JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **139**, 225–243 (1996)
ARTICLE NO. 0084

Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif

Erik P. van den Ban

Mathematical Institute, University of Utrecht, P.O. Box 80010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands

AND

Jacques Carmona and Patrick Delorme

Département de Mathématiques Informatique, Faculté des Sciences de Luminy, Géométrie Non Commutative, Groupes de Lie, UPR 9016 du CNRS, 163, Avenue de Luminy, Case 901, 13288 Marseille Cedex 09, France

Received April 5, 1995

We study holomorphic families of K-finite eigenfunctions on symmetric spaces G/H, called functions $II_{hol}(\Lambda)$ by analogy with [HC]. Eisenstein integrals (cf. [B3], [D]), suitably normalized by a polynomial factor, provide examples of such families. A function $II_{hol}(\Lambda)$ is said $II'_{hol}(\Lambda)$, if, roughly speaking, its constant term along any $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup is a finite sum of functions $II_{hol}(\Lambda^s)$, where Λ^s varies in a determined finite set. We prove that, for a function $II'_{hol}(\Lambda)$, one can form wave packets in the Schwartz space. We prove also a criterion for a function $II_{hol}(\Lambda)$ to be $II'_{hol}(\Lambda)$. An important fact is that, for minimal $\sigma\theta$-stable parabolic subgroups, our criterion implies, with the help of the Maas–Selberg relations (cf. [B2], [B3]), a normalization of Eisenstein integrals. All the article relies on the theory of the constant term (cf. [C]).

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie dans la classe de Harish–Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ, K le groupe des points fixes de θ. Soit $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands d'un sous-groupe de Lévi σ et θ stable L d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G. On suppose que $M/M \cap H$ possède des séries discrètes. Dans cet article, on s'intéresse à des familles de fonctions sur G/H, propres sous l'action de

0022-1236/96 $18.00

l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G/H. Ces familles (F_ν) dépendent holomorphiquement d'un paramètre ν variant dans une bande $\mathfrak{a}_\varepsilon^* = \{\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \mid \|Re\,\nu\| < \varepsilon\}$, et vérifient des conditions d'holomorphie en ν, de croissance uniforme, de K-finitude, et sont propres sous l'action de $\mathbb{D}(G/H)$ pour une valeur propre dépendant simplement de ν et d'un paramètre Λ (décrivant, dans l'application aux intégrales d'Eisenstein, l'action de $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ sur une série discrète de $M/M \cap H$). On résume ces propriétés en disant que ces familles (F_ν) sont $II_{hol}(\Lambda)$ et K-finies (cf. Définition 1). On suit ici d'aussi près que possible la terminologie de Harish–Chandra (cf. [HC]).

Ces familles ont été étudiées en général (dans leur version ϖ-sphérique) dans [C]. Des exemples sont fournis par les intégrales d'Eisenstein (cf. [B3], [D]). Toujours par analogie avec [HC], on définit au § 4 les fonctions $II'_{hol}(\Lambda)$ (Définition 2). Essentiellement, une famille $II_{hol}(\Lambda)$, (F_ν), est $II'_{hol}(\Lambda)$ si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q, le terme constant de (F_ν) le long de Q est une somme de fonctions $II_{hol}(\Lambda^s)$ relativement à $L_Q/L_Q \cap H$ pour s décrivant un ensemble fini $W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ (cf. Définition 2). Ici L_Q est le sous-groupe de Lévi θ-stable de Q. On montre que toute famille $II_{hol}(\Lambda)$, multipliée par un polynôme convenable en ν, est $II'_{hol}(\Lambda)$. De plus, on peut choisir un tel polynôme sous-forme d'un produit fini de fonctions affines de direction réelle sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$.

Par ailleurs, on donne une condition suffisante pour qu'une famille (F_ν), quotient d'une famille $II_{hol}(\Lambda)$ par le produit d'un nombre fini de fonctions affines de direction réelle sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, soit de type $II'_{hol}(\Lambda)$. On note $\mathfrak{a}_\varnothing$ un sous-espace abélien maximal de l'espace des éléments antiinvariants de $\mathfrak{g}$ par σ et θ, qui contient $\mathfrak{a}$. Essentiellement, si pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G de la forme $Q = P^k$ avec $k \in N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ et P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, de sous-groupe de Lévi θ-stable égal à MA, le terme constant de (F_ν) le long de Q s'écrit sous forme d'une somme finie de fonctions $II_{hol}(\Lambda^s)$, $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, relativement à $L_Q/L_Q \cap H$, alors (F_ν) est $II'_{hol}(\Lambda)$. Ce critère est très proche d'un critère de Harish–Chandra dans le cas des groupes ([HC] Théorème 11.1).

Cette condition suffisante s'applique facilement aux intégrales d'Eisenstein pour les sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux et permet de les normaliser (cf [BS] pour une autre démonstration).

Enfin, on forme les paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz. Soient $d\nu$ une mesure de Lebesgue sur l'espace $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$, $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ l'espace de Schwartz de $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$, (F_ν) une famille $II'_{hol}(\Lambda)$. Pour tout $\alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ et $x \in G/H$, l'intégrale $\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \alpha(\nu)(F_\nu)(x)\,d\nu$ est absolument convergente et définit une fonction notée $\mathscr{W}_{\alpha,F}$. De plus, $\mathscr{W}_{\alpha,F}$ est un élément de l'espace de Schwartz $\mathscr{C}(G/H)$ de G/H, et la correspondance $\alpha \mapsto \mathscr{W}_{\alpha,F}$ est une application linéaire continue de $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ dans $\mathscr{C}(G/H)$ (cf. [HC] dans le cas des groupes).

1. Généralités

On utilise les conventions de [D] § 1.1 (par exemple, si S est un groupe de Lie, $\mathfrak{s}$ désigne son algèbre de Lie, e son élément neutre, etc.…).

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert du groupe G^σ des points fixes de σ, K le groupe des points fixes de θ. Soit $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de la différentielle de θ (resp. σ), notée encore θ (resp. σ), pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique a $\sigma\theta$-stable de G, on note $P=M_PA_PN_P$ sa σ-décomposition de Langlands. On note $L_P=M_PA_P$ le sous-groupe de Lévi θ-stable de P. On note $\Delta(\mathfrak{n}_P, \mathfrak{a}_P)$ l'ensemble des poids de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$ et $\mathfrak{a}_P^+ := \{X\in\mathfrak{a}_P \mid \forall\alpha\in\Delta(\mathfrak{n}_P, \mathfrak{a}_P),\ \alpha(X)>0\}$. On notera ρ_P l'élément de $\mathfrak{a}_P^*$ défini par $\rho_P(X)=\frac{1}{2}\,tr(ad\,X_{|\mathfrak{n}_P})$. Si $M_P/M_P\cap H$ possède des séries discrètes, on dit que P est σ-cuspidal. Dans toute la suite de l'article, $\mathfrak{a}_\varnothing$ désignera un sous espace abélien maximal de $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$ fixé une fois pour toutes. Un sous-groupe parabolique P de G sera dit standard si P est $\sigma\theta$-stable et $\mathfrak{a}_P\subseteq\mathfrak{a}_\varnothing$. L'ensemble (fini) des sous-groupes paraboliques standards de G sera noté $\mathscr{P}(G)$. L'ensemble des sous-groupes de Lévi θ-stables des éléments de $\mathscr{P}(G)$ sera noté $\mathscr{L}(G)$.

