JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 80, 284–307 (1988)

Quelques propriétés des représentations sphériques pour les espaces symétriques réductifs

ERIK VAN DEN BAN

Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematisch Instituut, Budapestlaan 6, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands

ET

PATRICK DELORME

Département de Mathématiques–Informatique, Unité associée au CNRS no. 225, Faculté des Sciences de Luminy, 70, route Léon Lachamp, 13288 Marseille Cedex 9, France

Communicated by M. Vergne

Received March 24, 1987; revised June 1, 1987

Let G/H be a reductive symmetric space and suppose V is an admissible $(\mathbf{g}, K)$-module of finite length possessing a linear functional $T \in V^*$ which is fixed by $\mathbf{h}$ and $H \cap K$. We prove that V can be mapped equivariantly into $C^\infty(G/H)$ such that T becomes the pull-back of the Dirac measure at the origin. Essential in the proof is the fact that the formal power series of certain matrix coefficients of V satisfy a system of differential equations with regular singularities.

Introduction

Soit G un groupe réel réductif dans la classe de Harish Chandra (cf. [1]) σ une involution de G et H un sous-groupe ouvert du groupe G^σ des points fixes de σ. Soit θ une involution de Cartan de G commutant à σ (cf. [1, Proposition 1.1]) et soit K le groupe des points fixes de θ. C'est un sous-groupe compact maximal de G, σ-stable. Soit $\mathbf{g}$ l'algèbre de Lie de G. Dans cet article, on appellera $\mathbf{g}$-module H-sphèrique la donnée d'un $(\mathbf{g}, K)$-module admissible de longueur finie (i.e., un module de Harish-Chandra) et d'un vecteur T dans le dual algébrique V^* de V, fixé par $K \cap H$ et par l'algèbre de Lie $\mathbf{h}$ de H. Dans cet article, nous montrons qu'une telle donnée détermine un morphisme i de $(\mathbf{g}, K)$-modules, $v \to F_v$, de V dans $C^\infty(G/H)$ tel que T coïncide avec la composée de i et de la mesure de Dirac à l'origine (Théorème 1). On peut appliquer ce résultat au cas où

0022-1236/88 $3.00

$G = G_1 \times G_1$, σ est la permutation des facteurs, H la diagonale de $G_1 \times G_1$, V est de la forme $V_1 \otimes V_1^*$ avec V_1, $(\mathbf{g}_1, K_1)$-module et V_1^* est le $(\mathbf{g}_1, K_1)$-module contragrédient (dual K_1-fini), et T est déterminé par la forme bilinéaire naturelle sur $V_1 \times V_1^*$. Dans ce cas on retrouve l'existence d'une application coefficient pour V_1 (cf. [6, Theorem 8.7]). Nous suivons pour démontrer notre résultat une méthode analogue à celle suggérée dans [6], introduction et p. 909 (voir aussi le manuscript [4, épilogue]) et dûe à Casselman, pour traiter le cas particulier ci-dessus (voir aussi [5]).

Expliquons briévement celle-ci dans un cas particulier: on va supposer v en outre fixé par K (en général il faut introduire des fonctions μ-sphériques, ce qui est technique, mais le principe est le même) et construire $F_v \in C^\infty(G/H)$. On notera $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{q}$ avec $\sigma|_\mathbf{q} = -\mathrm{Id}$ et $\mathbf{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ avec $\theta|_\mathbf{p} = -\mathrm{Id}$. On se fixe $\mathbf{a}_\varnothing$ un sous-espace abélien maximal de $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$.

Alors on sait que $G = K \exp \mathbf{a}_\varnothing H$. Si F_v existe (v fixé par K), F_v est K-invariante à gauche et H-invariante à droite, donc F_v est déterminé par $F_{v|\exp \mathbf{a}_\varnothing}$. Le fait que F_v soit annulé par un idéal de codimension finie du centre $Z(\mathbf{g})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathbf{g})$ de $\mathbf{g}$ (car V est admissible) se traduit par des équations differentielles satisfaites par cette restriction. Dans le cas $G = G_1 \times G_1$, $H = \mathrm{Diag}\, G_1$, Casselman a montré l'existence de F_v en étudiant ce système; il se trouve que ce système est en général à singularités régulières, de codimension finie, le lieu singulier étant des hyperplans définis par certaines racines de $\mathbf{a}_\varnothing$ dans $\mathbf{g}$.

Il prouve alors un résultat général non trivial sur les systèmes à singularités régulières et de codimension finie [4, Theorem 3.5.2] qui affirme que toute série formelle solution d'un tel système a un rayon de convergence non nul. Ce résultat est d'abord établi quand le lieu singulier est un diviseur à croisement normal et le cas général est traité en utilisant la résolution des singularités. Cependant, les coefficients des équations différentielles qui proviennent de la situation pour les groupes ont une propriété particulière: quand on les restreint à une droite complexe générique passant par l'origine, l'ordre de leurs pôles satisfait certaines estimations. Ceci nous permet d'éviter l'utilisation des outils généraux de [4] et de donner une démonstration élémentaire de ce résultat dans ce cas particulier (cf. appendice). Suivant une idée de Duistermaat nous nous ramenons à un problème à une variable et nous sommes en mesure d'utiliser les résultats classiques sur les équations de type Fuchs (à coefficients dans un espace de Banach). Un résultat de Korevaar et Wiegerinck [9], liant dérivées partielles et dérivées radiales d'une fonction, joue un rôle crucial.

La fin de la construction de F_v se réduit à un problème de prolongement de solutions d'equations différentielles, qui se résout simplement, puis à un problème de prolongement à G tout entier que l'on résout grâce à un travail antérieur [3].

1. Notations et Rappels

1.1. Si V est un espace vectoriel, on notera V^* son dual. Si V est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié, $S(V)$ l'algèbre symétrique de $V_{\mathbb{C}}$, $S^n(V)$ le sous-espace des éléments homogènes de degré n de $S(V)$. Lorsque V est de dimension finie, on identifiera $S(V)$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur V^*. Soit V (resp. E) un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie. On notera $0_0(V, E)$ l'espace des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans V à valeurs dans E. Si $E = \mathbb{C}$ on notera simplement $0_0(V)$. On notera $\mathscr{D}_0(V)$ l'espace des germes d'opérateurs différentiels analytiques au voisinage de 0 dans V. De la façon habituelle $0_0(V, E)$ est regardé comme un $\mathscr{D}_0(V)$-module. Par ∂ on dénotera l'unique homomorphisme d'algèbre $S(V) \to \mathscr{D}_0(V)$ déterminé par $(\partial(X)\Phi)(x) = (d/dt)\,\Phi(x+tX)|_{t=0}$ pour $X \in V$, $\Phi \in 0_0(V)$ et x suffisamment proche de 0. A un élément Φ de $0_0(V, E)$ on attache l'application linéaire φ de $S(V)$ dans E, définie par $D \to (\partial(D)\Phi)(0) = \varphi(D)$ appelée série formelle de Φ en 0. L'espace $\hat{0}_0(V, E)$ des applications linéaires $S(V) \to E$ est appelé espace des séries formelles à coefficients dans E en 0. L'application définie ci-dessus de $0_0(V, E)$ dans $\hat{0}_0(V, E)$ est injective et identifie $0_0(V, E)$ à un sous-espace de $\hat{0}_0(V, E)$. Nous munirons $\hat{0}_0(V, E)$ de la structure de groupe topologique dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par la famille $\{M^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ où M^k est le sous-espace constitué des éléments φ de $\hat{0}_0(V, E)$ vérifiant $\varphi(D) = 0$ si $d^0 D < k$.

Pour cette topologie, l'espace $S(V^*) \otimes E$ des fonctions polynomiales de V dans E est dense dans $\hat{0}_0(V, E)$. Donc $0_0(V, E)$ est dense dans $\hat{0}_0(V, E)$. L'évaluation en 0 des éléments de $0_0(V, E)$ admet une unique extension continue à $\hat{0}_0(V, E)$ que l'on notera e_0 (évaluation en 0). L'action de $\mathscr{D}_0(V)$ sur $0_0(V, E)$ s'étend uniquement en une action continue sur $\hat{0}_0(V, E)$. Si $X \in S(V)$, $\varphi \in \hat{0}_0(V, E)$ alors,

$$\begin{aligned}(\partial(X)\varphi)(D) &= e_0(\partial(DX)\varphi) \\ &= \varphi(DX)\end{aligned}$$

pour tout $D \in S(V)$.

Si $H_1, ..., H_l$ est une base de V, $h_1, ..., h_l$ sa base duale, nous écrirons aussi pour $\varphi \in \hat{0}_0(V, E)$

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{N}^l} \frac{1}{m!}\, \varphi(H_1^{m_1} \cdots H_l^{m_l})\, h_1^{m_1} \cdots h_l^{m_l},$$

où pour $m = (m_1, ..., m_l)$ on note $m! = m_1! \cdots m_l!$. On notera aussi $|m| = m_1 + \cdots + m_l$.

Si on dispose d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, j: $V \to W$, on notera j^* l'application naturelle de $\hat{0}_0(W)$ dans $\hat{0}_0(V)$. Cette application linéaire est continue et envoie $0_0(W)$ dans $0_0(V)$.

Si S est un groupe de Lie réel, S° désignera sa composante neutre, $\mathbf{s}$ son algèbre de Lie, $U(\mathbf{s})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathbf{s}_{\mathbb{C}}$ de $\mathbf{s}$ et $Z(\mathbf{s})$ le centre de $U(\mathbf{s})$. On notera $X \to X^t$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathbf{s})$. On désignera par β l'application canonique de $S(\mathbf{s})$ dans $U(\mathbf{s})$ (cf. [8, 2.4]). On notera $s \to L_s$ (resp. $s \to R_s$) la représentation régulière gauche (resp. droite) de S et $X \to L_X$ (resp. $X \to R_X$) la représentation de $U(\mathbf{s})$ obtenue par différentiation.

