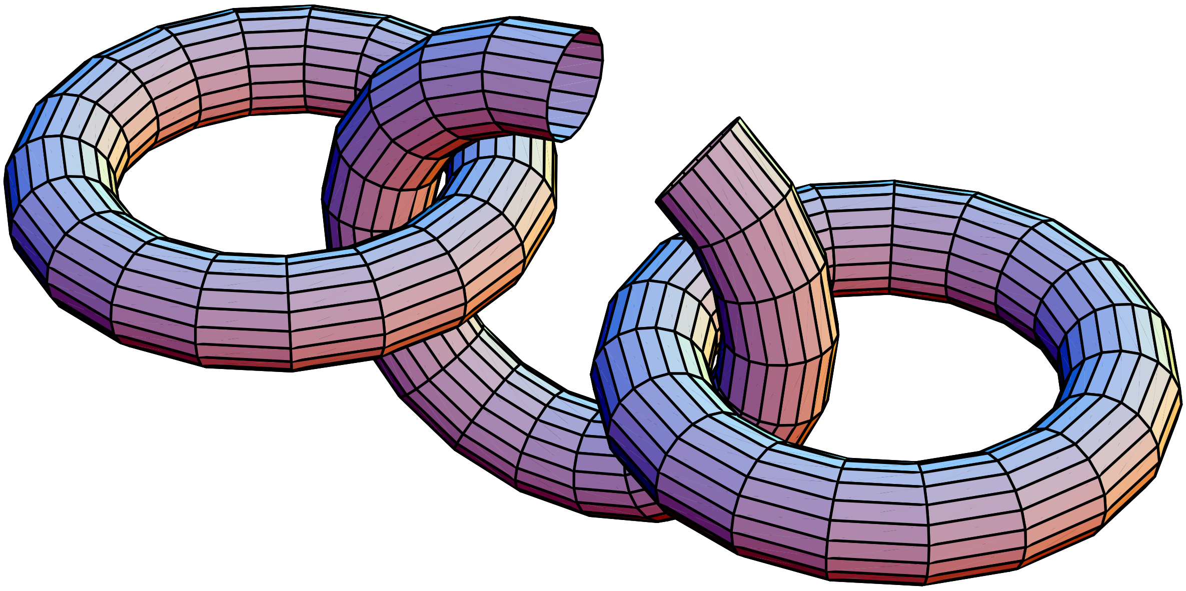
Kettingbreuken

Frits Beukers

Masterclass Kettingbreuken
Utrecht, 14 en 15 oktober 2011



Inhoudsopgave

1 Inleiding

Een bekende manier om reële getallen te representeren is via hun decimale ontwikkeling. Er bestaat echter ook een andere manier om getallen te representeren, namelijk via kettingbreuken. Deze manier om getallen te schrijven is al sinds de oudheid bekend. Met kettingbreuken kan men optimale rationale benaderingen van getallen construeren. Verder hebben ze veel onverwachte eigenschappen en vormen bovendien een bron van vermaak voor diegenen die zich ermee bezig houden. In deze aantekeningen geven we geen standaard inleiding tot de theorie van de kettingbreuken, daarvoor verwijzen we naar de vele getaltheorieboeken die er zijn, bijvoorbeeld Hoofdstuk 14 in *Getaltheorie voor beginners*, Epsilon Uitgaven Utrecht, geschreven door ondergetekende. Wel zullen we een aantal verrassende eigenschappen van kettingbreuken van rationale getallen en getallen van de vorm $\sqrt{N}$ presenteren. Ook geven we een verklaring voor deze eigenaardigheden met een minimum aan technische manipulaties.

2 Wat is een kettingbreuk?

We beginnen met ons eerste voorbeeld, de kettingbreukontwikkeling van π. Voor zijn kettingbreuk zullen we allereerst de decimalen van π nodig hebben. Hier zijn de eerste tien: $\pi = 3.1415926535\ldots$. We splitsen π in zijn gehele deel en de rest tussen 0 en 1.

$$\pi = 3 + 0.1415926535\ldots.$$

De rest $0.1415\ldots$ schrijven we als $\frac{1}{7.06251330\ldots}$ en van het getal onder de breukstreep nemen we weer het gehele deel en de rest:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + 0.06251330\ldots}.$$

De rest $0.06251330\ldots$ schrijven we als $\frac{1}{15.996594396\ldots}$ en van het getal onder de breukstreep nemen we weer geheel deel plus rest

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+0.996594396\ldots}}.$$

Hopelijk is het nu duidelijk hoe we verder gaan. Ter controle, de volgende stap levert

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+\frac{1}{1+0.0034172412}}}.$$

