(p))$$

een diffeomorfisme $\Omega \times \mathbb{R}^r \to \mathcal{V}_\Omega$ gedefinieerd dat lineair is op de vezels. De inverse $\sigma = \rho^{-1}$ is een trivialisatie van $\mathcal{V}$ over Ω. $\square$

Zij $\mathcal{V}$ een gegeven vectorbundel over M en zij $r, s \geq 0$. Dan kunnen we op een natuurlijke manier een vectorbundel $\mathcal{T}^r_s\mathcal{V}$ definiëren waarvan de vezel in een punt $p \in M$ gelijk is aan het tensorprodukt $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{V}_p)$ (zie (10). Als verzameling is $\mathcal{T}^r_s\mathcal{V}$ gelijk aan de disjuncte vereniging van de lineaire ruimten $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{V}_p)$:

$$\mathcal{T}^r_s\mathcal{V} = \{(p, t) \mid p \in M,\ t \in \mathcal{T}^r_s\mathcal{V}_p\}.$$

In het bijzonder is $\mathcal{T}^0_1\mathcal{V}$ gelijk aan de duale bundel $\mathcal{V}^*$.

Is $\tau : \mathcal{V}_\Omega \to \Omega \times V, (p, v) \mapsto (p, \tau_p(v))$ een trivialisering van de vectorbundel $\mathcal{V}$ over een open deelverzameling Ω, dan definiëren we de afbeelding $\mathcal{T}^r_s\tau : (\mathcal{T}^r_s\mathcal{V})_\Omega \to \Omega \times \mathcal{T}^r_s V$ door

$$\mathcal{T}^r_s\tau(p, t) = (p, (\tau_p)_*(t)).$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\mathcal{T}^r_s\mathcal{V}$ een unieke structuur van vectorbundel heeft waarvoor de $\mathcal{T}^r_s\tau$ lokale trivialiseringen zijn. Voor details verwijzen we de lezer naar [Lang2, § 3.4].[2]

Is $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ een frame van $\mathcal{V}$ over een open deelverzameling $\Omega \subset M$, dan definiëren we de snedes $\sigma^1, \dots, \sigma^r$ van de duale bundel $\mathcal{V}^*$ door

$$\sigma^i(p)(\sigma_j(p)) = \delta^i_j \qquad (p \in \Omega,\ 1 \le i, j \le r).$$

Hieruit blijkt dat $\{\sigma^i(p) \mid 1 \le i \le r\}$ de basis van $\mathcal{V}^*_p$, duaal aan de basis $\{\sigma_i(p) \mid 1 \le i \le r\}$ van $\mathcal{V}_p$ is. In het bijzonder is $(\sigma^1, \dots, \sigma^r)$ een frame van de duale bundel $\mathcal{V}^*$ over Ω. We noemen dit frame het duale frame van $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

Is $i \in \mathcal{I}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$, dan definiëren we de snede $\sigma^j_i \in \Gamma(\Omega, \mathcal{T}^r_s\mathcal{V})$ door

$$\sigma^j_i(p) = \sigma_{i(1)}(p) \otimes \cdots \otimes \sigma_{i(r)}(p) \otimes \sigma^{j(1)}(p) \otimes \cdots \otimes \sigma^{j(s)}(p). \tag{14}$$

Uit Lemma 2.4 volgt nu dat de elementen (14) een basis van $\mathcal{T}^r_s\mathcal{V}_p$ vormen, voor elke $p \in \Omega$. De elementen σ^j_i, $i \in \mathcal{I}_r, j \in \mathcal{I}_s$, vormen derhalve een frame van de bundel $\mathcal{T}^r_s\mathcal{V}$ over Ω.

Een willekeurig element $T \in \Gamma(\Omega, \mathcal{T}^r_s\mathcal{V})$ heeft nu een unieke ontbinding van de vorm

$$T = \sum_{i,j} T^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)}\, \sigma_{i(1)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i(r)} \otimes \sigma^{j(1)} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j(s)},$$

met componenten $T^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)} \in C^\infty(\Omega)$.

De bovenstaande definities zijn in het bijzonder van toepassing met $\mathcal{V} = TM$, de raakbundel van M. De bundel $\mathcal{T}^r_s TM$ wordt de tensorbundel van type (r, s) op M genoemd. Haar snedes worden tensorvelden, of kortweg tensoren, van type (r, s) op M genoemd.

We besluiten deze paragraaf met een beschrijving van tensoren door middel van componenten zoals dat in de fysica gebruikelijk is.