On utilisera les notations habituelles $\mathfrak{k}^d := (\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h})+\sqrt{-1}(\mathfrak{s}\cap\mathfrak{h})$, $\mathfrak{s}^d := (\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q})+\sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$, et $\mathfrak{g}^d := \mathfrak{k}^d+\mathfrak{s}^d$. On note σ^d la restriction à $\mathfrak{g}^d$ du prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de θ à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Si $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan σ^d-stable de $\mathfrak{s}^d$, on définira $\mathfrak{a}^d_\mathfrak{s} := \mathfrak{a}^d\cap\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$, espace que l'on notera parfois $\mathfrak{a}$. De même, on définira $\mathfrak{a}^d_\mathfrak{k} := \mathfrak{a}^d\cap\sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$ de telle sorte que $\mathfrak{a}^d=\mathfrak{a}^d_\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{a}^d_\mathfrak{k}$. On dit qu'un tel espace $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan standard si $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}^d_\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{a}_\varnothing$. Dans ce cas, le centralisateur L de $\mathfrak{a}$ dans G, qui est σ et θ stable, est un élément de $\mathscr{L}(G)$. On notera $L=MA$ la σ-décomposition de Langlands de L. On a $A=\exp\mathfrak{a}$. On notera parfois $\mathfrak{a}^d_M$ le sous-espace $\mathfrak{a}^d_\mathfrak{k}$.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{D}(G/H)$ désignera l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par les translations à gauche par les éléments de G. Si $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{s}^d$, on dispose de l'isomorphisme de Harish–Chandra $\gamma_{\mathfrak{a}^d}\colon \mathbb{D}(G/H)\to S(\mathfrak{a}^d)^{W^d}$, où W^d est le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}^d$ engendré par les réflexions associées aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$. Si $F\in C^\infty(G/H)$ et $\lambda\in(\mathfrak{a}^d)^*_\mathbb{C}$, on dira que F est $\mathbb{D}(G/H)$ propre pour la valeur propre λ si et seulement si $DF=(\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))(\lambda)\,F$ pour tout $D\in\mathbb{D}(G/H)$.

Si $L=MA$ est la σ-décomposition de Langlands de $L\in\mathscr{L}(G)$, on note, pour $\nu\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ et $x\in G/H$, $|(\nu, x)| := (1+\|\nu\|)(1+\tau(x))$. Ici, on a fixé une forme bilinéaire symétrique B sur $\mathfrak{g}$, $Ad\,G$-invariante et telle que la forme $X\mapsto\|X\|^2 := -B(X, \theta(X))$ soit positive définie. La norme sur $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ est celle qui dérive de la structure euclidienne de $\mathfrak{a}$ induite par la structure correspondante de $\mathfrak{g}$. D'autre part, lorsque $g = ke^X h$, avec $k \in K$, $X \in \mathfrak{a}_\varnothing$, $h \in H$, on a défini, $\tau(gH) = \|X\|$. Enfin, on note Θ la fonction sur G/H telle que $\Theta(gH) = \Xi(g\sigma(g)^{-1})^{1/2}$ pour $g \in G$.

2. Fonctions de type $II(\Lambda)$

Soit $\mathfrak{a}^d$ un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$, $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}^d_{\mathfrak{s}}$ et $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands du centralisateur (σ et θ stable) dans G de $\mathfrak{a}$, $L = Z_G(\mathfrak{a})$. On note comme précédemment $\mathfrak{a}^d_M := \mathfrak{a}^d_{\mathfrak{t}}$ et on fixe un élément $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$ (donc réel sur $\mathfrak{a}^d_M$) vérifiant la condition:

$$\Lambda \text{ est régulier par rapport aux racines de } \mathfrak{a}^d \text{ dans le centralisateur de } \mathfrak{a} \text{ dans } \mathfrak{g}^d. \tag{2.1}$$

On considère un sous-espace V de $C^\infty(K)$, de dimension finie et invariant par les translations à gauche et à droite associées aux éléments de K (on dira biinvariant par K dans la suite). Si $\varepsilon > 0$, on note:

$$\mathfrak{a}^*_\varepsilon := \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \|Re\, \nu\| < \varepsilon\}.$$

Définition 1. Étant donné les réels $\varepsilon > 0$ et $r > 0$, on dira que F est une fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes:

(i) F est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{a}^*_\varepsilon \times G/H$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon$ et $x \in G/H$, $F_\nu(x) = F(\nu, x)$. (2.2)

(ii) Pour tout $x \in G/H$ et $D \in U(\mathfrak{g})$, la fonction $\nu \mapsto L_D F_\nu(x)$ est holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$. (2.3)

(iii) Pour tout $\nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon$, la fonction F_ν est $\mathbb{D}(G/H)$ propre pour la valeur propre $\Lambda + \nu$. (2.4)

(iv) $\forall D \in U(\mathfrak{g})$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$, $\forall x \in G/H$, $\forall \nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon$, $|L_D F_\nu(x)| \leqslant C\, |(\nu, x)|^n\, \Theta(x)\, e^{r\, \|Re\, \nu\|\, \tau(x)}$. (2.5)

(v) Si on définit la fonction $\Phi: \mathfrak{a}^*_\varepsilon \times G/H \to C^\infty(K)$ par la relation:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon, \forall x \in G/H, \forall k \in K, \qquad (\Phi(\nu, x))(k) = F(\nu, kx), \tag{2.6}$$

Φ prend ses valeurs dans V.

Les conditions (i) à (iv) signifient, dans la terminologie de [D], que la fonction F^- définie par $F^-(\nu, x) = F(-\nu, x)$ appartient à l'espace $\mathcal{T}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r)$, i.e. est une famille uniformément tempérée de croissance exponentielle r. La condition (v) est une condition de K-finitude. Dans le cas où (ϖ, V_ϖ) est une représentation de dimension finie de K, on définit de façon évidente les fonctions $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$, ϖ-sphériques, par des conditions analogues à (i), (ii), (iii), (iv) (référées (2.2)′, ..., (2.5)′ par la suite). Il est clair que si F est une fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V et ϖ la représentation régulière droite de K dans V, la fonction Φ introduite en (v) est $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$, ϖ-sphérique.

On notera, pour F définie sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^* \times G/H$, S partie finie de $U(\mathfrak{g})$, $r>0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n,r}^{S,\varepsilon}(F) := \operatorname*{Sup}_{D \in S,\, v \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*,\, x \in G/H} |(v, x)|^{-n}\, \Theta(x)^{-1}\, e^{-r\,\|Re\, v\|\,\tau(x)}. \tag{2.7}$$

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $C^\infty(K)$, biinvariant par K, et $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ une base orthonormale de V pour le produit scalaire induit sur V par celui de $L^2(K)$. Si F est une fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, on lui associe les fonctions F_i, $i=1, ..., p$, définies sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^* \times G/H$ par la relation:

$$\forall v \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*,\ \forall x \in G/H, \qquad F_i(v, x) = \int_K F(v, kx)\, \overline{\varphi_i(k)}\, dk. \tag{2.8}$$

Alors:

$$\forall v \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*,\ \forall x \in G/H,\ \forall k \in K, \qquad F(v, kx) = \sum_{i=1}^{p} F_i(v, x)\, \varphi_i(k). \tag{2.9}$$

De même, si Φ est ϖ-sphérique de type $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$, et si $l \in V_\varpi^*$ est une forme linéaire, l'application $F_l \colon \mathfrak{a}_\varepsilon^* \times G/H \to \mathbb{C}$ définie par $F_l(v, x) = \langle \Phi(v, x), l \rangle$ est $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, où V est le sous-espace de $C^\infty(K)$ engendré par les coefficients de V_ϖ. En particulier, si Φ est construite à partir de F, fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, par le procédé décrit en (v), on a $F(v, x) = \langle \Phi(v, x), l_0 \rangle$, où l_0 est la restriction à V de l'évaluation en l'élément neutre e de K.

Une fonction F sera dite $II_{hol}(\Lambda)$ de type V s'il existe des réels $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que F soit $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V. De même, une fonction F sera dite $II_{hol}(\Lambda)$, K-finie, s'il existe un sous-espace K-biinvariant de dimension finie V de $C^\infty(K)$ tel que F soit $II_{hol}(\Lambda)$ de type V. En outre, on a:

Lemme 1. *Soient Λ, V et $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus, et S une partie finie de $U(\mathfrak{g})$. Il existe une partie finie S' de $U(\mathfrak{g})$ telle que, pour tout $r > 0$, toute fonction F, $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, ..., p$, on ait*:

$$v_{n,r}^{S,\varepsilon}(F_i) \leqslant v_{n,r}^{S',\varepsilon}(F).$$

En particulier, les fonctions F_i sont $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V si c'est le cas pour F.

Démonstration. Si $D \in U(\mathfrak{g})$, on a:

$$\forall k \in K, \qquad Ad\, k(D) = \sum_{j=1}^{l} \psi_j(k)\, D_j,$$

pour des éléments $D_j \in U(\mathfrak{g})$ et des fonctions $\psi_j \in C^\infty(K)$. Alors, grâce à (2.8), on a:

$$L_D F_i(\nu, x) = \sum_{j=1}^{l} \int_K (L_{D_j} F(\nu, kx))\, \psi_j(k)\, \overline{\varphi_i(k)}\, dk.$$

Le Lemme en résulte immédiatement. ∎

Le Lemme 1, et la discussion qui précède celui-ci, permettent de traduire immédiatement les résultats de Carmona (cf. [C]) sur les fonction ϖ-sphériques aux fonctions de type V, ce que nous ferons par la suite sans autre référence.