We kunnen zo lang doorgaan als we willen en krijgen de oneindige kettingbreukontwikkeling van π. De getallen $3, 7, 15, 1, \ldots$ heten de *wijzergetallen* van de kettingbreuk. De resten tussen 0 en 1 die we steeds tegenkwamen noemen we de *resten* van de kettingbreukontwikkeling. Omdat kettingbreuken, zoals boven, typografisch onhandig zijn, schrijven we een kettingbreuk in een iets handzamer formaat. De kettingbreuk van π schrijven we als

$$\pi = [3, 7, 15, 1, \ldots].$$

Het zal duidelijk zijn dat we in plaats van π ieder ander positief getal hadden kunnen nemen. Het enige ongeluk dat onderweg kan gebeuren is wanneer een rest nul is. De volgende stap zou dan $1/0$ zijn en dat kan niet. In de volgende paragraaf zullen we zien dat dit alleen kan gebeuren als het getal waarmee we beginnen een rationaal getal is, dat wil zeggen een breuk. Getallen die geen breuk zijn noemen we *irrationaal*. Het getal π is bijvoorbeeld irrationaal. De kettingbreukontwikkeling van π is dus oneindig.
Een belangrijke eigenschap van kettingbreuken is dat ze zulke goede rationale benaderingen opleveren. Breken we de kettingbreuk voor π op de achtereenvolgende plaatsten af, dan vinden we:

$$[3] = 3$$

$$[3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

$$[3, 7, 15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

$$[3, 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$$

De verschillen met π zijn

$$0.14\ldots, \qquad -0.00126\ldots, \qquad 0.0000832\ldots, \qquad -0.000000266\ldots$$

In het bijzonder staan de breuken 22/7 en 355/113 sinds de oudheid bekend als uitstekende benaderingen van π. We noemen $3, 22/7, 333/106, \ldots$ de *convergenten* van de kettingbreukontwikkeling van π.
In het algemeen, als p/q een convergent is van de kettingbreukontwikkeling van een getal α, dan geldt

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Hieruit zien we dat convergenten heel bijzondere rationale benaderingen zijn. Zouden we zomaar een noemer q kiezen, dan kunnen we weliswaar een geheel getal p vinden zodat $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q}$ (ga zelf na waarom), maar $1/q^2$ is natuurlijk veel kleiner dan $1/2q$. De kettingbreukontwikkeling van α selecteert die rationale benaderingen van α die uitzonderlijk goed zijn met betrekking tot de grootte van de noemer.
In de volgende paragrafen gaan we in op wat kettingbreuken van bijzondere getallen. De lezer is daarbij uitgenodigd om zelf ook eens te experimenteren. Veel wiskundeprogramma's hebben één of meer commando's om kettingbreuken te bepalen. De professionele pakketten MAPLE en MATHEMATICA zijn bij uitstek geschikt, maar helaas, door hun prijs, niet algemeen te vinden op middelbare scholen. Veel van de Mathematica commando's kunnen tegenwoordig ook op de website Wolfram Alpha ingevoerd worden (www.wolframalpha.com). Verder heeft DERIVE, dat wel betaalbaar is en op sommige scholen gebruikt wordt, ook een functie voor kettingbreuken. De berekeningen die in deze tekst plaatsvinden kunnen in principe met DERIVE uitgevoerd worden. Tenslotte is er het gratis programma PARI, een calculator die met ouderwetse commandlines werkt, maar wel heel handzaam en snel is.

3 Eerste eigenschappen

In het algemeen ziet een kettingbreuk van een positief getal α eruit als $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. De afgebroken ontwikkelingen noemen we de convergenten van de kettingbreuk en geven die aan met

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \text{ voor } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Laten we nog eens de kettingbreuk van π bekijken,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]$$

Dus $a_0 = 3, a_1 = 7, a_2 = 15$, etcetera. Kijken we nog eens naar de convergenten,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}, \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} \ldots$$

We kunnen deze getallen in het volgende schema zetten:

n:			0	1	2	3	$\ldots$
p_n:	0	1	3	22	333	355	$\ldots$
q_n:	1	0	1	7	106	113	$\ldots$
a_n:			3	7	15	1	$\ldots$

Je zou uit deze tabel de volgende stelling kunnen vermoeden.

Stelling 3.1 *Met de boven ingevoerde notaties geldt voor* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *dat*

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \text{ en } q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Een dergelijke stelling moet natuurlijk wel bewezen worden. Voor de liefhebbers is hier een **bewijs** van de stelling.

Kies n en zij x een reële variabele. We gaan kijken naar $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n + x]$ waarin de a_i gehele getallen zijn met $a_0 \geq 0$ en $0 < a_1, a_2, a_3, \ldots$. Wij beweren dat er gehele getallen $A, B, C, D \geq 0$ zijn met de volgende eigenschappen

1. $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + x] = \frac{Ax+B}{Cx+D}$.
2. A en C hebben geen gemeenschappelijke deler behalve 1 en hetzelfde geldt voor B en D.

Deze bewering mag je zelf aantonen (zie hieronder). Wij gaan A, B, C, D bepalen. Laten we $x = 0$ invullen in onze formule. We krijgen

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{B}{D}$$

Maar we weten ook dat dit p_n/q_n moet zijn. Dus $B = p_n, D = q_n$.
Laten we nu $x \to \infty$ in onze formule. Probeer dan zelf in te zien dat we krijgen,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \frac{A}{C}$$

Maar we weten ook dat dit p_{n-1}/q_{n-1} moet zijn. Dus $A = p_{n-1}, C = q_{n-1}$.
Vul tenslotte $x = 1/a_{n+1}$ in. We vinden dan

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \frac{A + Ba_{n+1}}{C + Da_{n+1}} = \frac{p_{n-1} + a_{n+1}p_n}{q_{n-1} + a_{n+1}q_n}.$$

Maar we weten ook dat dit p_{n+1}/q_{n+1} moet zijn. Dus

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \text{ en } q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

$\square$

Bovenstaand bewijs is eigenlijk gebaseerd op de volgende belangrijke gelijkheid

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + x] = \frac{p_{n-1}x + p_n}{q_{n-1}x + q_n} \qquad (1)$$

Opgave 3.2 *Waarom geldt bewering (1) uit bovenstaand bewijs? En bewering (2)?*

Opgave 3.3 *Ga na dat* $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ *en* $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1a_0+1}{a_1}$.