Si S est un groupe compact, on notera $\hat{S}$ son dual unitaire. Si $\delta \in \hat{S}$ et (μ, E) est une représentation de S on note E^δ la composante isotypique de type δ de E et E^S les invariants de E sous μ. Enfin si X est un espace muni d'une action de S on appellera fonction μ-sphérique sur X toute fonction de X dans E telle que:

$$\forall x \in X,\ \forall s \in S \qquad f(s \cdot x) = \mu(s)\, f(x).$$

1.2. On retient les notations de l'introduction. On note $\mathbf{c}$ le centre de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g}_1 = [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$. On fixe une forme bilinéaire B sur $\mathbf{g}$, négative définie sur $\mathbf{k}$ et positive définie sur $\mathbf{p}$, qui coïncide avec la forme de Killing sur $\mathbf{g}_1$, telle que $\mathbf{g}_1$ et $\mathbf{c}$ soient orthogonaux ainsi que $\mathbf{c} \cap \mathbf{h}$ et $\mathbf{c} \cap \mathbf{q}$.

On note $\mathbf{g}_{\sigma\theta} = \mathbf{k} \cap \mathbf{h} \oplus \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$, i.e., $\mathbf{g}_{\sigma\theta}$ est l'ensemble des points fixes de l'involution $\sigma\theta$ de $\mathbf{g}$. On note $\Delta_{\sigma\theta}$ (resp. $\Delta = \Delta(\mathbf{g}, \mathbf{a}_\phi)$) l'ensemble des racines de $\mathbf{a}_\phi$ dans $\mathbf{g}_{\sigma\theta}$ (resp. $\mathbf{g}$).

On se fixe une fois pour toutes un ensemble de racines positives $\Delta_{\sigma\theta}^+$ de $\Delta_{\sigma\theta}$. Notez que $\Delta_{\sigma\theta}$ est le système de racines de $(\mathbf{g}_{\sigma\theta}, \mathbf{a}_\varnothing)$ puisque $\mathbf{a}_\varnothing$ est un sous-espace de Cartan de $\mathbf{g}_{\sigma\theta}$. On définit $\mathbf{a}_\varnothing^-$ la chambre de Weyl négative correspondante, i.e., $\mathbf{a}_\varnothing^- = \{H \in \mathbf{a}_\varnothing \mid \alpha(H) < 0,\ \forall \alpha \in \Delta_{\sigma\theta}^+\}$. On rappelle (cf. [1, Proposition 1.3 et Corollaire 1.4]) que pour $X \in \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$, il existe un unique Y dans la fermeture $\mathrm{Cl}\,\mathbf{a}_\varnothing^-$ de $\mathbf{a}_\varnothing^-$ tel que $X = A\, d(k)\, Y$ pour un $k \in K \cap H^\circ$, et pour tout $g \in G$, il existe un unique $a \in \exp(\mathrm{Cl}\,\mathbf{a}_\varnothing^-)$ tel que $x \in KaH^\circ$. En outre, l'application de $K \times (\mathbf{p} \cap \mathbf{q}) \times (\mathbf{p} \cap \mathbf{h})$ dans G définie par $(k, X, Y) \to k(\exp X)(\exp Y)$ est un difféomorphisme.

On se fixe un choix d'un ensemble de racines positives Δ^+ de Δ tel que $\Delta_{\sigma\theta}^+ = \Delta_{\sigma\theta} \cap \Delta^+$. On pose $\mathbf{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbf{g}^\alpha$, $\mathbf{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbf{g}^{-\alpha}$, où pour $\alpha \in \Delta$, $\mathbf{g}^\alpha$ désigne le sous-espace radiciel dans $\mathbf{g}$ de $\mathbf{a}_\varnothing$ correspondant à α. On note $\mathbf{l}_\varnothing$ le centralisateur de $\mathbf{a}_\varnothing$ dans $\mathbf{g}$, $\mathbf{m}_\varnothing = \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kq}} \oplus \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}} \oplus \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{ph}}$ où $\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kq}} = \mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{k} \cap \mathbf{q}$ etc. Remarquons que $\mathbf{m}_\varnothing$ est une sous-algèbre de $\mathbf{g}$ (cf. [7] par exemple). En outre $\mathbf{g} = \mathbf{n}^- \oplus \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kq}} \oplus \mathbf{a}_\varnothing \oplus \mathbf{h}$ (cf. [2] lemme 3.4).

On notera $\mathscr{S}$ l'algèbre des fonctions définies sur l'ensemble $(\mathbf{a}_\varnothing)^{\mathrm{reg}}$ des points régulier de $\mathbf{a}_\varnothing$ pour le système de racines $\Delta_{\sigma\theta}$ et engendrée par $1, e^{\alpha(\cdot)}$ pour $\alpha \in \Delta$, $(1 - e^{2\alpha(\cdot)})^{-1}$ pour $\alpha \in \Delta_{\sigma\theta}$, $(1 + e^{2\beta(\cdot)})^{-1}$ pour $\beta \in \Delta^+$ avec $(\mathbf{g}^\beta)_- \neq \{0\}$. Ici $(\mathbf{g}^\beta)_-$ désigne le sous-espace propre de l'endomorphisme $\sigma\theta$ de $\mathbf{g}^\beta$ pour la valeur propre -1 ($\mathbf{g}^\beta$ est stable par $\sigma\theta$ car $\sigma\theta$ est l'identité sur $\mathbf{a}_\phi$).

1.3. On note $\mathscr{B} = U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes U(\mathbf{k}) \otimes_{U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{k}\mathbf{h}})} U(\mathbf{h})$. Clairement $\mathscr{B}$ est un module à droite sous $U(\mathbf{h})$ et à gauche sous $U(\mathbf{k})$. Alors pour tout $D \in U(\mathbf{g})$ il existe un unique $\Pi(D) \in \mathscr{S} \otimes \mathscr{A}$ tel que pour tout $a \in \exp \mathbf{a}_\varnothing^{\mathrm{reg}}$, $\Gamma_a(\Pi(D)) = D$.

Ici $\Gamma_a : \mathscr{S} \otimes \mathscr{B} \to U(\mathbf{g})$ est définie comme suit: $\Gamma_a(f \otimes H \otimes X \otimes Y) = f(\log a)\, X^a H Y$ où $f \in \mathscr{S}$, $H \in U(\mathbf{a}_\varnothing)$, $X \in U(\mathbf{k})$, $Y \in U(\mathbf{h})$ et X^a désigne l'action adjointe de a^{-1} sur X (cf. [1, lemme 4.2]).

2. Démonstration du résultat principal

2.1. Théorème 1. *Soit* (π, V) *un* $(\mathbf{g}, K)$*-module de longueur finie (i.e., un module de Harish Chandra),* T *un vecteur du dual algèbrique de* V *fixé par* $\mathbf{h}$ *et* $H \cap K$*. Alors*:

(i) *Pour tout* $v \in V$ *il existe une unique fonction analytique sur* G/H, F_v, *telle que pour tout* $D \in U(\mathbf{g})$ *et* $k \in K$ *on ait*: $(L_D L_k F_v)(e) = \langle \pi(D)\, \pi(k) v, T \rangle$, *où* e *est l'élément neutre de* G.

(ii) *L'application* i: $v \to F_v$ *est l'unique morphisme de* $(\mathbf{g}, K)$*-modules de* V *dans* $C^\infty(G/H)$ *tel que* T *coïncide avec la composée de* i *et de la mesure de Dirac en l'élément neutre.*

(iii) *Si* T *n' annule aucun sous-module non trivial de* V, i *est injectif. En particulier, c' est le cas si* V *est irréductible et* T *non nulle.*

Début de la démonstration du théorème 1.

L'unicité de F_v si elle existe est claire. Supposons (i) démontré. Soit j un morphisme de $(\mathbf{g}, K)$-modules de V dans $C^\infty(G/H)$. Les éléments de l'image de j sont K finis et annulés par un idéal de codimension finie de $Z(\mathbf{g})$. Il en résulte facilement qu'ils sont annulés par un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques et sont donc analytiques. Alors si j vérifie (ii) il coïncide nécessairement avec l'homomorphisme i, grâce à (i). Cet homomorphisme vérifie d'ailleurs clairement la propriété voulue. On vient donc de voir que (ii) résulte de (i). L'assertion (iii) est une conséquence immédiate de (i).

Il suffit donc de démontrer l'existence de F_v. Nous allons remplacer ce problème par un problème équivalent. Pour cela, soit $F \subset \hat{K}$, l'ensemble fini des K-types intervenant dans le sous-K-module de V engendré par v. On note $E = \bigoplus_{\delta \in F} C^\infty(K)^\delta$, la somme des composantes isotypiques de type δ, $\delta \in F$, de $C^\infty(K)$ pour la représentation régulière gauche. On note μ la restriction à E de la représentation régulière droite de K. Alors l'existence de F_v sera impliquée par la démonstration de l'assertion suivante:

(A) Il existe une fonction analytique de G/H dans E, Φ_v, telle que Φ_v soit μ-sphérique (i.e., $\Phi_v(kx) = \mu(k)\,\Phi_v(x)$ pour tout $k \in K$ et $x \in G/H$) et telle que pour tout $D \in U(\mathbf{g})$, $(L_D \Phi_v)(e)$ est égal, comme élément de E à la fonction $k \to \langle \pi(D)\,\pi(k^{-1})v, T\rangle$.

En effet, si l'existence de Φ_v est prouvée, la fonction F définie sur G/H par: $\forall x \in G/H$, $F(x) = (\Phi_v(x), \alpha_F)$ vérifie les propriétés voulues. Ici $\alpha_F = \sum_{\delta \in F} (\dim \delta)\bar{\chi}_\delta$ où χ_δ est le caractère de δ, et $(\cdot,\cdot)$ désigne la restriction à E du produit scalaire sur $L^2(K)$. La vérification, facile, est laissée au lecteur. Ceci montre que l'assertion (A) implique le point (i) du théorème 1. Nous allons donc démontrer l'assertion (A). Pour cela, on va s'intéresser aux équations différentielles satisfaites par Φ_v. Ceci fait l'object des numéros suivants:

2.2. On a $\mathbf{a}_\varnothing = (\mathbf{a}_\varnothing \cap [\mathbf{g}, \mathbf{g}]) \oplus (\mathbf{c} \cap \mathbf{a}_\varnothing)$ où $\mathbf{c}$ est le centre de $\mathbf{g}$. On choisit une base $\Lambda_{\mathbf{c}}$ de $(\mathbf{c} \cap \mathbf{a}_\varnothing)^*$ (que l'on identifie à un sous-espace de $\mathbf{a}_\varnothing^*$ grâce à la décomposition ci-dessus). On note Σ l'ensemble des racines simples de Δ^+ et $\Lambda = \Sigma \cup \Lambda_{\mathbf{c}}$ qui forme une base de $\mathbf{a}_\varnothing^*$.