LEMME 2. *Soient ε, ε' deux réels tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $u \in S(\mathfrak{a}^*)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$, tout $r > 0$ et toute fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$, F, on ait:*

$$\forall x \in G/H, \forall \nu \in \mathfrak{a}^*_{\varepsilon'}, \quad |\partial_u L_D F(\nu, x)| \leqslant C v_{n,r}^{D,\varepsilon}(F)\, |(\nu, x)|^{n + d^0 u}\, \Theta(x)\, e^{r \,\|Re\, \nu\|\, \tau(x)}.$$

Démonstration. Identique à celle du Lemme 18.2 de [B3], c'est à dire: on applique la formule intégrale de Cauchy en utilisant un polydisque centré en ν et de rayon $\mathrm{Inf}((2\sqrt{m})^{-1}(\varepsilon - \varepsilon'), (1 + \tau(x))^{-1})$, où $m = \dim \mathfrak{a}$. ∎

3. TERME CONSTANT DES FONCTIONS $II_{hol}(\Lambda)$

On fixe un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{s}^d$ de décomposition $\mathfrak{a}^d = \mathfrak{a}^d_M + \mathfrak{a}$ et une forme $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$ vérifiant les hypothèses du § 2. Si Q est un élément de $\mathscr{P}(G)$, on écrira (noter l'inversion de $\mathfrak{a}_Q$ et $\mathfrak{a}$ par rapport à [C] § 4.3):

$$W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) = \{ s \in Hom(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \mid \exists u_s \in Int\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\, u_{s|\mathfrak{a}_Q} = s \},$$

où $Int\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On note G^d un groupe de Lie connexe dans la classe de Harish-Chandra d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^d$, tel que le sous-groupe analytique de G^d d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^d$, K^d, soit un sous groupe compact maximal de G^d. On sait (cf. [C] § 4.3) que l'on peut réaliser s sous la forme $u_s = Ad\,k_s$ pour un élément k_s de K^d. De plus, si $\mathfrak{a}_Q$ est contenu dans un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}_1^d$, on peut choisir k_s de telle sorte que $Ad\,k_s(\mathfrak{a}_1^d) = \mathfrak{a}^d$. On choisit un tel $\mathfrak{a}_1^d$ et un tel k_s dans la suite. Par ailleurs, on peut choisir un élément k'_s de K tel que $(Ad\,k'_s)_{|\mathfrak{a}_Q} = s$ et $Ad\,k'_s(\mathfrak{a}_{\min}) = \mathfrak{a}_{\min}$, où $\mathfrak{a}_{\min}$ est un sous espace abélien maximal de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{a}_\varnothing$ (un tel sous-espace est σ-stable).

Le sous-groupe parabolique Q étant $\sigma\theta$-stable, il existe un élément $X_Q \in \mathfrak{a}_Q$ tel que l'algèbre de Lie de Q soit somme des sous-espaces propres de $ad\,X_Q$ associés aux valeurs propres positives ou nulles. Il est alors clair que $sX_Q = Ad\,k'_s(X_Q)$ vérifie des propriétés analogues relativement au sousgroupe parabolique $k'_s Q k'^{-1}_s$. Ce dernier est donc $\sigma\theta$-stable et ne dépend que de s. On le note Q^s. De plus, il contient un sous-groupe $P \in \mathscr{P}(G)$ tel que $L_P = MA$ et $\mathfrak{a}_{Q^s} \subseteq \mathfrak{a}$.

Soit F une fonction $II_{hol}(\Lambda)$, K-finie. Pour $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$, le terme constant $F_Q(\nu, \cdot)$ de $F(\nu, \cdot)$ le long de $Q \in \mathscr{P}(G)$ (cf. [C] § 3.2 pour la définition) est une fonction tempérée sur $L_Q/(L_Q \cap H)$. On fixe $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ tel que $\Lambda + \nu$ soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$. D'après l.c. Théorème 2, la fonction $F_Q(\nu, \cdot)$ admet une décomposition:

$$\forall l \in L_Q, \qquad F_Q(\nu, l) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} F_{Q,s}(\nu, l)$$

où chaque fonction $F_{Q,s}(\nu, \cdot)$ est $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ propre pour la valeur propre $(\Lambda + \nu) \circ Ad\,k_s \in (\mathfrak{a}_1^d)^*_{\mathbb{C}}$.

Lemme 3. *On conserve les notations ci-dessus. Soit F une fonction $II_{hol}(\Lambda)$, $Q \in \mathscr{P}(G)$, $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ tels qu'il existe $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ avec $\Lambda + \nu$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$, et tel que $F_{Q,s}(\nu) \neq 0$. Alors s vérifie la propriété suivante*:

Il existe un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}_s^d$ de $\mathfrak{s}^d$, contenant $\mathfrak{a}_Q$, et $k_s \in K^d$ tels que:

(i) *$Ad\,k_s$ induit s sur $\mathfrak{a}_Q$.*

(ii) *$Ad\,k_s(\mathfrak{a}_s^d) = \mathfrak{a}^d$.*

(iii) *$Ad\,k_s(\mathfrak{a}_s) = \mathfrak{a}$ (où $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}_s^d \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$) et $Ad\,k_s((\mathfrak{a}_s^d)_{\mathfrak{k}}) = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}^d$.*

On notera $W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ vérifiant ces propriétés. Pour $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, on fixera $\mathfrak{a}_s^d$ et k_s de telle sorte que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

Démonstration. Comme $F_{Q,s}(\nu, \cdot)$ est tempérée sur $L_Q/L_Q \cap H$ et $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ propre, il existe (d'après [C] Corollaire 2) un sous-espace de Cartan standard $\mathfrak{a}_1^d$ de $\mathfrak{s}^d$, contenant $\mathfrak{a}_Q$, admettant une décomposition $\mathfrak{a}_1^d = \mathfrak{a}_{1\mathfrak{k}}^d + \mathfrak{a}_1$, (où $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^d \cap \mathfrak{s}$ et $\mathfrak{a}_{1\mathfrak{k}}^d = \mathfrak{a}_1^d \cap \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$), une forme linéaire $\Lambda_1 \in (\mathfrak{a}_{1\mathfrak{k}}^d)^*$ régulière par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_1^d$ dans le centralisateur de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{g}^d$, et un élément $\nu_1 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*$ tel que $F_{Q,s}(\nu, \cdot)$ soit propre pour la valeur propre $\Lambda_1 + \nu_1 \in (\mathfrak{a}_1^d)^*_{\mathbb{C}}$. De plus, d'après les propriétés de $F_{Q,s}(\nu, \cdot)$, on a $\nu_{1|\mathfrak{a}_Q} = \nu \circ s$. Alors, d'après les propriétés de s, rappelées au début du paragraphe, il existe $k_1 \in K^d$ tel que $Ad\, k_1(\mathfrak{a}_1^d) = \mathfrak{a}^d$ et $Ad\, k_1$ induit s sur $\mathfrak{a}_Q$. De plus, $F_{Q,s}(\nu)$ est propre sous $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ pour la valeur propre $(\Lambda + \nu) \circ Ad\, k_{1_{|\mathfrak{a}_1^d}}$. On écrit:

$$(\Lambda + \nu) \circ Ad\, k_{1_{|\mathfrak{a}_1^d}} = \Lambda_2 + \nu_2,$$

avec $\Lambda_2 \in (\mathfrak{a}_{1\mathfrak{k}}^d)^*_{\mathbb{C}}$ et $\nu_2 \in (\mathfrak{a}_1)^*_{\mathbb{C}}$. Il existe donc, d'après le paramétrage des caractères de $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$, un élément $k_2 \in K^d$, qui normalise $\mathfrak{a}_1^d$ et centralise $\mathfrak{a}_Q$, tel que:

$$(\Lambda_2 + \nu_2) \circ Ad\, k_{2_{|\mathfrak{a}_1^d}} = \Lambda_1 + \nu_1.$$

On obtient finalement:

$$(\Lambda + \nu) \circ (Ad\, k_1 k_2)_{|\mathfrak{a}_1^d} = \Lambda_1 + \nu_1.$$

L'application du Lemme 2 § 4.3 de [C] permet de conclure que l'espace $\mathfrak{a}_s^d = \mathfrak{a}_1^d$ et l'élément $k_s = k_1 k_2$ conviennent. ∎

COROLLAIRE 1. (i) *On conserve les notations du Lemme* 3. *S'il existe un élément $k \in K$ tel que $(L_k F)_{Q,s} \not\equiv 0$, on a $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$.*

(ii) *S'il existe un élément $k \in K$ tel que le terme constant $(L_k F)_Q$ ne soit pas identiquement nul, l'ensemble $W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ est non vide.*

Démonstration. L'assertion (i) résulte immédiatement de l'application du Lemme 3 à $L_k F$. Rappelons qu'on n'a défini $F_{Q,s}(\nu)$ que lorsque $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ est tel que $\Lambda + \nu$ est régulier.