Er is nog een eigenschap van de convergenten die belangrijk is, namelijk

Stelling 3.4 *Neem weer de notaties zoals boven. Dan geldt voor alle* $n \geq 1$,

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n.$$

Bewijs. Voor $n = 1$ is de stelling waar. We hebben namelijk $p_0 = a_0, q_0 = 1$ en $p_1 = a_0a_1 + 1, q_1 = a_1$. Hieruit volgt dat $p_0q_1 - p_1q_0 = a_0a_1 - (a_0a_1 + 1) = -1$. We gaan nu het geval $n = 2$ aanpakken. We weten dat $p_2 = a_2p_1 + p_0$ en $q_2 = a_2q_1 + q_0$. Hiervan maken we gebruik bij de volgende berekening,

$$\begin{aligned} p_1q_2 - p_2q_1 &= p_1(a_2q_1 + q_0) - q_1(a_2p_1 + p_0) \\ &= p_1q_0 - q_1p_0 \\ &= -(p_1q_0 - p_0q_1) = 1 \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt uit onze eerdere berekening voor $n = 1$. Voor $n = 3$ gaan we op dezelfde wijze te werk en gebruiken hierbij ons resultaat voor $n = 2$. Enzovoort. In het algemeen volgt door een dergelijke berekening uit $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$ en $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ en $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ dat $p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$. We noemen dit een *bewijs door volledige inductie*.

□

4 Kettingbreuken van rationale getallen

Laten we eens starten met een breuk bijvoorbeeld 37/13. Laten we hier ons kettingbreuk algoritme op los,

$$\begin{aligned} \frac{37}{13} &= 2 + \frac{11}{13} \\ \frac{13}{11} &= 1 + \frac{2}{11} \\ \frac{11}{2} &= 5 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

We concluderen hieruit dat

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$$

hetgeen we handiger zullen opschrijven als

$$\frac{37}{13} = [2, 1, 5, 2].$$

We kunnen nu ook de convergenten opschrijven.

a_n			2	1	5	2
p_n	0	1	2	3	17	37
q_n	1	0	1	1	6	13

Uit de voorgaande paragraaf weten we ook, zonder rekenen, dat $17 \cdot 13 - 6 \cdot 37 = -1$. Met andere woorden, we hebben gehele getallen x, y gevonden zó dat $37x - 13y = 1$.

Opgave 4.1 *Bepaal de kettingbreukontwikkeling van* $358/271$ *en bepaal gehele getallen* x, y *zó dat* $271x - 358y = 1$.

Opgave 4.2 *Stel we hebben een kettingbreukontwikkeling van een rationaal getal. Ga na dat de noemer van elke rest strikt kleiner is dan de noemer van de voorgaande rest. Concludeer hieruit dat het kettingbreukalgoritme voor een rationaal getal afbreekt.*

De kettingbreukontwikkeling van een rationaal is niet helemaal vastgelegd. Bijvoorbeeld

$$2 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}.$$

In het algemeen, als $a_n > 1$,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1].$$

Door deze keuzevrijheid kunnen we er zelf voor kiezen of de kettingbreukontwikkeling van een rationaal getal even lengte of oneven lengte krijgt. Dit heeft de volgende toepassing.

Stelling 4.3 *Stel* p, q, p', q' *zijn positieve gehele getallen zó dat* $p > p', q > q'$ *en* $p'q - pq' = 1$. *Dan heeft de kettingbreukontwikkeling van* p/q *met* <u>*oneven*</u> *lengte als laatste twee convergenten* p'/q' *en* p/q.
Als $p'q - pq' = -1$ *dan heeft de kettingbreukontwikkeling van* p/q *met* <u>*even*</u> *lengte als laatste twee convergenten* p'/q' *en* p/q.

Opgave 4.4 *Controleer deze stelling aan de hand van* $p = 7, q = 5$ *en* $3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 1$ *en van* $2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

We gaan nu de zaak omdraaien.

Opgave 4.5 *Bepaal de convergenten die horen bij de kettingbreuk* $[3, 1, 1, 3, 1, 5]$. *En ook de convergenten die horen bij* $[5, 1, 3, 1, 1, 3]$.

Uit de vorige opgave zou je de volgende stelling kunnen vermoeden.

Stelling 4.6 *Stel* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *positieve gehele getallen en*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Dan geldt

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Het **bewijs** is niet lastig. We maken gebruik van de relatie $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$. Dus

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{p_{n-1}/p_{n-2}}.$$

Op p_{n-1}/p_{n-2} passen we hetzelfde trucje toe en zo doorgaand vinden we

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, p_{n-1}/p_{n-2}] = [a_n, a_{n-1}, p_{n-2}/p_{n-3}]$$

etcetera tot we uitkomen op

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, p_1/p_0].$$

Omdat $p_1/p_0 = (a_0a_1 + 1)/a_0 = a_1 + 1/a_0$ volgt onze bewering.

□

We gaan al het bovenstaande toepassen op *palindrome kettingbreukontwikkelingen.* Je weet wat palindromen zijn, hier zie je een paar voorbeelden,

"Mooie zeden in Ede", zei oom
God, red nu 'ns 'n underdog
A man, a plan, a canal, Panama!