On note $H_1, ..., H_l$ la base de $\mathbf{a}_\varnothing$ telle que Λ en soit la base duale. On notera pour $m = (m_1, ..., m_l) \in \mathbb{N}^l$, $H^m = H_1^{m_1} \cdots H_l^{m_l}$.

Soient $X = \{H \in (\mathbf{a}_\phi)^*_{\mathbb{C}} \mid -\pi < \operatorname{Im} \alpha(H) < \pi,\ \forall \alpha \in \Delta^+\}$ et

$$X^* = \{H \in X \mid \alpha(H) \neq 0,\ \forall \alpha \in \Delta^+_{\sigma\theta}\} \quad \text{et} \quad Y = X - X^*.$$

Noter que X et X^* sont des ouverts connexes de $(\mathbf{a}_\varnothing^*)_{\mathbb{C}}$. On remarquera également que l'on peut regarder $\mathscr{S}$ comme une algèbre de fonctions holomorphes sur X^*.

On note M le centralisateur dans $K \cap H$ de $\mathbf{a}_\varnothing$ et $\mathbf{m} = \mathbf{l}_{\varnothing, \mathbf{kh}}$ son algèbre de Lie.

On associe à tout $D \in Z(\mathbf{g})$ et à la représentation μ de K dans E un opérateur différentiel linéaire holomorphe $\Pi_\mu(D)$ sur X^* de la façon suivante: On définit d'abord une application linéaire

$$\eta_\mu : \mathscr{S} \otimes U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes U(\mathbf{k}) \underset{U(\mathbf{m})}{\otimes} U(\mathbf{h}) \to \mathscr{S} \otimes U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes \operatorname{Hom}(E^M, E)$$

par $\eta_\mu(f \otimes X \otimes Y \otimes Z) = f \otimes X \otimes (\varepsilon(Z)\,\mu(Y))$ où $f \in \mathscr{S}$, $X \in U(\mathbf{a}_\varnothing)$, $Y \in U(\mathbf{k})$, $Z \in U(\mathbf{h})$, ε est l'augmentation $U(\mathbf{h}) \to \mathbb{C}$ et $\mu(Y)$ est restreint à E^M. Alors on pose $\Pi_\mu(D) = \eta_\mu(\Pi(D))$.

On a $\Pi_\mu(D) \in \mathscr{S} \otimes U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes \operatorname{Hom}(E^M, E^M)$ et peut donc être regardé comme opérateur différentiel holomorphe sur $X^* \subset (\mathbf{a}_\varnothing)_{\mathbb{C}}$ (cf. [1, Proposition 4.1]) en faisant agir $U(\mathbf{a}_\varnothing)$ par représentation régulière droite.

2.3. Les éléments de $\mathscr{S}$ sont des fonctions holomorphes sur X^* et méromorphes sur X. En utilisant comme hyperplans les noyaux des $\alpha \in \Delta^+_{\sigma\theta}$

on a une notation de degré pour tout élément f de $\mathscr{S}$ (cf. appendice, §1.1) noté deg f. On étendra cette notation aux éléments de

$$\mathscr{S} \otimes U(\mathbf{k}) \underset{U(\mathbf{m})}{\otimes} U(\mathbf{h}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S} \otimes \operatorname{End} E^M.$$

LEMME 1. *On considère la graduation sur* $\mathscr{S} \otimes U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes U(\mathbf{k}) \otimes_{U(\mathbf{m})} U(\mathbf{h})$ *(resp.* $\mathscr{S} \otimes U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes \operatorname{End}(E^M)$*) induite par la graduation naturelle de* $U(\mathbf{a}_\varnothing) \simeq S(\mathbf{a}_\varnothing)$. *Pour* X *élement de l'un de ces espaces on note* X_n *sa composante homogène de degré* n. *Soit* $D \in U_n(\mathbf{g})$ *(resp.* $D \in Z(\mathbf{g}) \cap U_n(\mathbf{g})$*). (Ici* $U_n(\mathbf{g})$ *est l'ensemble des éléments de* $U(\mathbf{g})$ *de degré inférieur ou égal à* n.*) Alors*:

(i) $\Pi(D)$ *(resp.* $\Pi_\mu(D)$*) est de degré inférieur ou égal à* n *et pour* $0 \leqslant i \leqslant n$ *on a*:

$$\Pi(D)_i \ (\textit{resp. } \Pi_\mu(D)_i) = \sum_{m \in \mathbb{N}^l, |m| = i} F_m \, \partial(H^m)$$

où chaque F_m *est dans* $\mathscr{S} \otimes U(\mathbf{k}) \otimes_{U(\mathbf{m})} U(\mathbf{h})$ *(resp.* $\mathscr{S} \otimes \operatorname{End} E^M$*) et vérifie* $\deg F_m \leqslant n - i$.

(ii) *Notons* $\xi = \prod_{\alpha \in \Delta^+_{\sigma\theta}, 2\alpha \notin \Delta^+_{\sigma\theta}} \alpha$. *Alors pour* k *entier assez grand* $(\xi)^k \, \Pi_\mu(D)$ *est un opérateur différentiel à coefficient holomorphe sur* X. *Si* n' *est le plus petit entier positif ou nul vérifiant cette propriété on notera* $\Pi_\mu(D)^0 = \xi^{n'} \, \Pi_\mu(D)$.

Démonstration. L'assertion sur Π_μ résulte de celle sur Π. Prouvons celle-ci. On procède par récurrence sur n. C'est trivial pour $n = 0$. Si $D \in U(\mathbf{l}_{\varnothing, \mathbf{k}}) \, U(\mathbf{a}_\varnothing) \, U(\mathbf{h})$ on a $\Pi(D) \in U(\mathbf{a}_\varnothing) \otimes (U(\mathbf{k}) \otimes_{U(\mathbf{l}_{\varnothing, \mathbf{kh}})} U(\mathbf{h}))$. Les F_m sont constantes et l'assertion est vraie. De plus l'ensemble des D vérifiant l'assertion forment clairement un espace vectoriel. Alors, avec les notations de 1.2, il reste à étudier le cas ou $D = X_\alpha Y$ avec $\alpha \in \Delta$, $X_\alpha \in \mathbf{g}^\alpha_{\sigma\theta}$ ou bien $X_\alpha \in (\mathbf{g}^\alpha)_-$ et $Y \in U_{n-1}(\mathbf{g})$. En effet, d'après 1.2 on a $U(\mathbf{g}) = \mathbf{n}U(\mathbf{g}) + U(\mathbf{l}_{\varnothing, \mathbf{k}}) \, U(\mathbf{a}_\varnothing) \, U(\mathbf{h})$.

Alors utilisant l'égalité:

$$\forall a \in \exp \mathbf{a}_\varnothing^{\text{reg}}, \quad X_\alpha = f_1(a)(X_\alpha + \theta X_\alpha)^a + f_2(a)(X_\alpha + \sigma X_\alpha),$$

avec $f_1(a) = a^\alpha(1 \mp a^{2\alpha})^{-1}$, $f_2(a) = \mp a^{2\alpha}(1 \mp a^{2\alpha})^{-1}$ selon que $X_\alpha \in (\mathbf{g}^\alpha)_-$ ou $X_\alpha \in \mathbf{g}^\alpha_{\sigma\theta}$, on trouve:

$$\Pi(D) = f_1(X_\alpha + \theta X_\alpha) \, \Pi(Y) + f_2 \Pi(Y)(X_\alpha + \sigma X_\alpha) + f_2 \Pi(\tilde{Y}),$$

où $\tilde{Y} = [X_\alpha + \sigma X_\alpha, \, Y] \in U_{n-1}(\mathbf{g})$.

Ici on a utilisé la structure de $U(\mathbf{k})$-module à gauche (resp. $U(\mathbf{h})$-module à droite) de $\mathscr{S} \otimes \mathscr{B}$ (cf. 1.3) et le fait que $X_\alpha + \theta X_\alpha \in \mathbf{k}$ (resp. $X_\alpha + \sigma X_\alpha \in \mathbf{h}$).

Le lemme résulte alors immédiatement de l'hypothèse de récurrence appliquée à Y et $\tilde{Y}$, du fait que $\deg f_1$, $\deg f_2 \leqslant 1$ et des propriétés élémentaires de deg (cf. lemme A.1).

La partie (ii) est une conséquence immédiate de (i).

2.4. On choisit dans $\mathbf{l}_\varnothing$ (centralisateur de $\mathbf{a}_\varnothing$ dans $\mathbf{g}$), qui est clairement θ-stable, une sous-algèbre de Cartan (qui contient donc $\mathbf{a}_\varnothing$) θ-stable, $\mathbf{a}_1$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{g}$ qui est θ-stable.

Alors $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{k}) \oplus (\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p})$. Comme $\mathbf{a}_\varnothing \subset \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$ et est maximal abélien dans $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$ on a $\mathbf{a}_\varnothing = \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$. De plus $\mathbf{a}_\varnothing = \mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$. Comme $\mathbf{l}_\varnothing$ est clairement stable par σ et θ on en déduit $\mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{p} = (\mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{h}) \oplus \mathbf{a}_\varnothing$. Alors $\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p}$ qui est contenu dans $\mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{p}$ et contient $\mathbf{a}_\varnothing$ vérifie $\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p} = (\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{h}) \oplus \mathbf{a}_\varnothing$. On a finalement $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_\varnothing \oplus \mathbf{a}_2$ où $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{k}) \oplus (\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{p} \cap \mathbf{h})$. On notera $\Delta(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$ le système de racines de $\mathbf{a}_1$ dans $\mathbf{g}$. On choisit un ensemble de racines positives $\Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$ de $\Delta(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$ tel que pour $\alpha \in \Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$, $\alpha|_{\mathbf{a}_\varnothing}$ est nul ou dans $\Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_\varnothing)$. On note

$$\mathbf{n}_1 = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)} \mathbf{g}^\alpha, \quad \mathbf{n}_1^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)} \mathbf{g}^{-\alpha},$$

$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \oplus \mathbf{n}_2$ (resp. $\mathbf{n}_1^- = \mathbf{n}^- \oplus \mathbf{n}_2^-$) avec $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cap \mathbf{l}_\varnothing$ (resp. $\mathbf{n}_2^- = \mathbf{n}_1^- \cap \mathbf{l}_\varnothing$). On a les décompositions suivantes:

$$U(\mathbf{g}) = (\mathbf{n}_1 U(\mathbf{g}) + U(\mathbf{g})\mathbf{n}_1^-) \oplus S(\mathbf{a}_1)$$

$$U(\mathbf{l}_\varnothing) = (\mathbf{n}_2 U(\mathbf{l}_\varnothing) + U(\mathbf{l}_\varnothing)\mathbf{n}_2^-) \oplus S(\mathbf{a}_1).$$

Soient γ et γ_0 les projections correspondantes de $U(\mathbf{g})$ et $U(\mathbf{l}_\varnothing)$ sur $S(\mathbf{a}_1)$.