L'assertion (ii) est une conséquence de (i) et de la continuité de $(L_k F)_Q(\nu, \cdot)$ par rapport à $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ (cf. [C] Théorème 4.a). ∎

Si $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a}_s^d$, k_s sont comme dans l'énoncé du Lemme 3, on notera $\Lambda^s = \Lambda \circ Ad\ k_{s_{|\mathfrak{a}_{s\mathfrak{k}}^d}} \in (\mathfrak{a}_{s\mathfrak{k}}^d)^*$. Pour $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_s^*$ tel que $\Lambda^s + \nu$ soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_s^d$ dans $\mathfrak{g}^d$, on notera:

$$\forall l \in L_Q/L_Q \cap H, F_{Q,s}^s(\nu, l) = F_{Q,s}(\nu \circ Ad\ k_s^{-1}{}_{|\mathfrak{a}}, l). \tag{3.1}$$

Alors:

> La fonction $F_{Q,s}^s(\nu, \cdot)$ est $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ propre pour la valeur propre $\Lambda^s + \nu \in (\mathfrak{a}_s^d)^*$ de même que la fonction $(L_k F)_{Q,s}^s(\nu, \cdot)$ et ce pour tout $k \in K$. (3.2)

Si $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$, on définit $\prod_{\mathfrak{a}^d}$ sur $(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ par:

$$\forall \lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}, \qquad \prod\nolimits_{\mathfrak{a}^d}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)} (\alpha, \lambda), \tag{3.3}$$

où $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ est un ensemble de racines positives pour le système $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ des racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$. On remarque que $\prod_{\mathfrak{a}^d}$ ne dépend de $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ que par un facteur ± 1. C'est pourquoi notre notation ignore cette dépendance. La proposition suivante résulte facilement de [C] Corollaire 7 et la Remarque qui suit ce Corollaire.

Proposition 1. *On suppose que* $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $\mathfrak{a}^d$ *et* Λ *vérifient les hypothèses du* § 2 (*cf.* (2.1)).

(i) *Il existe des réels* $\bar{\varepsilon} \in\,]0, \varepsilon]$, $r' > 0$ *tels que, pour tout sous-espace* V *de dimension finie de* $C^\infty(K)$, *biinvariant par* K, *toute fonction* F, $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ *de type* V, *tout* $Q \in \mathscr{P}(G)$, *tout* $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ *et tout élément* $k \in K$, *la fonction* $(\nu, l) \mapsto \prod_{\mathfrak{a}^d}(\Lambda^s + \nu)(L_k F)^s_{Q,s}(\nu, l)$ *se prolonge en une fonction* $II_{hol}(\Lambda^s, \bar{\varepsilon}, r')$ *relativement à* $\mathfrak{a}^d_s$ *et* $L_Q/L_Q \cap H$. *On la notera* $\pi_s(L_k F)^s_{Q,s}$.

(ii) *Pour les fonctions définies sur* L_Q, *on note avec un indice inférieur* L_Q *placé à gauche, les seminormes introduites au* § 2. *Soient* ε, r, $\bar{\varepsilon}$ *et* r' *comme en* (i). *Soient* V *un sous-espace de dimension finie de* $C^\infty(K)$, *biinvariant par* K, S *une partie finie de* $U(\mathfrak{l}_Q)$. *Alors, il existe une partie finie* S' *de* $U(\mathfrak{g})$ *et un entier* $d \in \mathbb{N}$ *tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait*:

$$\forall k \in K, \qquad {}_{L_Q}\nu^{S, \bar{\varepsilon}}_{n+d, r'}(\pi_s(L_k F)^s_{Q,s}) \leqslant \nu^{S', \varepsilon}_{n, r}(F).$$

Démonstration. Il suffit d'établir la Proposition avec $k = e$, puis d'appliquer le résultat à $L_k F$ qui est également de type V, en remarquant que $\nu^{S',\varepsilon}_{n,r'}(L_k F) = \nu^{S',\varepsilon}_{n,r'}(F)$ pour tout $k \in K$. On déduit de [C] Théorème 5, Corollaire 7 et Remarque 14, l'existence de $\bar{\varepsilon} \in\,]0, \varepsilon]$, $r' > 0$ tels que, pour tout F, V, Q, s, k comme dans (i), tout $l \in L_Q/L_Q \cap H$, $\nu \mapsto \prod_{\mathfrak{a}^d}(\Lambda^s + \nu)\, F^s_{Q,s}(\nu, l)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $(\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{s}})_{\bar{\varepsilon}}$ notée $\pi_s F^s_{Q,s}$ qui vérifie l'inégalité de (ii) avec S réduit au singleton $\{1\}$ et $k = e$ pour un d et un S' indépendants de F de type V. Ensuite, il faut appliquer ce résultat à $L_D F$ pour $D \in U(\mathfrak{l}_Q)$, en observant que $(L_D F)_{Q,s} = L_D(F_{Q,s})$ et que $L_D F$ est de type V' pour un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(K)$, biinvariant par K. ∎

4. Fonctions $II'_{hol}(\Lambda)$

Définition 2. On dit qu'une fonction $II_{hol}(\Lambda)$ est $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ pour $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ (resp. $II'_{hol}(\Lambda)$) si, pour tout $Q \in \mathscr{P}(G)$, $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, $k \in K$, $(L_k F)^s_{Q,s}$ se prolonge en une fonction $II_{hol}(\Lambda^s, \varepsilon, r)$ (resp. $II_{hol}(\Lambda^s)$).

On remarque que si F est une fonction $II'_{hol}(\Lambda)$, il existe $\varepsilon > 0$, $r > 0$ tels que F soit $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ car $\mathscr{P}(G)$ est fini.

Lemme 4. *Soit F une fonction $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$. Alors, pour tout $Q \in \mathscr{P}(G)$, $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, $k \in K$, la fonction $(L_k F)^s_{Q,s}$ est une fonction $II'_{hol}(\Lambda^s, \varepsilon, r)$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition et du Corollaire 5b de [C]. ∎

La proposition suivante est essentiellement une reformulation de la Proposition 1 (i).

Proposition 2. *Soient ε, r strictement positifs, $\mathfrak{a}^d$ et Λ comme au paragraphe 2 (cf. (2.1)). Pour toute fonction K-finie F, $II_{hol}(\Lambda)$ de type V, la fonction πF: $(\nu, x) \mapsto \prod_{\mathfrak{a}^d}(\Lambda + \nu)\, F(\nu, x)$ est de type $II'_{hol}(\Lambda)$. Plus précisément, pour ε et r strictement positifs donnés, il existe des réels $\bar{\varepsilon} \in]0, \varepsilon]$ et $r' > 0$, indépendants de V, tels que si F est $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, la fonction πF est $II'_{hol}(\Lambda, \bar{\varepsilon}, r')$.*

On veut maintenant étendre les estimations pour πF données dans la Proposition 1 (ii) à toutes les fonctions $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$.