Hier is een opgave met palindrome kettingbreuken.

Opgave 4.7 *Bepaal de convergenten van* $[1, 2, 3, 3, 2, 1]$. *Wat valt je op aan de laatste twee convergenten?*
Nu algemeen. Stel dat p'/q' *en* p/q *de laatste twee convergenten van een palindrome kettingbreuk zijn. Bewijs dat* $p' = q$.
Bewijs ook dat $q^2 - pq' = (-1)^{r-1}$, *waarin* r *de lengte van de kettingbreuk is.*

We kunnen al het bovenstaande ook combineren tot de volgende opgave.

Opgave 4.8 *Kies een positief geheel getal* q *en zij* p *een deler van* $q^2 + 1$ *met* $p > q$. *Dan is de rij wijzergetallen van de kettingbreuk van* p/q *met even lengte een palindroom.*

1. *Geef een voorbeeld van deze bewering (dwz kies zelf een* q, p *en bepaal de kettingbreuk van* p/q*).*

2. *Bewijs de algemene bewering.*

Bewijs ook de volgende bewering: Stel dat $p > q$ *een deler van* q^2-1 *is. Dan is de rij wijzergetallen van de kettingbreuk van* p/q *met oneven lengte een palindroom.*

5 Kettingbreuken van wortelgetallen

Een aantal irrationale getallen heeft een kettingbreukontwikkeling met een opvallend patroon erin. Dat geldt met name voor getallen van de vorm $\sqrt{N}$, waarin N een natuurlijk getal is, dat geen kwadraat is. Hier zijn een paar voorbeelden van hun kettingbreuken.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] \\
\sqrt{13} &= [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \ldots] \\
\sqrt{14} &= [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, \ldots] \\
\sqrt{31} &= [5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, \ldots]
\end{aligned}$$

Duidelijk springen hier twee regelmatigheden naar voren:

1. Na het eerste wijzergetal is de rij wijzergetallen periodiek. Bijvoorbeeld, het periodieke blok bij $\sqrt{14}$ is $1, 2, 1, 6$ en bij $\sqrt{31}$ is dat $1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10$.

2. Als we van het periodieke blok het laatste cijfer weglaten, vormen de overgebleven wijzergetallen een palindroom. Bijvoorbeeld de cijfers $1, 2, 1$ bij $\sqrt{14}$ en $1, 1, 3, 5, 3, 1, 1$ bij $\sqrt{31}$.

In deze paragraaf zullen we deze twee regelmatigheden verklaren. Allereerst, de kettingbreuk van een wortelgetal kunnen we niet alleen met een rekenapparaat of computer bepalen, maar ook gewoon met de hand. We zullen dit laten zien aan de hand van $\sqrt{14}$. Het enige dat we daarbij hoeven te weten is dat $\sqrt{14}$ tussen 3 en 4 ligt. De eerste stap van de kettingbreuk is daarmee duidelijk

$$\sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14} - 3).$$

We bepalen nu de inverse van de rest $\sqrt{14} - 3$ en doen dit door exact te rekenen. We gebruiken hierbij een truc die ook bij deling van complexe getallen gebruikt wordt, alleen speelt $\sqrt{14}$ nu de rol van $\sqrt{-1}$. Om $\frac{1}{\sqrt{14}-3}$ te bepalen, vermenigvuldigen we teller en noemer met $\sqrt{14} + 3$. In de noemer krijgen we dan 5 en in de teller $\sqrt{14} + 3$. Dus

$$\frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-2}{5}.$$

In het tweede deel van bovenstaande regel hebben we ook alvast weer het gehele deel van de inverse afgesplitst. Dat dit gehele deel 1 moet zijn, zien we uit het feit dat de teller van $\frac{\sqrt{14}+3}{5}$ tussen 6 en 7 ligt. Neem weer de inverse van de laatste rest en splits het gehele deel af:

$$\frac{5}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14}-2}{2}.$$

Reken dit zelf na! Nog een keer:

$$\frac{2}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-3}{5}.$$

En nog een keer:

$$\frac{5}{\sqrt{14}-3} = \sqrt{14} + 3 = 6 + \sqrt{14} - 3.$$

De rest $\sqrt{14} - 3$ hadden we al eerder gezien, namelijk bij onze eerste stap! Dat betekent dat we van nu af aan steeds weer hetzelfde rijtje resten zullen tegenkomen. Tevens zullen de wijzergetallen $1, 2, 1, 6$ die we tot nu toe vonden periodiek terugkeren. Daarmee hebben we de periodiciteit van de kettingbreuk van $\sqrt{14}$ vastgesteld. Voor later gebruik schrijven we de rij resten achter elkaar op:

$$\frac{\sqrt{14}-3}{1} \quad \frac{\sqrt{14}-2}{5} \quad \frac{\sqrt{14}-2}{2} \quad \frac{\sqrt{14}-3}{5}.$$

De daarop volgende rest wordt weer $\sqrt{14} - 3$ en de rij herhaalt zich weer.

Opgave 5.1 *Bepaal de kettingbreukontwikkeling van* $\sqrt{23}$ *op dezelfde manier als boven. Schrijf ook de rij resten op.*

Voor willekeurige N hebben we de volgende stelling.