LEMME 2. *Soit $D \in Z(\mathbf{g})$ de degré n. Alors*:

(i) *$\gamma(D)$ est de degré n et $D - \gamma(D) \in \mathbf{n}_1 U(\mathbf{g})_{n-1}$*,

(ii) *$\Pi_\mu(\gamma(D))_n = \Pi_\mu(D)_n$.*

Démonstration. La partie (i) est un des propriétés de l'homomorphisme de Harish Chandra (cf. [8, 7.4.2, 7.4.5]).

Pour démontrer (ii), il suffit de prouver que pour tout élément D_1 de $\mathbf{n}_1 U(\mathbf{g})_{n-1}$, $\Pi_\mu(D_1)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Si D_1 est de la forme XY avec $X \in \mathbf{n}$ et $Y \in U_{n-1}(\mathbf{g})$, cette assertion a déjà été prouvée au cours de la démonstration du lemme 1. Il reste à traiter le cas où $X \in \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cap \mathbf{l}$. Par linéarité on peut supposer $X \in \mathbf{g}^\alpha$, $\alpha \in \Delta^+(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$ avec $\alpha|_{\mathbf{a}_\varnothing} = 0$. Clairement $X \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{l}_\varnothing] \subset [\mathbf{l}_\varnothing, \mathbf{l}_\varnothing]$.

Or $\mathbf{l}_\varnothing = \mathbf{m}_\varnothing \oplus \mathbf{a}_\varnothing$ (cf. 1.2 pour les notations) et $[\mathbf{l}_\varnothing, \mathbf{l}_\varnothing] = [\mathbf{m}_\varnothing, \mathbf{m}_\varnothing]$. Donc $X \in \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{k}} \oplus \mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{h}}$. Donc il existe $X_1 \in \mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{k}$, $X_2 \in \mathbf{l}_\varnothing \cap \mathbf{h}$ tels que $X = X_1^a + X_2$ pour tout a dans A.

D'où $\Pi(D)=X_1\Pi(Y)+\Pi(Y)X_2+\Pi([X_2, Y])$. Alors d'après la définition de Π_μ et le lemme 1, $\Pi_\mu(D_1)$ est bien de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ceci achève de prouver (ii).

2.5. Soit $D\in Z(\mathbf{g})$. On notera $S(D)$ l'élément $\Pi_\mu(D)_n$ de $U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}(E^M)$ où n est le degré de D.

Lemme 3. *Soit I un idéal de codimension finie de $Z(\mathbf{g})$. Alors l'ensemble des $S(D)$, $D\in I$, engendre un idéal à gauche gradué de codimension finie de $S(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}(E^M)$ noté J.*

Démonstration. L'application γ de $Z(\mathbf{g})$ dans $S(\mathbf{a}_1)$ préserve les filtrations naturelles. On note $\operatorname{Gr}\gamma$ le morphisme des gradués associés. Le lemme 2 implique que pour $D\in Z(\mathbf{g})$, notant $\bar{D}$ son image dans le gradué $\operatorname{Gr}(Z(\mathbf{g}))$ on a $S(D)=\Pi_\mu(\operatorname{Gr}\gamma(\bar{D}))$.

Or $\operatorname{Gr}\gamma(\operatorname{Gr}Z(\mathbf{g}))$ admet pour image les invariants sous le groupe de Weyl, $W(\mathbf{g}, \mathbf{a}_1)$, de $S(\mathbf{a}_1)$ et $S(\mathbf{a}_1)$ est de type fini comme module sous cette algèbre d'invariants $S(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)}$.

D'autre part, Gr I est de codimension finie dans $\operatorname{Gr}Z(\mathbf{g})$, donc aussi $(\operatorname{Gr}\gamma)(\operatorname{Gr} \mathrm{I})$ dans $S(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)}$. Utilisant le fait que Π_μ est un homomorphisme d'algèbres de $U(\mathbf{a}_1)$ dans $U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}(E^M)$ (cf. la définition de Π_μ en 1.5), on voit que $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1))$ est de type fini sous $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)})$. Comme $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1))\supset\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_\varnothing))=U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{Id}_{E^M}$ on voit que $U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}(E^M)$ est de type fini sous $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1))$, donc aussi sous $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)})$. Soit $Y_1, ..., Y_p$ un ensemble de générateurs de ce module sous $\Pi_\mu(U(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)})$ et $U_1, ..., U_r$ une base d'un supplémentaire de $(\operatorname{Gr}\gamma)(\operatorname{Gr}I)$ dans $U(\mathbf{a}_1)^{W(\mathbf{g},\mathbf{a}_1)}$. Alors J contient $\Pi_\mu(\operatorname{Gr}\gamma)(\operatorname{Gr}I))$ d'après ce que l'on a vu plus haut et donc:

$$S(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}E^M=\sum_{i=1}^{p}Y_i\left(J+\sum_{j=1}^{r}\mathbb{C}\,\Pi_\mu(U_j)\right),$$

soit encore, puisque J est un idéal:

$$S(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\operatorname{End}E^M=J+\sum_{i,j}\mathbb{C}(Y_i\Pi_\mu(U_j))$$

et le lemme est démontré.

2.6. On se propose d'appliquer le théorème 1 de l'appendice. Les lemmes précédents montrent que les hypothèses de ce théorème sont satisfaites par la famille d'opérateurs différentiels méromorphes sur X, $\mathscr{A}=\{\Pi_\mu(D')\mid D\in I\}$ (I est l'annulateur de V dans $Z(\mathbf{g})$), et où l'on prend pour famille d'hyperplans les noyaux des éléments de $\Delta^+_{\sigma\theta}$. Il nous faut exhiber une série formelle annulée par les éléments $\Pi_\mu(D')^0$ de $\mathscr{D}_0(\mathbf{a}_{\varnothing\mathbb{C}}, E^M)$.

Pour $v \in V$, on considère l'élément $\varphi_v \in \hat{0}_0(\mathbf{g}, E)$ défini par:

$$\forall D \in S(\mathbf{g}), \forall k \in K, \quad (\varphi_v(D))(k) = \langle \pi(\beta(D')) \, \pi(k^{-1})v, T \rangle.$$

Notez que la fonction Φ_v,si elle existe, doit vérifier:

$$\begin{aligned}[\partial(D)(\Phi_v \circ \exp)(0)](k) &= [(L_{\beta(D')} \Phi_v)(e)](k) \\ &= \langle \pi(\beta(D') \, \pi(k^{-1})v, T \rangle \\ &= (\varphi_v(D))(k).\end{aligned}$$

En d'autres termes, φ_v doit être la série formelle attachée à $\Phi_v \circ \exp$ en 0. Nous allons maintenant étudier le système d'équations différentielles (formelles) satisfaites par φ_v.

D'abord, si $X \in U(\mathbf{g})$, on définit un germe d'opérateur différentiel à coefficients analytiques sur $\mathbf{g}$, $\mathscr{L}(X)$ (i.e., $\mathscr{L}(X) \in \mathscr{D}_0(\mathbf{g})$) par

$$\mathscr{L}(X) = \exp^* \circ L_X \circ (\exp^{-1})^*.$$

Alors $\mathscr{L}$: $U(\mathbf{g}) \to \mathscr{D}_0(\mathbf{g})$ est un homomorphisme d'algèbres. De façon similaire on définit un homomorphisme d'algèbres $\mathscr{R}$: $U(\mathbf{g}) \to \mathscr{D}_0(\mathbf{g})$ par:

$$\forall X \in U(\mathbf{g}), \qquad \mathscr{R}(X) = \exp^* \circ R_X \circ (\exp^{-1})^*.$$

Notez que pour $\varphi \in 0_0(\mathbf{g})$ on a:

$$\begin{aligned}\forall X \in S(\mathbf{g}), \qquad [\mathscr{L}(\beta(X))\varphi](0) &= [L_{\beta(X)}(\varphi \circ \exp^{-1})](e) \\ &= (\partial(X')\varphi)(0).\end{aligned}$$

De même:

$$\forall X \in S(\mathbf{g}), \qquad e_0 \circ \mathscr{R}(\beta(X)) = e_0 \circ \partial(X) \qquad \text{sur} \quad 0_0(\mathbf{g}).$$

Par densité de $0_0(\mathbf{g})$ dans $\hat{0}_0(\mathbf{g})$ et par continuité de l'action de $\mathscr{D}_0(\mathbf{g})$ sur $\hat{0}_0(\mathbf{g})$ on a finalement:

$$\begin{aligned}\forall X \in S(\mathbf{g}), \qquad (e_0) \circ \mathscr{R}(\beta(X)) &= (e_0) \circ \partial(X) \\ (e_0) \circ \mathscr{L}(\beta(X)) &= (e_0) \circ \partial(X') \qquad \text{sur} \quad \hat{0}_0(\mathbf{g}).\end{aligned}$$

LEMME 4. *Avec les notations ci-dessus*:

(i) $\forall Y \in U(\mathbf{g})\mathbf{h}$, $\mathscr{R}(Y)\varphi_v = 0$,

(ii) $\forall X \in U(\mathbf{k})$, $\mathscr{L}(X)\varphi_v = \mu(X')\varphi_v$.