Proposition 3. *Soient $\varepsilon, r > 0$, $\mathfrak{a}^d$, et Λ comme au paragraphe 2. Il existe $\bar{\varepsilon}_1 \in]0, \varepsilon]$ et $r' > 0$ tels que, pour tout sous-espace V de $C^\infty(K)$, biinvariant par K, toute partie finie S de $U(\mathfrak{l}_Q)$, et tout sous-groupe $Q \in \mathscr{P}(G)$, il existe une partie finie S' de $U(\mathfrak{g})$ et un entier $d \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition suivante: Pour toute fonction F, $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V et tout $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$_{L_Q}\nu^{S, \bar{\varepsilon}_1}_{n+d, r'}(F^s_{Q,s}) \leqslant \nu^{S', \varepsilon}_{n, r}(F).$$

Démonstration. On obtient les estimations de $\pi_s F^s_{Q,s}$ sur $\mathfrak{a}^*_{\bar{\varepsilon}} \times L_Q/L_Q \cap H$ grâce à la Proposition 1 (ii). On applique alors le Lemme 22 de [D] avec $\varepsilon' = \bar{\varepsilon}/2$. Finalement, $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}/2$ convient. ∎

5. Paquets d'ondes

On fixe $\mathfrak{a}^d$ et Λ comme au paragraphe 2 (cf. (2.1)). On note $d\nu$ une mesure de Lebesgue sur $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ et $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ l'espace de Schwartz sur $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$.

Lemme 5. *Soit F une fonction $II_{hol}(\Lambda)$ et K-finie.*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ *et* $x \in G/H$, *l'intégrale* $\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \alpha(v)$ $F(v, x)\, dv$ *est absolument convergente. On la notera* $\mathscr{W}_{\alpha, F}(x)$.
La fonction $\mathscr{W}_{\alpha, F}$ *est de classe* C^∞ *sur* G/H *et on a*:

$$\forall D \in U(\mathfrak{g}), \qquad L_D \mathscr{W}_{\alpha, F} = \mathscr{W}_{\alpha, L_D F}.$$

Démonstration. Immédiate, grâce aux majorations de F et de ses dérivées (cf. (2.5)). ▮

On note $\mathscr{C}(G/H)$ l'espace de Schwartz sur G/H muni de la topologie définie dans [B3] § 17.

THÉORÈME 1. *Soit* F *une fonction* $II'_{hol}(\Lambda)$, *K-finie. Alors, l'application* $\alpha \mapsto \mathscr{W}_{\alpha, F}$ *est une application linéaire continue de* $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ *dans* $\mathscr{C}(G/H)$.

Le Théorème résulte immédiatement du Théorème suivant qui le précise. ▮

THÉORÈME 1'. *Soient* $\mathfrak{a}^d$, Λ, ε, r *et* V *comme au paragraphe* 2, *et* p *une semi-norme continue sur* $\mathscr{C}(G/H)$. *Il existe une partie finie* S *de* $U(\mathfrak{g})$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe une semi-norme continue* q *sur* $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ *vérifiant*:
Pour toute fonction F, $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ *de type* V, $p(\mathscr{W}_{\alpha, F}) \leqslant \nu_{n, r}^{S, \varepsilon}(F)\, q(\alpha)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $\dim G/H$. Si $\dim G/H = 0$, le Théorème est clair. On suppose donc le Théorème vrai lorsque $\dim G/H < n$ et on le démontre pour $\dim G/H = n$. On se ramène au cas où p est une semi-norme de la forme $\mu_{D,j}$ associée à des éléments $D \in U(\mathfrak{g})$ et $j \in \mathbb{N}$ par la relation:

$$\forall f \in C^\infty(G/H), \qquad \mu_{D,j}(f) = \sup_{x \in G/H} \Theta(x)^{-1} (1 + \tau(x))^j \, |(L_D f)(x)|.$$

Si on tient compte du fait que F est $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, on voit que la fonction $L_D F$ est $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type $V' \subseteq C^\infty(K)$ ne dépendant que de D et V. On peut donc se ramener au cas $D = 1$.

Fixons un ensemble $\Delta^+_{\sigma\theta}$, de racines positives pour le système $\Delta_{\sigma\theta}$ des racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans l'algèbre $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ des points de $\mathfrak{g}$ fixés par $\sigma\theta$. On note $\mathscr{F}$ la famille des ensembles de racines positives du système de racines de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans $\mathfrak{g}$ qui contiennent $\Delta^+_{\sigma\theta}$. Si $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, on note $P_\varnothing(\mathscr{P}) = M_\varnothing A_\varnothing N_\varnothing(\mathscr{P})$ le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal de G dont le sous-groupe de Lévi θ-stable, centralisateur de $\mathfrak{a}_\varnothing$ dans G, admet une σ-décomposition de Langlands $L_\varnothing = M_\varnothing A_\varnothing$, et tel que $\mathfrak{n}_\varnothing(\mathscr{P}) = \sum_{\alpha \in \mathscr{P}} \mathfrak{g}^\alpha$. On note $\rho_{\mathscr{P}}$ au lieu de $\rho_{P_{\varnothing(\mathscr{P})}}$ et $\mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})$ au lieu de $\mathfrak{a}_{P_{\varnothing(\mathscr{P})}}^{+}$. Enfin, on note $\overline{\mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})}$ l'adhérence de $\mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{a}_{\varnothing}$. Alors, on sait que:

$$G = \bigcup_{\mathscr{P} \in \mathscr{F}} K \exp(\overline{\mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})})\, H.$$

Compte tenu du Lemme 1, on peut donc supposer que p est de la forme p'_j avec:

$$\forall f \in C^{\infty}(G/H), \qquad p'_j(f) = \operatorname*{Sup}_{\mathscr{P} \in \mathscr{F}} \operatorname*{Sup}_{X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})} \Theta(e^X)^{-1} (1 + \|X\|)^j\, |f(e^X)|,$$

puis, en tenant compte de l'encadrement de Θ ([B3] Proposition 17.2), supposer que p est de la forme p''_j avec:

$$p''_j(f) = \operatorname*{Sup}_{\mathscr{P} \in \mathscr{F}} \operatorname*{Sup}_{X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}^{+}(\mathscr{P})} e^{\rho_{\mathscr{P}}(X)} (1 + \|X\|)^j\, |f(e^X)|.$$

La démonstration du Théorème 1′ se scinde en deux cas, suivant que, dans la σ-décomposition de Langlands, $G = M_G A_G$, de G, on a $\dim A_G = 0$ ou $\dim A_G > 0$.

Premier cas: $\dim A_G > 0$. On sait que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, avec $\mathfrak{a}_1 := \mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_2 := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_G$. Alors, si F est de type $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon)$, $\nu_1 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*$ et $\nu_2 \in (\mathfrak{a}_2^*)_\varepsilon$ (i.e. $\nu_2 \in (\mathfrak{a}_2)^*_{\mathbb{C}}$ et $\|Re\, \nu_2\| < \varepsilon$) on a:

$$\forall m \in M_G, \forall a \in A_G, \qquad F(\nu_1 + \nu_2, ma) = a^{\nu_1} F(\nu_1 + \nu_2, m).$$

Fixons un élément j de $\mathbb{N}$ et notons $p = p''_j$. Utilisant l'argument usuel qui montre que la transformation de Fourier est un endomorphisme de l'espace de Schwartz, on voit qu'il existe un opérateur D_{ν_1} sur $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*$, à coefficients polynomiaux, tel que, pour toute fonction $II'_{hol}(\Lambda)$:

$$\forall m \in M_G, \forall a \in A_G,$$

$$(1 + \tau(a))^j\, |\mathscr{W}_{\alpha, F}(ma)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\nu_1 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*} \left| \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}_2^*} D_{\nu_1}(\alpha(\nu_1 + \nu_2)\, F(\nu_1 + \nu_2, m))\, d\nu_2 \right|.$$

Développant $D_{\nu_1}(\alpha(\nu_1 + \nu_2)\, F(\nu_1 + \nu_2, m))$ grâce à la formule de Leibniz, on prouve l'existence d'éléments $D'_1, ..., D'_t, D''_1, ..., D''_t$ de $S(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*)$ et de polynômes $q_1, ..., q_t$ sur $(\mathfrak{a}_1^*)_{\mathbb{C}}$ tels que:

$$\forall m \in M_G, \forall a \in A_G,$$

$$(1 + \tau(a))^j\, |\mathscr{W}_{\alpha, F}(ma)|$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{i = 1, ..., t} \operatorname*{Sup}_{\nu_1 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*} \left| q_i(\nu_1) \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}_2^*} D'_i \alpha(\nu_1 + \nu_2)\, D''_i F(\nu_1 + \nu_2, m)\, d\nu_2 \right|$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence aux fonctions $\alpha'_{\nu_1} \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_2^*)$ (resp. F_{ν_1}) définies pour tout $\nu_1 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_1^*$ sur $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_2^*$ (resp. $(\mathfrak{a}_2^*)_\varepsilon \times M_G$), par:

$$\forall \nu_2 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_2^*, \qquad \alpha'_{\nu_1}(\nu_2) = q_i(\nu_1)\, D'_i \alpha(\nu_1 + \nu_2),$$

et

$$\forall m \in M_G, \forall \nu_2 \in (\mathfrak{a}_2^*)_\varepsilon, \qquad F_{\nu_1}(\nu_2, m) = D''_i F(\nu_1 + \nu_2, m),$$

respectivement.