Stelling 5.2 *Zij* N *een positief geheel getal en geen kwadraat. Dan hebben de resten van de kettingbreuk van* $\sqrt{N}$ *de vorm*

$$\frac{\sqrt{N}-P}{Q}, \tag{2}$$

waarin P, Q *natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:*

i. $P < \sqrt{N}$.

ii. Q *deelt* $N - P^2$.

iii. $\frac{\sqrt{N}+P}{Q} > 1$

Bewijs. Eigenschap i) volgt direct uit het feit dat $0 < \frac{\sqrt{N}-P}{Q}$.
De twee andere eigenschappen kunnen we zien door een inductief proces. De eerste rest, $\sqrt{N} - \lfloor\sqrt{N}\rfloor$, heeft de drie genoemde eigenschappen want $P = \lfloor\sqrt{N}\rfloor$ en $Q = 1$ in dit geval (met $\lfloor x \rfloor$ bedoelen we het grootste gehele getal $\le x$). Stel dat we van een rest weten dat hij de vorm (2) heeft, met eigenschappen i), ii), iii). We zullen laten zien dat de volgende rest deze eigenschappen ook heeft. Stel namelijk $Q' = (N - P^2)/Q$ en merk op dat

$$\frac{Q}{\sqrt{N}-P} = Q\frac{\sqrt{N}+P}{N-P^2} = \frac{\sqrt{N}+P}{Q'}.$$

Stel dat het gehele deel van het laatste getal k is, dan geldt

$$\frac{\sqrt{N}+P}{Q'} = k + \frac{\sqrt{N}-P'}{Q'}$$

waarin $P' = -P + kQ'$. De volgende rest is dus $\frac{\sqrt{N}-P'}{Q'}$. Omdat Q' een deler is van $N - P^2$, is Q' ook deler van $N - (P')^2 = N - P^2 + 2kPQ' - (Q')^2$. Dit bewijst eigenschap ii). Tenslotte,

$$\frac{\sqrt{N}+P'}{Q'} = \frac{\sqrt{N}+kQ'-P}{Q'} = k + \frac{\sqrt{N}-P}{Q'}. \tag{3}$$

Omdat $k \ge 1$ en $\sqrt{N} > P$, zien we dat $(\sqrt{N}+P')/Q' > 1$. Dit bewijst eigenschap iii).

□

Uit bovenstaande bewering kunnen we nog meer halen. Stel we hebben twee opeenvolgende resten,

$$\frac{\sqrt{N}-P}{Q}, \quad \frac{\sqrt{N}-P'}{Q'}.$$

De tweede volgt uit de eerste door een stap van het kettingbreuk algoritme uit te voeren. Namelijk

$$\left(\frac{\sqrt{N}-P}{Q}\right)^{-1} = k + \frac{\sqrt{N}-P'}{Q'},$$

waarin k het wijzergetal bij de betreffende stap is. Verander nu $\sqrt{N}$ in $-\sqrt{N}$, vermenigvuldig alles met -1. Breng in de rechtse gelijkheid de term $-k$ naar de linkerkant van het =-teken. We vinden,

$$\frac{\sqrt{N}+P'}{Q'} = k + \left(\frac{\sqrt{N}+P}{Q}\right)^{-1}.$$

Uit eigenschap iii) van Bewering 2 weten we dat $(\sqrt{N}+P)/Q > 1$ en dus geldt dat k het grootste gehele getal kleiner dan $(\sqrt{N}+P')/Q'$ is. Dus de eerste rest volgt op unieke wijze uit de tweede door

$$\frac{\sqrt{N}-P}{Q} = \frac{1}{k+\frac{\sqrt{N}-P'}{Q'}}.$$

We kunnen nu periodiciteit van de wijzergetallen van $\sqrt{N}$ bewijzen.

Periodiciteit. We volgen de kettingbreuk ontwikkeling met resten van de vorm (2). We weten dat $P < \sqrt{N}$ en dat $Q < \sqrt{N}+P < 2\sqrt{N}$ (eigenschappen i) en iii) in Bewering 2). Het aantal verschillende paren P, Q dat kan optreden is dus eindig. Dus is ook het aantal mogelijke resten eindig. Dit betekent dat er een rest van de vorm (2) is die na enige stappen in de kettingbreukontwikkeling weer optreedt. Dat betekent dat de rij resten en inverse resten het volgende patroon heeft:

$$\sqrt{N}-\lfloor\sqrt{N}\rfloor, \ldots, \frac{\sqrt{N}-P}{Q}, \ldots, \frac{\sqrt{N}-P}{Q}, \ldots$$

Na de tweede rest $\frac{\sqrt{N}-P}{Q}$ weten we zeker dat de rij periodiek is geworden, en daarmee ook de rij wijzergetallen. We weten dat de resten voorafgaand aan de eerste $\frac{\sqrt{N}-P}{Q}$ uniek bepaald zijn. We komen ook de rest $\sqrt{N}-\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ tegen. Dit betekent dat we deze rest ook tegenkomen als vanaf de tweede $\frac{\sqrt{N}-P}{Q}$ naar links werken. Dus in de rij tussen de twee resten $\frac{\sqrt{N}-P}{Q}$ komt $\sqrt{N}-\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ voor. Dit betekent dat periodiciteit al vanaf de eerste rest optreedt. Hetzelfde geldt dus ook voor de wijzergetallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$. We hebben de volgende stelling bewezen.