Démonstration. Pour la première égalité, on peut supposer que $Y \in \mathbf{h}$ (car $\mathscr{R}$ est un homomorphisme d'algèbres). Alors pour $D \in S(\mathbf{g})$ on a:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(Y)\,\varphi_v(D) &= e_0(\partial(D)\,\mathscr{R}(Y)\varphi_v)\\ &= e_0(\mathscr{R}(\beta(D))(\mathscr{R}(Y))\,\varphi_v)\\ &= e_0(\mathscr{R}(\beta(D)\,Y)\varphi_v)\\ &= \varphi_v(\beta^{-1}(\beta(D)\,Y)).\end{aligned}$$

Alors revenant à la définition de φ_v on a:

$$\begin{aligned}[(\mathscr{R}(Y)\varphi_v)(D)](k) &= \langle \pi(Y')\,\pi(\beta(X)')\,\pi(k^{-1})v, T\rangle\\ &= 0, \quad \text{car } T \text{ est } \mathbf{h}\text{-invariant et (i) est prouvé.}\end{aligned}$$

Prouvons (ii). Soit $X \in U(\mathbf{k})$. Alors:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}(X)\varphi_v)(D) &= e_0(\partial(D)\,\mathscr{L}(X)\varphi_v)\\ &= e_0(\mathscr{L}(\beta(D)')\,\mathscr{L}(X)\varphi_v)\\ &= e_0(\mathscr{L}(\beta(D)'\,X)\varphi_v)\\ &= e_0(\partial\beta^{-1}(\beta(D)'\,X)'\,\varphi_v)\\ &= \varphi_v(\beta^{-1}(X'\,\beta(D))).\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité on a utilisé $\beta(Z') = \beta(Z)'$ pour tout $Z \in S(\mathbf{g})$. D'où

$$[\mathscr{L}(X)\,\varphi_v(D)](k) = \langle \pi(\beta(D)'\,X)\,\pi(k^{-1})v, T\rangle.$$

Il résulte alors immédiatement de la définition de μ que:

$$(\mathscr{L}(X)\varphi_v)(D) = \mu(X')(\varphi_v(D))$$

et le lemme est démontré.

LEMME 5. *Soit $\varphi \in \hat{0}_0(\mathbf{g}, E)$ et i: $\mathbf{a}_\varnothing \to \mathbf{g}$ l'inclusion. Si $Z \in U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}})$, on a:*

$$i^*(\mathscr{R}(Z)\varphi) = i^*(\mathscr{L}(Z')\varphi).$$

Démonstration. Si $\varphi \in 0_0(\mathbf{g}, E)$, cela résulte immédiatement du fait que $\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}}$ et $\mathbf{a}_\varnothing$ commutent. Le lemme résulte alors de la densité de $0_0(\mathbf{g}, E)$ dans $\hat{0}_0(\mathbf{g}, E)$ et de la continuité des applications $\mathscr{R}(Z)$, $\mathscr{L}(Z')$ et i^*.

Soit $\mathrm{CL}(\mathbf{g}, \mathbf{a}_\varnothing)$ l'espace des applications linéaires continues $\hat{0}_0(\mathbf{g}, E) \to \hat{0}_0(\mathbf{a}_\varnothing, E)$. Alors $i^* \in \mathrm{CL}(\mathbf{g}, \mathbf{a}_\varnothing)$. De plus, grâce au lemme 5 il existe une unique application linéaire $\tilde{\Gamma}$: $U(\mathbf{k}) \otimes_{U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}})} U(\mathbf{h}) \to \mathrm{CL}(\mathbf{g}, \mathbf{a}_\varnothing)$ telle que

$$\forall X \in U(\mathbf{k}),\ \forall Y \in U(\mathbf{h}), \quad \tilde{\Gamma}(X \otimes Y) = i^* \circ \mathscr{L}(X')\,\mathscr{R}(Y).$$

On définit alors une application linéaire:

$$\Gamma\colon 0_0(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes\Big(U(\mathbf{k})\underset{U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}})}{\otimes} U(\mathbf{h})\Big)\to \mathrm{CL}(\mathbf{g},\mathbf{a}_\varnothing)$$

par $[\Gamma(f\otimes Z\otimes X\otimes Y)](\varphi)=f[\partial(Z)\tilde{\Gamma}(X\otimes Y)\varphi]$ où $\varphi\in\hat{0}_0(\mathbf{g},E)$, $X\in U(\mathbf{k})$, $Y\in U(\mathbf{h})$, $Z\in U(\mathbf{a}_\varnothing)$ et $f\in 0_0(\mathbf{a}_\varnothing)$.

Lemme 6. *Soit* $\varphi\in\hat{0}_0(\mathbf{g},E)$ *et* $D\in U(\mathbf{g})$. *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $\xi^n\,\Pi(D)\in 0_0(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes(U(\mathbf{k})\otimes_{U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}})}U(\mathbf{h}))$ *de sorte que* $\Gamma(\xi^n\,\Pi(D))$ *est bien définie. Alors*:

$$\xi^n(i^*(\mathscr{R}(D)\varphi))=\Gamma(\xi^n\,\Pi(D))\varphi.$$

Démonstration. Par densité et continuité, il suffit de démontrer l'égalité ci-dessus pour $\varphi\in 0_0(\mathbf{g},E)$. Dans ce cas, on vérifie facilement que pour $a\in A_\varnothing^{\mathrm{reg}}$ suffisamment proche de e:

$$\begin{aligned}[(\Gamma(\xi^n\,\Pi(D)))(\varphi)](\log a)&=\xi^n(\log a)[(R_{\Gamma_a(\Pi((D)))})(\varphi\circ\log)](a)\\&=\xi^n(\log a)[(R_D)(\varphi\circ\log)](a)\\&=\xi^n(\log a)(\mathscr{R}(D)\,\varphi)(\log a).\end{aligned}$$

Le lemme en résulte.

On peut maintenant décrire le système d'équations différentielles formelles satisfait par $i^*\varphi_v$:

Lemme 7. *On conserve les notations ci-dessus.*
Soit $v\in V$, $D\in I$. *Alors* $i^*\varphi_v\in\hat{0}_0(\mathbf{a}_\varnothing,E^M)$ *et*

$$\Pi_\mu(D')\circ(i^*\varphi_v)=0$$

(*cf.* 2.2 *et* 2.3 *pour la définition de* $\Pi_\mu(D')^0$).

Démonstration. Fixons $n\in\mathbb{N}$ tel que $\xi^n\,\Pi(D')$ soit élément de $0_0(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes U(\mathbf{a}_\varnothing)\otimes U(\mathbf{k})\otimes_{U(\mathbf{l}_{\varnothing,\mathbf{kh}})}U(\mathbf{h})$. Alors du lemme 4 et des définitions de Π_μ et Γ, il résulte que:

$$(\xi^n\,\Pi_\mu(D'))(i^*\varphi_v)=\Gamma(\xi^n\,\Pi(D'))\varphi_v.$$

D'où, grâce au lemme 6:

$$(\xi^n\,\Pi_\mu(D'))(i^*\varphi_v)=\xi^n(i^*(\mathscr{R}(D')\varphi_v)).$$

Montrons que $\mathscr{R}(D')\varphi_v=0$. Soit $U\in S(\mathbf{g})$.

Alors on a:

$$\begin{aligned}(\mathscr{R}(D')\varphi_v)(U) &= e_0(\partial(U)\,\mathscr{R}(D')\varphi_v)\\ &= e_0(\mathscr{R}(\beta(U)\,D')\varphi_v).\end{aligned}$$

D'où: $[(\mathscr{R}(D')\varphi_v)(U)](k) = \langle \pi(D\beta(U)')\,\pi(k^{-1})v, T\rangle$.

Mais I annule V. Ceci achève de prouver que $\mathscr{R}(D')\varphi_v = 0$. Finalement on a montré que

$$(\xi^n\,\Pi_\mu(D'))(i^*\varphi_v) = 0.$$

Soit n^1 l'entier tel que $\Pi_\mu(D')^0 = \xi^{n^1}\,\Pi_\mu(D')$. D'après le choix de n on a $\xi^n\,\Pi_\mu(D')$ qui est à coefficients holomorphes sur X et donc $n^1 \leqslant n$. Alors $\xi^{n-n^1}(\Pi_\mu(D')^0\,(i^*\varphi_v)) = 0$ d'après ce qui précède. Comme $\hat{0}_0(\mathbf{a}_\varnothing)$ est sans diviseurs de zéro on en déduit l'égalité voulue.

2.7. Grâce aux lemmes 1, 2, 3 et 7 on peut appliquer le théorème 1 de l'appendice à la famille $\mathscr{A} = \{\Gamma_\mu(D') \mid D \in I\}$ d'opérateurs différentiels méromorphes sur X. Ici $Y = \bigcup_{\alpha\in\Delta^+_{\sigma\theta}} \operatorname{Ker}\alpha$.

Comme en outre X est stable par les contractions réelles de $\mathbf{a}_{\varnothing\mathbb{C}}$, on peut utiliser le point (ii) de ce théorème. Il en résulte

LEMME 8. *Il existe une fonction holomorphe Φ sur $X \subset \mathbf{a}_{\varnothing\mathbb{C}}$, à valeurs dans E^M dont la série de Taylor à l'origine coïncide avec la série formelle φ_v; i.e.,* $\forall D \in S(\mathbf{a}_\varnothing)$, $(\partial(D)\Phi)(0) = \varphi_v(D)$.

2.8. On veut prolonger Φ en une fonction μ-sphérique sur G/H. Ici on identifie $\mathbf{a}_\varnothing$ à un sous-espace de G/H grâce à l'application exponentielle. On a un difféomorphisme de $K \times (\mathbf{p}\cap\mathbf{q}) \times (\mathbf{p}\cap\mathbf{h})$ sur G donné par $(k, X, Y) \to k \exp X \exp Y$. On va d'abord étendre Φ à $\mathbf{p}\cap\mathbf{q}$.

Utilisant le fait que β est un isomorphisme de $\mathbf{g}$-modules, on obtient facilement que: $\forall k \in K$, $\forall k_0 \in K \cap H$, $\forall D \in S(\mathbf{p}\cap\mathbf{q})$,

$$\begin{aligned}\varphi_v(\operatorname{Ad}(k_0)\,D)(k) &= \langle \pi(\operatorname{Ad}(k_0)\,\beta(D'))\,\pi(k^{-1})v, T\rangle\\ &= \langle \pi(k_0)\,\pi(\beta(D'))\,\pi(kk_0)^{-1}\,v, T\rangle.\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que T est $K\cap H$-invariante, on en déduit:

$$\varphi_v(\operatorname{Ad}(k_0)\,D)(k) = \langle \pi(\beta(D'))\,\pi(kk_0)^{-1}\,v, T\rangle.$$

Donc:

$$\varphi_v(\operatorname{Ad}(k_0)\,D) = \mu(k_0)\,\varphi_v(D).$$

Or on sait qu'il existe une fonction analytique Φ sur $\mathbf{a}_\varnothing$ à valeur dans E^M telle que sa série de Taylor à l'origine coïncide avec la restriction de φ_v à $S(\mathbf{a}_\varnothing)$. Alors il résulte de la proposition A.1 de [3] appliquée à $G^{\sigma\theta} = (K \cap H) \exp(\mathbf{p} \cap \mathbf{q})$ qu'il existe une unique fonction analytique Ψ sur $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$ à valeurs dans E telle que:

$$\forall X \in \mathbf{p} \cap \mathbf{q}, \forall k \in K \cap H, \quad \Psi(\mathrm{Ad}\, k\, X) = \mu(k)\, \Psi(X)$$

et $\Psi|_{\mathbf{a}_\varnothing} = \Phi$.