Is $x = (x^1, \dots, x^n) : \Omega_x \to \mathbb{R}^n$ een lokale coordinatisering van M, dan vormen de vectorvelden $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $1 \le i \le n$, een frame van de raakbundel TM gedefinieerd op Ω_x. Voorts vormen de eenvormen dx^i, $1 \le i \le n$, een frame van de coraakbundel T^*M, eveneens op Ω_x. Tenslotte geldt

$$dx^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j,$$

[2] S. Lang. Differential manifolds. Addisson-Wesley, 1972

dus het frame $(dx^i \mid 1 \leq i \leq n)$ is duaal ten aanzien van $(\frac{\partial}{\partial x^i} \mid 1 \leq i \leq n)$. Iedere tensor $T \in \Gamma(\mathcal{T}_s^r TM)$ heeft daarom op Ω_x een unieke expressie van de vorm:

$$T = \sum_{i,j} {}_xT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)} \frac{\partial}{\partial x^{i(1)}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i(r)}} \otimes dx^{j(1)} \otimes \cdots \otimes dx^{j(s)}, \qquad (15)$$

met coëfficiënten ${}_xT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)}$ die tot $C^\infty(\Omega_x)$ behoren. Is $y = (y^1, \ldots, y^n) : \Omega_y \to \mathbb{R}^n$ een tweede lokale coordinatisering van M, dan heeft T op Ω_y een componentvoorstelling met componenten ${}_yT^{k(1)\ldots k(r)}_{l(1)\ldots l(s)}$. Hieronder bespreken we het verband tussen de componenten van T ten aanzien van x en ten aanzien van y op de doorsnede van de coordinaatomgevingen Ω_x en Ω_y. Zij $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en zij $\{e^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de duale basis van $(\mathbb{R}^n)^*$. Zij p in het vervolg een punt in de doorsnede van Ω_x en Ω_y. Dan is de afbeelding $P := (Dx)_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ een lineair isomorfisme, dat de basis $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ overvoert in de standaardbasis e_i. De afbeelding $P_* = P^{*-1}$ voert overeenkomstig de duale basis $dx^i(p)$ over in e^i. De tensor $T(p)$ wordt door P_* overgevoerd in

$${}_xT(p) := \sum_{i,j} {}_xT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)}(p)\; e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)}.$$

Zij $Q = (Dy)_p$. Dan hebben we, analoog aan het bovenstaande, met ${}_yT(p) = Q_*(T(p))$, dat

$${}_yT(p) = \sum_{k,l} {}_yT^{k(1)\ldots k(r)}_{l(1)\ldots l(s)}(p)\; e_{k(1)} \otimes \cdots \otimes e_{k(r)} \otimes e^{l(1)} \otimes \cdots \otimes e^{l(s)}.$$

Anderzijds is

$${}_yT(p) = A_*[{}_xT(p)], \qquad (16)$$

waarbij $A = Q \circ P^{-1} = (Dy)_p \circ (Dx)_p^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. De componenten van A ten aanzien van de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ worden gegeven door

$$A^i_j = e^i(Ae_j) = [Q^*(e^i)](P^{-1}e_j) = (dy^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p). \qquad (17)$$

Op soortgelijke wijze ziet men dat de componenten van de inverse matrix A^{-1} gegeven worden door:

$$[A^{-1}]^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p). \qquad (18)$$

Combineren we (16), (17) en (18) met (13) dan vinden we de volgende transformatieformule op $\Omega_x \cap \Omega_y$:

$$
{}_yT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)} = \sum_{k,l} \frac{\partial y^{i(1)}}{\partial x^{k(1)}} \cdots \frac{\partial y^{i(r)}}{\partial x^{k(r)}} \frac{\partial x^{l(1)}}{\partial y^{j(1)}} \cdots \frac{\partial x^{l(s)}}{\partial y^{j(s)}} \, {}_xT^{k(1)\ldots k(r)}_{l(1)\ldots l(s)}. \tag{19}
$$

Laat omgekeerd $\mathcal{A}$ een atlas van M zijn, en veronderstel dat voor elke $x \in \mathcal{A}$ een stel C^∞-funkties ${}_xT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)} \in C^\infty(\Omega_x)$ gegeven is, voor $i \in \mathcal{O}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$, zo dat voor alle $x, y \in \mathcal{A}$ de transformatieformules (19) gelden op de doorsnede van Ω_x en Ω_y. Dan is er een unieke $T \in \Gamma(\mathcal{T}^r_s TM)$ zo dat in elke coordinatisering $x \in \mathcal{A}$ de formule (15) geldt. Dit is de manier waarop tensoren in de fysica meestal beschreven worden.