D'après le Lemme 2, les fonctions F_{ν_1} sont de type $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon', r)$ pour tout $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$, avec contrôle des semi-normes, et de type V (noter que $K \cap M_G = K$). Pour conclure, il suffit de remarquer que si q est une semi-norme continue sur l'espace de Schwartz de $\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}^*$ et D un opérateur différentiel sur $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ à coefficients polynomiaux, $q \circ D$ est encore continue. Ceci achève la partie de la démonstration de l'étape de la récurrence concernant le cas où $\dim A_G > 0$.

Deuxième cas: $\dim A_G = 0$. Le cas $K = G$ étant trivial, on va supposer $K \neq G$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{P}(G)$ ne se réduit pas au singleton $\{G\}$. On va commencer par rappeler un résultat de [C] (Théorème 4 et la Remarque qui le suit). Ici on a prolongé par continuité les inégalités.

Lemme 6. *On conserve les notations du Théorème* 1′ (*i.e.* Λ, ε, r, V *fixés*). *Il existe un réel* $\bar{\varepsilon} > 0$ *une partie finie* S *de* $U(\mathfrak{g})$, *un entier* $d \in \mathbb{N}$, *et un réel* $\bar{\delta} > 0$ *tels que*:

Pour tout $Q \in \mathscr{P}(G)$, *tout* $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ *vérifiant* $P_\varnothing(\mathscr{P}) \subseteq Q$, *toute fonction* F, $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ *de type* V, *tout entier* $n \geqslant d$, *on a*:

$$\forall X \in \overline{\mathfrak{a}_P^+}, \forall a \in \exp \overline{\mathfrak{a}_\varnothing^+(\mathscr{P})}, \forall \nu \in \mathfrak{a}_{\bar{\varepsilon}}^*,$$

$$|d_Q(ae^X)\, F(\nu, ae^X) - F_Q(\nu, ae^X)|$$
$$\leqslant \nu_{n-d,\, r}^{S,\, \varepsilon}(F)\, |(\nu, a)|^n\, a^{-\rho_{\mathscr{P},Q}} e^{r\, \|Re\, \nu\| \cdot \|\log a\|} e^{-\bar{\delta}\beta_Q(X)} (1 + \|X\|)^{3n+3}.$$

Ici, *on a défini*:

$$\forall X \in \mathfrak{a}_\varnothing, \rho_{\mathscr{P},Q}(X) = 1/2(Tr\, ad\, X_{|\mathfrak{n}_\varnothing(\mathscr{P}) \cap \mathfrak{m}_Q}),$$
$$\forall X \in \mathfrak{a}_Q, \beta_Q(X) = Inf\{\alpha(X) \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{a}_Q)\},$$

et

$$\forall m \in M_Q, \forall a \in A_Q, \qquad d_Q(ma) = a^{\rho_Q}.$$

Fin de la démonstration du Théorème 1′. On fixe $j \in \mathbb{N}$ et on prend $p = p''_j$. Pour $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, on note $S^+_{\mathscr{P}} = \{X \in \mathfrak{a}^+_{\varnothing}(\mathscr{P}) \mid \|X\| = 1\}$. Soit $X_0 \in S^+_{\mathscr{P}}$, et Q l'élément de $\mathscr{P}(G)$ défini par X_0. Cela signifie que L_Q est le centralisateur de X_0 dans G, et que le groupe N_Q a pour algèbre de Lie $\mathfrak{n}_Q := \sum_{\alpha \in \mathscr{P},\, \alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Par construction, X_0 est un élément de $\mathfrak{a}^+_Q$. Soit Ω_0 un voisinage ouvert de X_0 dans $S^+_{\mathscr{P}}$ tel que, pour tout élément X de Ω_0 on ait $\alpha(X) \geqslant \alpha(X_0)/2$ pour tout $\alpha \in \mathscr{P}$. Avec les notations du Lemme précédent, on pose $\delta' := \bar{\delta}\beta_Q(X_0)/4$. C'est un réel strictement positif. Si $Y \in \Omega_0$ et $t > 0$, l'élément $t(Y - X_0/2)$ appartient à $\mathfrak{a}^+_{\varnothing}(\mathscr{P})$. Si on pose $a = \exp t(Y - X_0/2)$ et $X = tX_0/2 \in \mathfrak{a}^+_Q$, le Lemme précédent implique (après division par $d_Q(e^{tY})$):

Pour toute fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, F, pour tout entier $n \geqslant d$, on a:

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall Y \in \Omega_0,\ \forall \nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*,$$

$$|F(\nu, e^{tY}) - d_Q(e^{-tY})\, F_Q(\nu, e^{tY})|$$
$$\leqslant (3/2)^{3n+3}\, \nu^{S,\varepsilon}_{n-d,r}(F)(1 + \|\nu\|)^n\, e^{-t\rho_{\mathscr{P}}(Y)}(1 + t\, \|\log a\|)^n\, e^{-t\bar{\delta}\beta_Q(X_0)/2}, \tag{5.1}$$

car $\|X\| = \|X_0\|/2 = 1/2$ et $d_Q(e^{-tY})\, a^{-\rho_{\mathscr{P},Q}} = e^{-t\rho_{\mathscr{P}}(Y)}$. Soit $C > 0$ une constante telle que

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall Y \in \Omega_0, \qquad (1 + t\, \|Y - X_0/2\|) \leqslant C(1 + t) \tag{5.2}$$

et soit $C'_n > 0$ telle que:

$$\forall t \geqslant 0, \qquad (3/2)^n\, (1 + t)^n\, e^{-t\delta'} \leqslant C'_n(1 + t)^{-j}. \tag{5.3}$$

Alors, avec les notations et hypothèses de (5.1):

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall Y \in \Omega_0,\ \forall \nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*,$$

$$|F(\nu, e^{tY}) - d_Q(e^{-tY})\, F_Q(\nu, e^{tY})|$$
$$\leqslant C^n C'_n \nu^{S,\varepsilon}_{n-d,r}(F)(1 + \|\nu\|)^n\, (1 + t)^{-j}\, e^{-t\rho_{\mathscr{P}}(Y)}. \tag{5.4}$$

Si n est un entier fixé, il existe une seminorme continue q_n sur $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ telle que:

$$\forall \alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*), \qquad \left| \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} (1 + \|\nu\|)^n\, \alpha(\nu)\, d\nu \right| \leqslant q_n(\alpha). \tag{5.5}$$

On utilise maintenant la décomposition $F_Q = \sum_{s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} F_{Q,s}$ et on applique l'hypothèse de récurrence aux fonctions $F^s_{Q,s}$. Si on tient compte de la Proposition 3, on obtient, avec les hypothèses du Théorème 1′:

Il existe une partie finie S' de $U(\mathfrak{l}_Q)$ telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une seminorme continue q'_n sur $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ vérifiant:

Pour toute fonction F, $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, tout $\alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$, et tout $t \geqslant 0$:

$$\left| \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \alpha(v)\, F_Q(v, e^{tY})\, dv \right| \leqslant v_{n,r}^{S',\varepsilon}(F)\, q'_n(\alpha)(1+t)^{-j}\, e^{-t\rho_{\mathscr{P},Q}(Y)}. \qquad 5.6)$$

Intégrant la relation (5.4) contre $|\alpha|$, avec $\alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$, et tenant compte des équations (5.4), (5.5) et (5.6), on trouve qu'il existe une partie finie S'' de $U(\mathfrak{g})$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une seminorme continue q''_n sur $\mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*)$, tout F, fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon, r)$ de type V, on ait:

$$|\mathscr{W}_{\alpha, F}(e^{tY})| \leqslant v_{n,r}^{S'',\varepsilon}(F)\, q''_n(\alpha)(1+t)^{-j}\, e^{-t\rho_{\mathscr{P}}(Y)}. \qquad (5.7)$$