En outre pour tout $D \in S(\mathbf{p} \cap \mathbf{q})$ on a

$$(\partial(D)\, \Psi)(0) = \varphi_v(D).$$

On définit alors Φ_v par

$$\forall k \in K, \forall X \in \mathbf{p} \cap \mathbf{q}, \forall Y \in \mathbf{p} \cap \mathbf{h}, \quad \Phi_v(k \exp X \cdot \exp Y) = \mu(k)\, \Psi(X).$$

Il est clair que Φ_v est une fonction analytique sur G puisque l'application naturelle de $K \times (\mathbf{p} \cap \mathbf{q}) \times (\mathbf{p} \cap \mathbf{h})$ dans G est un isomorphisme de variétiés analytiques. D'autre part, en tenant compte du fait que $H = \exp(\mathbf{p} \cap \mathbf{h})(K \cap H)$, pour vérifier l'invariance à droite par H de Φ_v il suffit de vérifier l'invariance à droite par $K \cap H$. Soient donc $k \in K$, et $g \in G$ avec $g = k \exp X \cdot \exp Y$, où $k \in K$, $X \in \mathbf{p} \cap \mathbf{q}$, $Y \in \mathbf{p} \cap \mathbf{h}$. On a alors pour $k_1 \in K \cap \mu$:

$$\begin{aligned}
\Phi_v(gk_1) &= \Phi_v(kk_1 \exp(\mathrm{Ad}\, k_1^{-1} \cdot X) \cdot \exp(\mathrm{Ad}\, k_1^{-1} \cdot Y)) \\
&= \mu(kk_1)\, \Psi(Akk_1^{-1} X) \\
&= \mu(kk_1)\, \mu(k_1)^{-1}\, \Psi(X) \\
&= \Phi_v(g),
\end{aligned}$$

et ceci montre que Φ_v est invariante à droite par H.

La définition de Φ_v montre qu'elle est μ-sphérique. Nous affirmons que

$$\forall D \in U(\mathbf{g}), \qquad (L_D \Phi_v)(e) = e_0(\mathscr{L}(D)\, \varphi_v).$$

Pour cela, on remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
&\forall D_1 \in U(\mathbf{h}), \forall D_2 \in U(\mathbf{g}), \forall D_3 \in U(\mathbf{k}), \\
&\qquad (L_{D_1 D_2 D_3} \Phi_v)(e) = \varepsilon(D_1)\, \mu(D_3')(L_{D_2} \Phi_v(e))
\end{aligned}$$

puisque Φ_v est une fonction μ-sphérique sur G/H.

D'autre part:

$$e_0(\mathscr{L}(D_1 D_2 D_3)\, \varphi_v) = \varepsilon(D_1)\, \mu(D_3')\, e_0(\mathscr{L}(D_2)\, \varphi_v)$$

grâce au lemme 4. Puisque l'application

$$S(\mathbf{p} \cap \mathbf{h}) \otimes S(\mathbf{p} \cap \mathbf{q}) \otimes S(\mathbf{k}) \to U(\mathbf{g})$$

définie par

$$S_1 \otimes S_2 \otimes S_3 \to \beta(S_1)\, \beta(S_2)\, \beta(S_3)$$

est bijective, il reste à prouver l'affirmation ci-dessus pour $D = \beta(S)$ avec $S \in S(\mathbf{p} \cap \mathbf{q})$.

Mais alors on a

$$(L_D \Phi_v)(e) = [\partial(S')(\Phi_v \circ \exp^{-1})](0)$$

sur $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$, $\Phi_v \circ \exp^{-1}$ est égale à l'application Ψ. En effet des propriétés de Ψ, on déduit que:

$$(\partial(S')\, \Psi)(0) = \varphi_v(S') = e_0(\mathscr{L}(D)\, \varphi_v).$$

Ceci prouve notre affirmation. Finalement, puisque pour tout $S \in S(\mathbf{g})$, on a:

$$\varphi_v(S') = e_0(\mathscr{L}(\beta(S))\, \varphi_v) = (L_{\beta(S)} \Phi_v)(e),$$

l'assertion (A) est demontrée et le théorème 1 en résulte.

Appendice

A.1. Soit X un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $V = \mathbb{C}^n$ et Y une réunion d'hyperplans, H_s, $s = 1, ..., p$, passant par l'origine. On note $X^* = X - Y$.

Soit F un espace vectoriel de dimension finie et f une fonction holomorphe sur X^*, à valeurs dans F, méromorphe sur X.

On définit alors $\deg f$ comme le plus petit entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $H \in V - Y$ et $t \in \mathbb{C}$ avec $|t|$ assez petit, $t \to t^k f(tH)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Si f est nulle on pose $\deg f = -\infty$. Notant l_s, $s = 1, ..., p$, une forme linéaire définissant l'hyperplan H_s, on peut écrire

$$f = g \Big/ \prod_{s=1}^{p} (l_s)^{v_s}$$

où v_s est l'ordre du pôle de f le long de H_s et g est holomorphe au voisinage de l'origine. Notant r le degré du terme homogène de plus bas degré non nul dans le développement de Taylor de g à l'origine on a clairement $\deg f = v_1 + \cdots + v_s - r$.

En particulier $\deg f$ est inférieur ou égal à la somme des ordres des pôles de f le long des H_s. On notera que $\deg f$ ne dépend pas du choix des coordonnées sur V (i.e., ce nombre est invariant par changement de base dans $\mathbb{C}^n$).

LEMME A.1. *Soient f, g (resp. h) des fonctions holomorphes sur X^* à valeurs dans F (resp.* End F) *admettant (au pire) des pôles le long des H_s.*

Soit $D \in S(V) \otimes$ End F *regardé comme opérateur différentiel à coefficients constants dans* End F. *Alors*

(i) $\deg(f+g) \leqslant \sup(\deg f, \deg g)$,

(ii) $\deg hf \leqslant \deg h + \deg f$,

(iii) $\deg Df \leqslant \deg f + d^0 D$ *où $d^0 D$ désigne l'ordre de D.*

(iv) *Soit $H_0 \in X^*$. Alors il existe des voisinages ouverts D_1 de* 0 *dans* $\mathbb{C}$ *et D_2 de H_0 dans X^* tels que la fonction $(t, H) \to t^{\deg f} f(tH)$ est bien définie sur $(D_1 - \{0\}) \times D_2$ et s'étend en une fonction holomorphe sur $D_1 \times D_2$.*

Démonstration. On laisse la démonstration facile des points (i), (ii) et (iii) au lecteur. Montrons (iv). Ecrivons comme ci-dessus $f = g/\prod_{s=1}^{p} (l_s)^{v_s}$ où v_s désigne l'ordre du pôle de f le long de H_s et g est holomorphe au voisinage de l'origine. On voit alors facilement qu'il existe des voisinages ouverts D_1 de 0 dans $\mathbb{C}$ et D_2 de H_0 dans X^* tels que la fonction $(t, H) \to t^{v_1 + \cdots + v_p} f(tH)$ admette une série de Taylor convergente sur $D_1 \times D_2$

$$t^{v_1 + \cdots + v_p} f(tH) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}^p} t^n (H - H_0)^m C_{n,m}$$

où $C_{n,m} \in F$. Soit r le degré du terme homogène de plus bas degré non nul de la série de Taylor de g à l'origine. Alors pour $H \in D_2$ fixé on a $\sum_{n<r} \sum_{m \in \mathbb{N}^p} t^n (H - H_0)^m C_{n,m} \equiv 0$ pour $t \in D_1$. Donc $C_{n,m} = 0$ pour $n < r$ et $m \in \mathbb{N}^p$. Il en résulte que $t^{\deg f} f(tH) = t^{-r} t^{v_1 + \cdots + v_p} f(tH)$ dépend holomorphiquement de $(t, H) \in D_1 \times D_2$.

A.2.

THÉORÈME A.1. *On conserve les notations de* A.1. *Soit $\mathscr{A}$ une famille d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur $X^* = X - Y$ et à valeurs dans* End E *où E est un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $\mathscr{A}$ vérifie les trois propriétés suivantes:*

(a) *Si $D \in \mathscr{A}$ est d'ordre M les termes d'ordre M sont constants et donc le symbole principal de D s'identifie à une élément $\sigma(D)$ de $S^m(V) \otimes$* End E.

(b) *L'idéal à gauche de* $S(V) \otimes \operatorname{End} E$, *que l'on notera* J, *engendré par let* $\sigma(D)$, $D \in \mathscr{A}$ *est un idéal à gauche gradué de codimension finie.*

(c) *Si* $D \in \mathscr{A}$ *est d'ordre* M, *il peut s'écrire comme combinaison linéaire de la forme* $F_m(\partial^m/\partial z^m)$ *tels que le* F_m *soient holomorphes sur* X^* *méromorphes sur* X *et vérifiant* $\deg F_m \leqslant M - |m|$. *Cette hypothèse est en particulier vérifiée si la somme* s_m *des ordres des poles le long des variétés polaires* H_s *de* F_m *est inférieur ou égal à* $M - |m|$ *pour tout* m.

Soit M' *le plus petit entier tel que* $(\prod_{s=1}^{p} l_s)^{M'} D$ *soit un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur* X *que l'on notera* D°.
Alors on a:

(i) *Si* $\varphi \in \hat{0}_0(V, E)$ *est annulé par les opérateurs* D°, *où* D *décrit* $\mathscr{A}$ *on a* $\varphi \in 0_0(V, E)$, *i.e., il existe une fonction holomorphe* Φ *définie sur une boule ouverte de centre* 0 *dans* V, U, *et à valeurs dans* E *telle que pour tout* $D \in S(V)$, $(D\Phi)(0) = \varphi(D)$.