Stelling 5.3 *Stel N is een positief geheel getal en geen kwadraat. Dan heeft de kettingbreuk-ontwikkeling van $\sqrt{N}$ de vorm*

$$\sqrt{N} = [\lfloor\sqrt{N}\rfloor, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_r, 2\lfloor\sqrt{N}\rfloor}]$$

waarin de streep aangeeft dat het blok $a_1, \ldots, a_r, 2\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ steeds herhaald wordt.

Opgave 5.4 *Zij N een natuurlijk getal en geen kwadraat. Met $l(N)$ geven we de kleinste periodelengte van de wijzergetallen van $\sqrt{N}$. Bepaal voor een aantal zelfgekozen waarden van N de periodelengte $l(N)$ en maak er een tabel van. Probeer zo lang mogelijke periodes te vinden.*

Opgave 5.5 *Bepaal de kettingbreukontwikkelingen van getallen van de volgende vorm,*

1. $\sqrt{n^2-1}$ *met $n > 1$ geheel.*
2. $\sqrt{n^2+1}$ *met $n > 1$ geheel.*
3. $\sqrt{n^2+2}$ *met $n > 1$ geheel.*
4. $\sqrt{n^2+4}$ *met $n > 1$ even geheel.*
5. $\sqrt{n^2+4}$ *met $n > 1$ oneven geheel.*

De laatste twee kun je het beste met Mathematica testen. Probeer hier nog meer variaties op, bijvoorbeeld $\sqrt{n^2-2}$ of $\sqrt{n^2 \pm n+1}$, etc.

Opgave 5.6 *Bepaal het getal dat hoort bij de volgende kettingbreuken,*

1. $[1, 1, 1, 1, \ldots]$.
2. $[1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$.
3. $[a, b, 2a, b, 2a, b, 2a, b, \ldots]$ *waarin a, b positieve gehele getallen zijn.*
4. *Geef een aantal keuzen voor a, b zó dat het getal uit de vorige opgave de vorm $\sqrt{N}$ met N geheel heeft.*

6 De Pell-vergelijking

Stel N is een natuurlijk getal en geen kwadraat. De vergelijking

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

in de onbekende, niet-negatieve, gehele getallen x, y staat bekend als de *vergelijking van Pell*. Eén oplossing is direct duidelijk, $x = 1, y = 0$. We zijn echter geïnteresseerd in niet-triviale oplossingen, dat wil zeggen $y > 0$ en die blijken altijd te bestaan, er zijn er zelfs oneindig veel! Neem bijvoorbeeld

$$x^2 - 14y^2 = 1.$$

Na enig proberen zou je er misschien achter hebben kunnen komen dat $x = 15, y = 4$ de oplossing is met kleinst mogelijk positieve y-waarde, maar had je $x = 449, y = 120$ ook verwacht, of $x = 13455, y = 3596$? Er is een systematische methode om al deze oplossingen te vinden. Neem de convergenten van de kettingbreuk van $\sqrt{14}$,

a_n:			3	1	2	1	6	1	2	1	6
p_n:	0	1	3	4	11	15	101	116	333	449	
q_n:	1	0	1	1	3	4	27	31	89	120	

Zie je de genoemde oplossingen van de Pell-vergelijking?

Opgave 6.1 *Bepaal een gehele oplossing van $x^2 - 23y^2 = 1$ met $y > 0$ met behulp van de kettingbreuk van $\sqrt{23}$*

De algemene stelling luidt als volgt.

Stelling 6.2 *Stel N is een positief geheel getal en geen kwadraat. Geef de kettingbreuk van $\sqrt{N}$ aan met*

$$\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_r, 2a_0}], \ a_0 = \lfloor \sqrt{N} \rfloor.$$

Stel $p_r/q_r = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$. Dan geldt $p_r^2 - Nq_r^2 = (-1)^{r+1}$.

Het **bewijs** van deze stelling volgt uit de observatie dat

$$\sqrt{N} = [a_0, a_1, \ldots, a_r, a_0 + \sqrt{N}].$$

Stel $p/q = [a_0, a_1, \ldots, a_r, a_0]$. Dan volgt uit gelijkheid (1) met $x = \sqrt{N}$ dat

$$\sqrt{N} = \frac{p + p_r\sqrt{N}}{q + q_r\sqrt{N}}.$$

Vermenigvuldig met $q + q_r\sqrt{N}$,

$$Nq_r + q\sqrt{N} = p + p_r\sqrt{N}.$$

Door vergelijking van linker- en rechterzijde vinden we hieruit dat $p = Nq_r$ en $q = p_r$. Omdat p_r/q_r en p/q opeenvolgende convergenten van een kettingbreuk zijn weten we dat $p_rq - q_rp = (-1)^{r+1}$. Vullen we onze resultaten voor p, q hierin dan krijgen we $p_r^2 - Nq_r^2 = (-1)^{r+1}$.