Si on tient compte du fait que l'espace compact $S_{\mathscr{P}}^{+}$ peut être recouvert par un nombre fini de tels ouverts Ω_0, ainsi que de la finitude de l'ensemble $\mathscr{F}$, on déduit de (5.7) la majoration cherchée pour $p''_j(\mathscr{W}_{\alpha, F})$. ∎

6. Une condition suffisante pour qu'une fonction soit de type $II'_{hol}(\Lambda)$

Les notations et les hypothèses sont celles du paragraphe 2. En particulier, on suppose que la condition (2.1) est satisfaite. On dira qu'un hyperplan affine complexe $\mathscr{H}$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est de direction réelle si $\mathscr{H}$ est défini par une équation $p=0$, où p est une fonction affine sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ de la forme $p: v \mapsto v(X)+z$ pour un élément $X \in \mathfrak{a} \backslash \{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Une telle fonction affine sera dite fonction affine de direction réelle sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

Lemme 7. *Si $\mathscr{H}$ est un hyperplan complexe affine de direction réelle de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* = \varnothing$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{H} \cap \mathfrak{a}_{\varepsilon}^* = \varnothing$.*

Démonstration. On suppose $\mathscr{H}$ défini par son équation p, i.e., $\mathscr{H} = \{v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid p(v) \equiv v(X) + z = 0\}$, avec $X \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathbb{C}$. L'hypothèse $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* = \varnothing$ implique $Re\, z \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, la condition $\|v\| < \varepsilon$ implique $|p(v)| < |Re\, z|$. Dans ce cas, $\mathscr{H} \cap \mathfrak{a}_{\varepsilon}^* = \varnothing$. ∎

Lemme 8. *Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de direction réelle et d'équation $p=0$. On suppose que $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* \neq \varnothing$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{a}_{\varepsilon}^* \backslash \mathscr{H}$ telle que pf se prolonge en une fonction g, holomorphe sur $\mathfrak{a}_{\varepsilon}^*$. Si g est identiquement nulle sur $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$, la fonction f est holomorphe sur $\mathfrak{a}_{\varepsilon}^*$.*

Démonstration. On peut supposer p de la forme $v \mapsto v(X) + z$, avec $X \in \mathfrak{a} \backslash \{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Comme $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* \neq \emptyset$, on a $z \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$, et $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ est un hyperplan affine de $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$. Par prolongement holomorphe des identités, on déduit de nos hypothèses que $g = 0$ sur $\mathscr{H} \cap \mathfrak{a}_\varepsilon^*$. Il est alors clair que g s'écrit sous la forme $g = pf_1$ avec f_1 holomorphe sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$. Pour cela, il suffit de voir qu'une fonction φ, holomorphe sur un polydisque $D = \prod_{i=1}^n D_i$ vérifiant $\varphi(0, z_2, ..., z_n) = 0$ pour $(z_2, ..., z_n) \in \prod_{i=2}^n D_i$, peut s'écrire sous la forme $z_1 \psi(z_1, ..., z_n)$, avec ψ holomorphe sur D. Cette vérification se fait de manière élémentaire en utilisant le développement de φ en série entière. Ceci achève de démontrer le Lemme.

Lemme 9. *Si $Q \in \mathscr{P}(G)$ est tel que $W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \neq \emptyset$, et* $\dim \mathfrak{a}_Q = \dim \mathfrak{a}$, *pour tout élément $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ il existe un élément $x \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ tel que $Q^s = xQx^{-1}$ (cf. au début du paragraphe 3 la définition de Q^s, qui vérifie ici $\mathfrak{a}_{Q^s} = \mathfrak{a}$).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}_{\min}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{a}_\emptyset$. Si $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, il existe un élément $k \in N_K(\mathfrak{a}_{\min})$ tel que $Ad\, k$ induise sur $\mathfrak{a}_Q$ l'application s. Le groupe Q^s, défini comme kQk^{-1} est $\sigma\theta$-stable. Par la suite, on notera $P = Q^s$. La condition $\dim \mathfrak{a}_Q = \dim \mathfrak{a}$ implique que $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$. Soit $P_\emptyset$ un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal contenu dans P. D'après [B2] Lemme 2.5, il existe un élément $k_1 \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset) \cap N_K(\mathfrak{a}_{\min})$ tel que le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable $P_1 = k_1 Q k_1^{-1}$ contienne $P_\emptyset$. Comme k_1 normalise $\mathfrak{a}_\emptyset$, on a $P_1 \in \mathscr{P}(G)$ et $\mathfrak{a}_{P_1} = Ad\, k_1(\mathfrak{a}_Q)$. Les deux sous-groupes paraboliques P et P_1 contiennent $P_\emptyset$, donc un sous-groupe parabolique minimal $P_{\min}$ de G, sous-groupe dont le facteur de Lévi θ-stable est égal au centralisateur de $\mathfrak{a}_{\min}$ dans G. Ces deux groupes étant conjugués par un élément de $N_K(\mathfrak{a}_{\min})$, les parties paraboliques Ξ et Ξ_1 du système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\min})$ de $\mathfrak{a}_{\min}$ dans $\mathfrak{g}$ correspondant à P et P_1 sont conjuguées par un élément du groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\min})$ et contiennent un même ensemble de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\min})$. Dans ce cas (cf. [W] Prop. 1.1.2.12), ces systèmes paraboliques sont égaux et $P = P_1$. Cela signifie que $\mathfrak{a}_{P_1} = \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$ et que l'élément $x = k_1$ convient. ∎

Définition 3. On dira qu'une fonction F est $II_{mer}(\Lambda)$, K-finie, si et seulement si F est définie sur l'espace produit de G/H par $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ privé d'un nombre fini d'hyperplans affines complexes de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, de directions réelles (ceci pour un $\varepsilon > 0$), et s'il existe un réel $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$ et un produit fini p de fonctions affines, de directions réelles sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, tels que pF se prolonge à $\mathfrak{a}_{\varepsilon'}^* \times G/H$ en une fonction F_1, $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon')$, K-finie.

Pour une telle fonction, on peut choisir $\bar{\varepsilon}'$ tel que les fonctions $F^s_{Q,s}(v^s) := (p(v^s))^{-1}(F_1)^s_{Q,s}(v^s)$ soient définies pour v élément de $\mathfrak{a}^*_{\bar{\varepsilon}'}$, privé d'un nombre fini d'hyperplans affines complexes de directions réelles (avec la convention $v^s = v \circ s$). La fonction $F^s_{Q,s}$ ainsi définie est $II_{mer}(\Lambda^s)$ puisque, d'après [C] Théorème 5 et Corollaire 7, c'est déjà le cas pour $(F_1)^s_{Q,s}$.

THÉORÈME 2. *Soit F une fonction $II_{mer}(\Lambda)$, K-finie. On suppose que, pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathscr{P}(G)$ de la forme xPx^{-1} pour un élément x de $N_K(\mathfrak{a}_\varnothing)$ et un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P vérifiant $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$, on ait: Pour tout $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, tout $k \in K$, tout $l \in L_Q/L_Q \cap H$, et tout $v_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_Q$, la fonction $v \mapsto (L_k F)^s_{Q,s}(v, l)$ est localement bornée au voisinage de v_0.*

Alors:

(i) *Il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que la fonction F se prolonge sur $\mathfrak{a}^*_{\varepsilon_1} \times G/H$ en une fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon_1)$, notée encore F.*

(ii) *On peut, dans* (i), *choisir $\varepsilon_1 > 0$ pour que F soit une fonction $II'_{hol}(\Lambda, \varepsilon_1)$.*

Démonstration. On choisit $\varepsilon > 0$ et p produit de fonctions affines complexes de directions réelles sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ de telle sorte que pF se prolonge à $\mathfrak{a}^*_\varepsilon \times G/H$ en une fonction $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon)$, K-finie, F_1. En procédant par récurrence sur le degré de p, on se ramène au cas où le degré de p est égal à un, ce qu'on supposera par la suite. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperplan affine complexe, de direction réelle, d'équation $p = 0$. Si $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* = \varnothing$, on peut, par utilisation du Lemme 7, modifier ε de façon à ce que $\mathscr{H} \cap \mathfrak{a}^*_\varepsilon = \varnothing$. L'application de l'argument utilisé dans la démonstration du Lemme 22 de [D] permet d'affirmer que F est $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon/2)$. Ceci achève de prouver (i) dans le cas où $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* = \varnothing$.