(ii) *Si* X^* *est connexe et si en outre l'application naturelle* $\pi_1(U^*, y_0) \to \pi_1(X^*, y_0)$ *est un isomorphisme, où* $U^* = U - Y$ (*par exemple si* X *est stable par les contractions réelles*), Φ *s'étend en une fonction holomorphe sur* X *tout entier.*

A.3. On se fixe une base d'un supplémentaire de J dans $S(V) \otimes \operatorname{End} E$, $(U_1, ..., U_r)$, formée d'éléments homogènes, avec $U_1 = 1 \otimes \operatorname{Id}_E$.

LEMME A.2. *Soit* $D \in S(V) \otimes \operatorname{End} E$. *Alors il existe des fonctions* g_i, $i = 1, ..., r$, f_j $(j = 1, ..., q)$ *holomorphes sur* X^*, *méromorphes sur* X, *à valeurs dans* End E *et des éléments* D_j *de* $\mathscr{A}$ *et* Y_j *de* $S(V) \otimes \operatorname{End} E$ $(j = 1, ..., q)$ *tels que*:

$$D = \sum_{j=1}^{q} f_j Y_j D_j + \sum_{i=1}^{r} g_i U_i,$$

avec:

$$\deg f_j + d^\circ Y_j + d^\circ D_j \leqslant d^\circ D,$$

$$\deg g_i + d^\circ U_i \leqslant d^\circ D.$$

Démonstration. Par récurrence sur l'ordre de D. Le lemme est vrai pour $d^\circ(D) = 0$. Supposons la propriété démontrée pour les éléments de $S(V) \otimes \operatorname{End} E$ d'ordre inférieur ou égal à M. Montrons-la pour les éléments d'ordre inférieur ou égal à $M + 1$. Par linéarité et l'hypothèse de récurrence, on peut supposer D homogène d'ordre $M + 1$. Alors on a:

$$D = D' + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i U_i \quad \text{où } D' \in J, \text{ les } \alpha_i \text{ sont dans } \mathbb{C}.$$

Par l'homogénéité de D, et des U_i, et le fait que J est gradué, on peut supposer que D' est homogène et

$$d^\circ D' \leqslant d^\circ D \qquad \text{et} \qquad d^\circ(\alpha_i U_i) \leqslant d^\circ D.$$

Alors on peut écrire

$$D' = \sum_{k=1}^{l} Z_k \sigma(D_k) \quad \text{avec } Z_k \in S(V) \otimes \operatorname{End} E \text{ et } D_k \in \mathscr{A}.$$

Par l'homogénéité de D' et des $\sigma(D_k)$ on peut supposer en outre les Z_k homogènes avec

$$d^\circ(Z_k) + d^\circ(D_k) \leqslant d^\circ D' \leqslant d^\circ D = M + 1.$$

Alors

$$D'' = D - \sum_{k=1}^{l} Z_k D_k - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i U_i \text{ vérifie}$$

$$D'' = \sum_{k=1}^{l} Z_k(\sigma(D_k) - D_k).$$

Comme $D_k \in \mathscr{A}$ on peut écrire

$$\sigma(D_k) - D_k = \sum_{|m| < d^\circ D_k} G_{k,m} \frac{\partial^m}{\partial z^m}$$

avec $\deg G_{k,m} \leqslant d^\circ D_k - |m|$.

Par ailleurs $Z_k = \sum_{|m| \leqslant d^\circ Z_k} Z_{k,m}(\partial^m/\partial z^m)$ avec $Z_{k,m} \in \operatorname{End} E$.

Alors

$$D'' = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|m| \leqslant d^\circ Z_k, |m'| < d^\circ D_k} \times \left(Z_{k,m} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \right) \left(G_{k,m'} \frac{\partial^{m'}}{\partial z^{m'}} \right).$$

Maintenant $(Z_{k,m}(\partial^m/\partial z^m))(G_{k,m}(\partial^{m'}/\partial z^{m'}))$ est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $Z_{k,m}(\partial^{m-l} G_{k,m'}/\partial z^{m-l})(\partial^{l+m'}/\partial z^{l+m'})$ ou $l \in \mathbb{N}^n$ vérifie $0 \leqslant l_j \leqslant m_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

D'après le lemme A.1 nous avons

$$\deg \frac{\partial^{m-l}}{\partial z^{m-l}} G_{k,m'} \leqslant \deg G_{k,m'} + |m| - |l|,$$

de sorte que:

$$\deg\left(Z_{k,m}\frac{\partial^{m-l}}{\partial z^{m-l}}G_{k,m'}\right)+|l|+|m'|$$
$$\leqslant \deg(G_{k,m'})+|m|+|m'|$$
$$\leqslant d^\circ Z_k + d^\circ G_k \leqslant M+1.$$

On en déduit que: $D''=\sum_{|m|\leqslant M} F_m(\partial^m/\partial z^m)$ où les F_m sont holomorphes sur X^*, méromorphes sur X et vérifient $\deg F_m \leqslant M+1-|m|$.

Comme $|m|\leqslant M$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux $\partial^m/\partial z^m$. Utilisant encore le lemme A.1 on en déduit que D'' s'écrit sous la forme:

$$D''=\sum_{j=1}^{q'} f'_j Y'_j D'_j + \sum_{i=1}^{r} g'_i U_i$$

avec $Y'_j \in S(V)\otimes \operatorname{End} E$, $D'_j \in \mathscr{A}$, f'_j, g'_i holomorphes sur X^*, méromorphes sur X et $\deg f'_j + \deg Y'_j + \deg D'_j \leqslant M+1$ et $\deg g'_i + d^\circ U_i \leqslant M+1$. Comme $D=D''+\sum_{k=1}^{l} Z_k D_k + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i U_i$ l'écriture cherchée pour D en résulte et le lemme est démontré.

A.4. Pour $H\in V$ on définit $j_H\colon \mathbb{C}\to V$ par

$$j_H(t)=tH, \qquad t\in\mathbb{C}.$$

On pose pour $i=1, ..., r$

$$(\varphi_H)_i = t^{d(i)} j_H^*(U_i\varphi) \qquad \text{où} \quad d(i)=d^\circ U_i.$$

On a $(\varphi_H)_i\in\hat{0}_0(\mathbb{C},E)$ comme produit de $j_H^*(U_i\varphi)\in\hat{0}_0(\mathbb{C},E)$ par $t^{d(i)}$ regardé comme élément de $0_0(\mathbb{C})$. Alors

LEMME A.3. *φ_H satisfait l'équation $t(d/dt)\varphi_H = A(H,t)\varphi_H$ où $A(H,t)\in$ $\operatorname{End}(E\otimes\mathbb{C}^r)$ est holomorphe au voisinage de tout point $(H,0)$ avec $H\in X^*$, comme fonction de (H,t).*

Démonstration. Ecrivons grâce au lemme A.2:

$$\frac{\partial}{\partial z_l}\circ U_i = \sum_{k=1}^{q_{i,l}} f^l_{i,k} Y^l_{i,k} D^l_{i,k} + \sum_{j=1}^{r} g^l_{i,j} U_j$$

avec $g^l_{i,j}$, $f^l_{i,k}$ holomorphes sur X^*, méromorphes sur X, $D^l_{i,k}\in\mathscr{A}$ et $Y^l_{i,k}\in$ $S(V)\otimes\operatorname{End} E$ avec

$$\deg f^l_{i,k} + d^\circ Y^l_{i,k} + d^\circ D^l_{i,k} \leqslant d^\circ U_i + 1$$
$$\deg(g^l_{i,j}) + d^\circ U_j \leqslant d^\circ U_i + 1.$$

On pose $\pi(z)=\prod_{s=1}^{p} l_s(z)$. On a $(D^l_{i,k})^\circ=\pi^{M^l_{i,k}}D^l_{i,k}$. En choisissant N assez grand on a $\pi^N f^l_{i,k} Y^l_{i,k}=Z^l_{i,k}\pi^M$ où $M\geqslant \operatorname{Sup} M^l_{i,k}+1$ et $Z^l_{i,k}$ est un opérateur differentiel à coefficients holomorphes sur U, ainsi que $\pi^N g^l_{i,j}$ holomorphes sur X pour tout i, j, k, l. Alors φ vérifie:

$$\left(\pi^N \frac{\partial}{\partial z_l}\circ U_i\right)(\varphi)=\left(\sum_{j=1}^{r} \pi^N g^l_{i,j} U_j\right)(\varphi) \tag{$*$}$$

car $(D^l_{i,k})^\circ(\varphi)=0$ d'après les hypothèses et $\pi^M D^l_{i,k}=\pi^{M'}(D^l_{i,k})^\circ$ avec $M'\geqslant 0$.

Or

$$\frac{\partial}{\partial t}\circ j^*_H=j^*_H\circ\left(\sum_{l=1}^{n} H_l\frac{\partial}{\partial z_l}\right)$$

où $H=(H_1, ..., H_n)\in\mathbb{C}^n=V$.

Alors $(*)$ et la définition de φ_H conduisent à

$$\begin{aligned} j^*_H(\pi^N)t\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_H)_i = {} & j^*_H(\pi^N)\, d(i)(\varphi_H)_i \\ & + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} H_l j^*_H(\pi^N) \\ & \times j^*_H(g^l_{ij})\, t^{d(i)+1-d(j)}(\varphi_H)_j. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Maintenant comme

$$\deg g^l_{ij}+d(j)\leqslant d(i)+1$$

on a

$$t^{d(i)+1-d(j)} j^*_H(g^l_{ij})\in 0_0(\mathbb{C}).$$

On peut donc diviser les deux membres de $(**)$ par $j^*_H(\pi^N)$ et on obtient une équation du type voulu, l'assertion sur l'holomorphie de $A(H, t)$ étant trivialement vérifiée grâce au lemme A.1(iv).

A.5. Rappelons maintenant un résultat sur les équations de type Fuchs à coefficients dans un Banach.

Si B est un espace de Banach, et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ on appellera fonction holomorphe sur Ω à valeurs dans B toute fonction $f\colon \Omega\to B$ telle que pour tout $a\in\Omega$ il existe $\delta>0$ et une suite (f_n) d'éléments de B tels que $D(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C} \mid |a-z|<\delta\}$ soit inclus dans Ω et vérifiant

$$\forall z\in D(a,\delta),\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n f_n.$$

Si cette relation est vérifiée, et δ_1 vérifie $0<\delta_1<\delta$, il existe une constante $M>0$ telle que $\|f_n\|\,\delta_1^n \leqslant M$ pour tout n.