□

Uit dit bewijs volgt ook nog een bonus. De breuken $p_r/q_r, Nq_r/p_r$ zijn de laatste twee convergenten van $[a_0, a_1, \ldots, a_r, a_0]$. Omdat de noemer van de laatste gelijk is aan de teller van de voorlaatste volgt hieruit meteen dat de rij $a_0, a_1, \ldots, a_r, a_0$ een palindroom is.
Hoewel we nu weten dat de Pell-vergelijking $x^2 - Ny^2 = 1$ altijd niet-triviale oplossingen heeft, is het voor gegeven N niet meteen te voorspellen hoe groot de kleinste niet-triviale oplossing is. Soms moeten we erg lang zoeken, zoals bij $N = 61$. De kleinste oplossing is $1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = 1$. In 1657 vond de Engelse wiskundige W.Brouncker een oplossingsmethode. Hij vond onder anderen dat

$$x = 32188120829134849, \quad y = 1819380158564160$$

de 'kleinste' niet-triviale oplossing voor $x^2 - 313y^2 = 1$ is! De methode van Brouncker werd beschreven in het boek van J.Wallis over algebra en getaltheorie. Door een misverstand nam Euler aan dat de oplossingsmethode van de

Engelse wiskundige John Pell afkomstig was. Sindsdien is Pell's naam aan deze vergelijking blijven kleven, hoewel Pell er niets mee van doen had.
Tenslotte geven we zonder bewijs aan hoe je alle oplossingen van een vergelijking van Pell kunt krijgen. Met de kettingbreukmethode hadden we al gezien dat $15^2 - 14 \cdot 4^2 = 1$. Anders geschreven,

$$(15 + 4\sqrt{14})(15 - 4\sqrt{14}) = 1. \tag{4}$$

Neem aan beide zijden het kwadraat en gebruik de gelijkheden

$$(15 + 4\sqrt{14})^2 = 449 + 120\sqrt{14}, \ (15 - 4\sqrt{14})^2 = 449 - 120\sqrt{14}.$$

We vinden,

$$(449 + 120\sqrt{14})(449 - 120\sqrt{14}) = 1$$

en dus $449^2 - 14 \cdot 120^2 = 1$. In plaats van een kwadraat kunnen we ook een derde macht nemen. Omdat $(15 + 4\sqrt{14})^3 = 13455 + 3596\sqrt{14}$ vinden we

$$13455^2 - 14 \cdot 3596^2 = 1.$$

Het blijkt dat er bij elke gehele positieve oplossing x, y van $x^2 - 14y^2 = 1$ een macht n bestaat zó dat $x + y\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^n$.

Opgave 6.3 *Type in je grafische rekenmachine* $(15 + 4\sqrt{14})^n/2$ *in voor* $n = 2, 3, 4$. *Verklaar de antwoorden die je ziet.*

Voor elke waarde van N kunnen we de oplossingen van $x^2 - Ny^2 = 1$ op een dergelijke manier bepalen. Alleen moet er soms een extra stapje gedaan worden. We illustreren dit aan de hand van $N = 61$. Bepaal eerst de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{61}$. Die luidt:

$$\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}].$$

Vervolgens bepalen we

$$[7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1] = \frac{29718}{3805}.$$

Volgens onze theorie moet gelden

$$29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1.$$

De oplossingen x, y van de vergelijking $x^2 - 61y^2 = 1$ krijgen we nu door de*even* machten van $29718 + 3805\sqrt{61}$ te nemen. De kleinste oplossing wordt dus gegeven door

$$(29718 + 3805\sqrt{61})^2 = 1766319049 + 226153980\sqrt{61}.$$

De oplossingen van $x^2 - 61y^2 = -1$ krijgen we door de *oneven* machten te nemen.

Opgave 6.4 *Bepaal het viertal kleinste oplossingen van* $x^2 - 2y^2 = 1$.

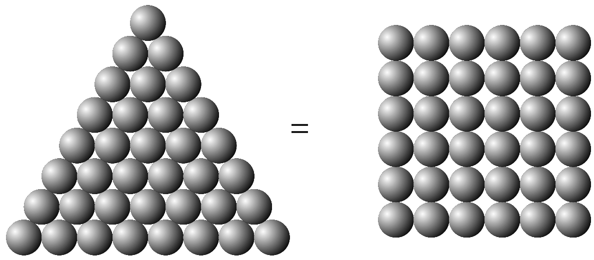
Opgave 6.5 *Bepaal voor elke positieve gehele waarde van m de kleinste positief gehele oplossing x, y van de volgende vergelijkingen,*

1. $x^2 - (m^2 - 1)y^2 = 1$
2. $x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1$
3. $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$

7 Een paar toepassingen

7.1 Het knikkerprobleem

Stel ik heb een aantal knikkers die ik zowel in een vierkant als driehoekig patroon kan neerleggen, bijvoorbeeld



Vraag: Met hoeveel knikkers kan dat?
Eén oplossing is duidelijk, 1 knikker. Maar dat is een nogal flauwe. We willen graag wat interessantere oplossingen vinden. Een tweede oplossing vinden in het plaatje, namelijk 36. Bestaan er nog meer oplossingen ? Hopelijk is het duidelijk dat we hiertoe de vergelijking $m^2 = n(n+1)/2$ in gehele getallen m, n moeten oplossen. Vermenigvuldig aan beide zijden met 8. We krijgen $8m^2 = 4n^2 + 4n$. Tel 1 aan beide zijden op, $1 + 8m^2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$, en dus $1 = (2n+1)^2 - 8m^2$. We zijn op de vergelijking van Pell met $N = 8$ terechtgekomen. De kleinste oplossing is $3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$, corresponderend met $m = 1$, onze 'flauwe' oplossing. Alle andere oplossingen krijgen we door de machten van $3 + \sqrt{8}$ uit te werken. Achtereenvolgens vinden we hiermee,