On suppose désormais que $\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^* \neq \varnothing$. On va voir que F_1 est identiquement nulle sur $(\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*) \times G/H$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément $v_0 \in \mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ tel que $F_1(v_0, \cdot)$ ne soit pas identiquement nulle sur G/H. Choisissons un élément $Q \in \mathscr{P}(G)$, minimal parmi les éléments de $\mathscr{P}(G)$ vérifiant la condition: il existe $k \in K$, $l \in L_Q$ tels que $(L_k F_1)_Q(v_0, l) \neq 0$. Quitte à remplacer F par $L_k F$, on peut supposer $k = e$. Alors, il existe $a_0 \in A_Q$ tel que la fonction φ: $m(M_Q \cap H) \mapsto (F_1)_Q(v_0, ma_0)$ ne soit pas nulle sur $M_Q/(M_Q \cap H)$. De plus, le choix de Q est tel que, d'après la Proposition 6 de [C], la fonction φ est de carré intégrable sur $M_Q/(M_Q \cap H)$. Il faut remarquer que, pour appliquer cette proposition aux fonctions K-finies et non aux fonctions ϖ-sphériques, on doit faire une hypothèse portant sur l'ensemble des fonctions translatées de F_1 par les éléments de K. Cette hypothèse est ici satisfaite. De plus, l'examen de la démonstration de cette proposition montre que l'on n'utilise que des sous-groupes paraboliques standards. Ceci nous permet de l'utiliser. La fonction φ est donc de carré intégrable sur $M_Q/(M_Q \cap H)$, $K \cap M_Q$-finie et annulée par un idéal de codimension finie de $\mathbb{D}(M_Q/M_Q \cap H)$. Par une extension du Lemme 14 de [D] au cas des fonctions de carré intégrable, on voit que φ est un vecteur C^∞ de la représentation régulière de M_Q sur $L^2(M_Q/M_Q \cap H)$. Ce vecteur engendre un $(\mathfrak{m}_Q, K \cap M_Q)$ sous-module de $L^2(M_Q/M_Q \cap H)^\infty$ qui est un module de Harish-Chandra. Il résulte alors du Théorème 1.5 de [B1] que φ s'écrit comme une somme finie $\varphi = \sum_{i=1}^p \varphi_i$ de fonctions φ_i, $i = 1, ..., p$, de carré intégrable sur $M_Q/M_Q \cap H$, et $\mathbb{D}(M_Q/M_Q \cap H)$ propres pour une valeur propre $\Lambda_i \in \sqrt{-1}(\mathfrak{a}^d_{1, M_Q})^*$ pour un sous-espace $\mathfrak{a}^d_{1, M_Q}$, abélien maximal de $(\mathfrak{m}_Q)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{s}^d$, entièrement contenu dans $\sqrt{-1}\mathfrak{k}$, espace dont l'existence résulte de la théorie des séries discrètes de $M_Q/M_Q \cap H$ (cf. [OM]). On sait en outre que, pour tout i, Λ_i est régulière par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d_{1, M_Q}$ dans $(\mathfrak{m}_Q)_{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, d'après le Théorème 3 de [C], pour tout $l \in L_Q$, la fonction $\nu \mapsto (F_1)_Q(\nu, l)$ est holomorphe en ν au voisinage de ν_0. En fait, en utilisant toute la force du Théorème 12.9 de [B3], la démonstration du Théorème 3 de [C] prouve que la fonction $(\nu, l) \mapsto (F_1)_Q(\nu, l)$ est de classe C^∞ sur $V(\nu_0) \times L_Q/L_Q \cap H$, où $V(\nu_0)$ est un voisinage ouvert de ν_0. Par ailleurs, comme $(F_1)_Q(\nu_0, \cdot) \neq 0$, le Lemme 3 implique que $W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \neq \emptyset$. Pour $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, choisissons $\mathfrak{a}^d_s$, k_s, Λ^s comme dans le Lemme 3. D'après les propriétés de la fonction $F_{Q,s}$, pour tout opérateur différentiel $D \in \mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ et tout $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ tel que $\Lambda + \nu$ soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$, on a:

$$\forall l \in L_Q/L_Q \cap H, \quad \left(\prod_{s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} (D - \gamma^Q_{\mathfrak{a}^d_s}(\Lambda^s + \nu^s, D)) \right) F_Q(\nu, l) = 0. \tag{6.1}$$

D'après ce qui a été dit précédemment, on voit que la relation (6.1) reste vraie pour tout $\nu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$, et en particulier pour ν_0. On définit $\mathfrak{a}^d_{s, M_Q} = \mathfrak{a}^d_s \cap \mathfrak{m}_Q$. Alors, la fonction ϕ se décompose en une somme finie de fonctions propres généralisées non toutes nulles pour des valeurs propres distinctes de la forme $(\Lambda^s + \nu^s)_{|\mathfrak{a}^d_{s,M_Q}}$, où $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$. Si on compare les deux décompositions de φ, on conclut (par exemple) que $(\Lambda_1, \mathfrak{a}^d_{1, M_Q})$ est conjugué par un élément du centralisateur de $\mathfrak{a}_Q$ dans K^d à un couple $(\Lambda^s + \nu^s{}_{|\mathfrak{a}^d_{s,M_Q}}, \mathfrak{a}^d_{s, M_Q})$. On déduit alors du Lemme 2 de [C] que $\mathfrak{a}^d_{s, M_Q} \subseteq \sqrt{-1}\mathfrak{k}$. D'après les propriétés des espaces $\mathfrak{a}^d_s$, ceci implique que la dimension de $\mathfrak{a}_Q$ est égale à celle de $\mathfrak{a}$. D'après le Lemme 9, il existe donc un élément $x \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ réalisant s et tel que $Q = xPx^{-1}$, et donc $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$. Mais d'après nos hypothèses, la définition des fonctions $F^s_{Q,s}$, et les propriétés de la fonction $(F_1)_Q$, on voit que la fonction $(F_1)_Q(\nu_0, \cdot)$ est nulle sur

$L_Q/L_Q \cap H$ puisque $p(v_0) = 0$. Ce constat contredit le fait que $\varphi \neq 0$. Cette contradiction montre que F_1 est identiquement nulle sur $(\mathscr{H} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*) \times G/H$. On déduit du Lemme 8 que, pour tout $x \in G/H$, la fonction $v \mapsto F(v, x)$ est holomorphe sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$. En utilisant l'argument du Lemme 22 de [D], on voit que F est $II_{hol}(\Lambda, \varepsilon/2)$, ce qui achève de démontrer (i).

Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que les fonctions $F^s_{Q,s}$ vérifient les mêmes hypothèses que la fonction F elle-même (cf. Définition 3). ∎

Remarque 1. Le Théorème 2, joint au Théorème 16.3 de [B3], montre que les intégrales d'Eisenstein de [B3] équation 13.2, sont des fonctions $II'_{hol}(\Lambda)$ (ou plutôt, des sommes de fonctions ϖ-sphériques de type $II'_{hol}(\Lambda_i)$ pour certains Λ_i). On peut donc prendre $\pi = 1$ dans les Théorèmes 19.1 et 19.2 de [B3].

Bibliographie

[B1] E. van den Ban, Invariant differential operators for a reductive symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula, *Ark. Mat.* **25** (1987), 175–187.

[B2] E. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space, I, *Ann. Sc. Ec. de Norm. Sup.* **21** (1988), 359–412.

[B3] E. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space, II. Eisenstein integrals, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.

[BS] E. van den Ban and H. Schlichtkrull, Fourier transform on a semi-simple symmetric space, Universiteit Utrecht, Preprint, 888, 1994.

[C] J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, Univ. Mars. Luminy, Preprint, 1994.

[D] P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs. Tempérance. Majorations. Petite matrice B, (à paraître dans *J. Funct. Anal.*).

[HC] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, II, *Invent. Math.* **36** (1976), 1–35.

[OM] T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1984), 331–390.

[W] G. Warner, "Harmonic analysis on semisimple Lie groups," Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1972.