Notant $\hat{0}_0(\mathbb{C}, B)$ l'espace des séries formelles à coefficients dans V on définit pour tout $\delta>0$ une semi norme sur $\hat{0}_0(\mathbb{C}, B)$, $\|\cdot\|_\delta$, définie par

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} z^n c_n\right\|_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\|\,\delta^n$$

et soit $0_0(\mathbb{C}, B, \delta)=\{\varphi\in\hat{0}_0(\mathbb{C}, B)\mid \|\varphi\|_\delta < +\infty\}$.

Alors $0_0(\mathbb{C}, B, \delta)$ muni de $\|\ \|_\delta$ est un Banach. De plus si $\delta_1<\delta_2$ alors l'injection naturelle $0_0(\mathbb{C}, B, \delta_2)\to 0_0(\mathbb{C}, B, \delta_1)$ est continue et l'espace $0_0(\mathbb{C}, B)$ des germes de fonctions holomorphes en 0 à valeurs dans V est égal à la limite inductive de la famille des $0_0(\mathbb{C}, B, \delta)$.

Considérant l'espace $\operatorname{End} B$ des applications linéaires continues de B dans lui-même, muni de la norme opèrateur, on définit de même $0_0(\mathbb{C}, \operatorname{End} B, \delta)$, $\|\ \|_\delta$ etc.

Alors on a le résultat suivant (cf. [10, §24] où ce résultat est seulement énoncé pour des espaces de Banach de dimension finie. La démonstration vaut en général, sans changement.)

THÉORÈME A.2. *Soit* $A\in 0_0(\mathbb{C}, \operatorname{End} B, \delta)$, $\psi\in\hat{0}_0(\mathbb{C}, B)$ *satisfaisant formellement*

$$z\frac{d}{dz}\psi(z)=A(z)\,\psi(z).$$

Alors $\psi\in 0_0(\mathbb{C}, B, \delta)$.

A.6. Revenons à $\varphi_H\in\hat{0}_0(\mathbb{C}, E\otimes\mathbb{C}^r)$.

D'après sa définition, on a l'égalité de séries formelles

$$(\varphi_H)_i(t)=\sum_{k=d(i)}^{\infty} p_{ki}(H)\,t^k$$

où $p_{ki}\in S(\mathbf{a}_\varnothing^*)$ est un polynôme homogène de degré $k-d(i)$ sur $\mathbf{a}_{\varnothing\mathbb{C}}$. En outre l'holomorphie de $A(H,t)$ au voisinage de tout point $(H,0)\in(\mathbf{a}_\varnothing)_\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ avec $H\in X^*$ implique l'existence de fonctions holomorphes sur $X-Y$, A_k, à valeurs dans $\operatorname{End}(E\otimes\mathbb{C}^r)$ telles que: $\forall H_0\in X-Y$, $\exists\delta_{H_0}$, $\delta'_{H_0}>0$, $\forall H\in D(H_0,\delta_{H_0})\subset X-Y$, $\forall t\in D(0, 2\delta'_{H_0})$

$$A(H,t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k(H).$$

Les formules intégrales permettent d'estimer $A_k(H)$: $\forall H \in D(H_0, \delta_{H_0})$, $\forall \delta < 2\delta'_{H_0}$,

$$\|A_k(H)\| \leqslant (\delta)^{-k} \sup_{|t| \leqslant \delta} \|A(H, t)\|.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\delta'_{H_0})^k \operatorname*{Sup}_{H \in D(H_0, \delta_{H_0})} \|A_k(H)\| < \infty.$$

Soit alors Ω un ouvert de X dont l'adhérence $\bar{\Omega}$ est compacte et contenue dans $U - Y$. Par compacité et de ce qui précède, on déduit aisément:

$$\exists \delta > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \operatorname*{Sup}_{H \in \bar{\Omega}} \|A_k(H)\| < \infty.$$

On suppose avoir choisi Ω de telle sorte que $\bar{\Omega}$ soit contenu dans une boule ouverte de centre 0 entièrement contenue dans X.

Notons alors B l'espace des fonctions continues $\bar{\Omega} \to E \otimes \mathbb{C}^r$ muni de la norme de la convergence uniforme.

On regarde les A_k comme des éléments de End B. Alors:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in B, \qquad \|A_k \varphi\| &= \sup_{H \in \bar{\Omega}} \|(A_k \varphi)(H)\| \\ &\leqslant \sup_{H \in \bar{\Omega}} \|A_k(H)\| \, \|\varphi(H)\| \\ &\leqslant \sup_{H \in \bar{\Omega}} \|A_k(H)\| \, \|\varphi\|. \end{aligned}$$

D'où $\|A_k\| \leqslant \operatorname{Sup}_{H \in \bar{\Omega}} \|A_k(H)\|$. On a donc:

$$A \in 0_0(\mathbb{C}, \operatorname{End} B, \delta) \qquad \text{avec} \quad A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k.$$

Par ailleurs on définit $\psi \in \hat{0}_0(\mathbb{C}, B)$ par

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k |_{\bar{\Omega}}$$

où p_k est le polynôme sur V à valeurs dans $E \otimes \mathbb{C}^r$ défini par $p_k = (p_{k1}, ..., p_{kr})$ (on pose $p_{ki} = 0$ si $k < d(i)$).

Alors ψ satisfait dans $\hat{0}_0(\mathbb{C}, B)$

$$t \frac{d}{dt} \psi(t) = A(t)\, \psi(t).$$

Grâce au théorème 2 de cet appendice on a $\psi \in 0_0(\mathbb{C}, B, \delta)$, ce qui se traduit par:

$$\exists R > 0, \exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname*{Sup}_{H \in \bar{\Omega}} \|p_k(H)\| \leqslant CR^k.$$

D'où

$$\exists C' > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname*{Sup}_{H \in \bar{\Omega}} \|p_{k1}\| \leqslant C'R^k.$$

Mais

$$p_{k1}(H) = \frac{1}{k!} e_0 \left[\frac{d^k}{dt^k} \varphi_H \right] = \frac{1}{k!} \varphi(H^k).$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname*{Sup}_{H \in \bar{\Omega}} \|\varphi(H^k)\| \leqslant C'k!\, R^k.$$

On se fixe sur V un produit scalaire tel que Ω rencontre un ouvert non vide de la sphère unité de V. On appelle $\|\cdot\|_1$ la norme correspondante. Soit $H_1 \in \Omega$, avec $\|H_1\|_1 = 1$ et $H_1, ..., H_n$ une base orthonormée de V pour le produit scalaire fixé. Alors Ω contient un ouvert de la sphère unité de $\mathbb{R}H_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}H_n$ et il résulte de Korevaar et Wiegerinck (cf. [9] ou [3]) qu'il existe $B > 0$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}^n, \quad \frac{1}{m!} \|\varphi(H_1^{m_1} \cdots H_n^{m_n})\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{H \in \Omega} \|\varphi(H^{|m|})\| \frac{B^{|m|}}{(|m|)!}.$$

D'où avec ce qui précède

$$\forall m \in \mathbb{N}^n, \quad \left\| \frac{1}{m!} \varphi(H_1^{m_1} \cdots H_n^{m_n}) \right\|$$
$$\leqslant C(R'B)^{|m|} \quad \text{et} \quad \varphi \in 0_0(V, E) \text{ en résulte.}$$

D'oû le point (i) du théorème A.1.

Montrons la partie (ii) du théorème A.1.

Notant $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_r)$ avec $\varphi_j = U_j \varphi \in 0_0(V, E)$, on a au voisinage de 0 dans X

$$\forall l = 1, ..., n, \qquad \pi^N \frac{\partial}{\partial z_l} \tilde{\varphi} = G^l \tilde{\varphi} \tag{S}$$

avec G^l matrice (r, r) de fonctions holomorphes sur X. Alors, d'après [6, Théorème A.1.2], il existe une solution multivaluée globale de (S) sur le recouvrement universel $\tilde{X}^*$ de X^* qui étend $\tilde{\Phi} = (\Phi, U_2\Phi, ..., U_r\Phi)$ (où Φ est la fonction définie au (i) du théorème).

Notons p la projection p: $\tilde{X}^* \to X^*$. Si $\Psi = (\Psi_1, ..., \Psi_r)$ est le prolongement multivalué de $\tilde{\Phi} \circ p$ à $\tilde{X}^*$, Ψ_1 étend $\Phi \circ p$ de $p^{-1}(U^*)$ à $\tilde{X}^*$. D'après nos hypothèses $p^{-1}(U^*)$ est le recouvrement universel de U^*. En outre pour $\gamma \in \pi_1(U^*, x_0) = \pi_1(X^*, x_0)$ (où $x_0 \in U^*$), $p^*\Phi = \Phi \circ p$ est invariante pour la monodromie T_γ puisqu'elle provient d'une fonction sur U^*. Par prolongement holomorphe il en va de même de Ψ_1, i.e., Ψ_1 passe au quotient par p et définit sur X^* un prolongement de Φ_1, noté encore Ψ_1.

Alors par recollement on a obtenu un prolongement holomorphe de Φ à $X^* \cup U$. Donc grâce au lemme A.1.8 de [6] celui-ci se prolonge à X tout entier et ceci achève de prouver (ii).

RÉFÉRENCES

1. E. VAN DEN BAN, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symetric spaces, *Indag. Math.* **90** (1987), 225–249.
2. E. VAN DEN BAN, Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula, *Ark. Math.* **25** (1987), 175–187.
3. E. VAN DEN BAN ET P. DELORME, Appendice de Ref. [7].
4. W. CASSELMAN, Systems of analytic differential equations of finite codimension, preprint.
5. W. CASSELMAN, Jacquet modules for real reductive groups, *in* "Proceedings, International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978," pp. 557–563.
6. W. CASSELMAN ET D. MILICIC, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* **49** (1982), 869–930.
7. P. DELORME, Injections de modules sphériques pour les espaces symétriques réductifs dans certaines représentations induites, *in* "Proceedings, Luminy, 1985," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1243, pp. 108–144, Springer-Verlag, 1987.
8. J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes." Gauthier-Villars, Paris.
9. J. KOREVAAR ET J. WIEGERINCK, A representation of mixed derivatives with an application to the edge of the wedge theorem, *Indag. Math.* **47** (1985), 77–86.
10. W. WALTER, "Gewöhliche Differentialgleichungen," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.