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{8})^2 &= 17 + 6\sqrt{8}\\(3+\sqrt{8})^3 &= 99 + 35\sqrt{8}\\(3+\sqrt{8})^4 &= 577 + 204\sqrt{8}\\ &\cdots\end{aligned}$$

corresponderend met de kwadraten $m^2 = 6^2, 35^2, 204^2, \ldots$ die tevens driehoeksgetal zijn. De conclusie is dat er oneindig veel oplossingen van ons probleem zijn, en ook dat ze een zeer snel groeiende rij van getallen vormen.
Voor diegenen die de rij nog wat verder willen voortzetten is hier nog een handige truc. Stel namelijk $x_n + y_n\sqrt{8} = (3+\sqrt{8})^n$. We interesseren ons

voor de waarden van y_n. We weten dat $3+\sqrt{8}$ voldoet aan een kwadratische vergelijking,

$$(3+\sqrt{8})^2 = 6(3+\sqrt{8}) - 1.$$

Vermenigvuldig aan beide zijden met $(3+\sqrt{8})^n$,

$$(3+\sqrt{8})^{n+2} = 6(3+\sqrt{8})^{n+1} - (3+\sqrt{8})^n.$$

Dit impliceert,

$$x_{n+2} + y_{n+2}\sqrt{8} = 6(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{8}) - (x_n + y_n\sqrt{8}).$$

Door de getallen die voor $\sqrt{8}$ staan te vergelijken vinden we dat $y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$. We hebben een zogenaamde recursierelatie voor de getallen y_n gevonden, waarmee deze getallen snel uitgerekend kunnen worden. Beginnen we met de waarden $y_0 = 0$ en $y_1 = 1$, dan volgen de waarden

$$6 = 6\cdot 1 - 0, \quad 35 = 6\cdot 6 - 1, \quad 204 = 6\cdot 35 - 6, \quad \ldots$$

hierna in rap tempo.

7.2 Het runderprobleem van Archimedes

Deze toepassing is meer van folkloristische waarde. In de vorm van een epigram schetst Archimedes hoeveel runderen Apollo, de god van de zon, heeft. Ze komen in vier verschillende kleuren voor, wit, zwart, gevlekt en geel. Zij W, X, Y, Z het aantal stieren van deze respectievelijke kleur en w, x, y, z het aantal koeien. Verder is gegeven dat

$$\begin{array}{rr} W = (1/2+1/3)X + Z & X = (1/4+1/5)Y + Z \\ Y = (1/6+1/7)W + Z & w = (1/3+1/4)(X+x) \\ x = (1/4+1/5)(Y+y) & y = (1/5+1/6)(Z+z) \\ z = (1/6+1/7)(W+w) & \end{array}$$

Bovendien is $W+X$ een kwadraat en $Y+Z$ een driehoeksgetal (dat wil zeggen van de vorm $n(n+1)/2$. Oplossing van de zeven lineaire vergelijkingen via standaard eliminatie leert ons dat er $k \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat

$$\begin{array}{rr} W = 10366482k & w = 7206360k \\ X = 7460514k & x = 4893246k \\ Y = 7358060k & y = 3515820k \\ Z = 4149387k & z = 5439213k \end{array}$$

De voorwaarde dat $W+X$ en kwadraat is impliceert dat $17826996k$ een kwadraat is. Omdat $17826996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ volgt hieruit dat er een $t \in \mathbb{N}$ is zó dat $k = 17826996t^2/4 = 4456749t^2$. De conditie $Y+Z = n(n+1)/2$ impliceert

$$51285802909803t^2 = n(n+1)/2$$

Vermenigvuldig beide zijden met 8 en tel er 1 bij op,

$$4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = 410286423278424t^2 + 1.$$

Met andere woorden, we hebben de Pell vergelijking

$$u^2 - 410286423278424t^2 = 1.$$

We weten dat er oneindig veel oplossingen zijn. De kleinste oplossing heeft echter een u met 206554 cijfers. Geen wonder dat niemand in Archimedes' tijd er uit kon komen!

8 Een miraculeuze formule

De naam van de wiskundige Lejeune Dirichlet (1805-1859) is de grondlegger van de analytische getaltheorie. Dat is een combinatie van getaltheorie met de analyse, ofwel differentiaal- en integraalrekening. Hoewel dit zeker buiten het bestek van de Masterclass valt wil ik hier toch een verrassende toepassing van geven.
Kies een priemgetal $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$ (bijv $p = 5, 13, 29, 37, \ldots$, de rest na deling door 4 moet 1 zijn). Bepaal het product

$$a = \frac{1}{\sqrt{p}} \prod_{m=1}^{(p-1)/2} \left(2 \sin \frac{\pi m^2}{p} \right).$$

Dan geldt

Stelling 8.1 (Dirichlet) *De getallen $x = a - 1/a$ en $y = (a + 1/a)/\sqrt{p}$ zijn geheel, en bovendien, $x^2 - py^2 = -4$.*

Bij $p = 13$ vinden we bijvoorbeeld $a = 0.3027756377319946\ldots$ en $a - 1/a = -3$ en $(a + 1/a)/\sqrt{13} = 1$. Merk op, $3^2 - 13 \cdot 1^2 = -4$. Bij $p = 61$ vinden we, $a = 0.02562418976663598\ldots$ en $x = -39, y = 5$. Inderdaad geldt $39^2 - 61 \cdot 5^2 = -4$. Soms vinden we ook even getallen, zoals bij $p = 37$. Dan $x = -12, y = 2$. In dat geval $12^2 - 37 \cdot 2^2 = -4$ en dus, $6^2 - 37 \cdot 1^2 = -1$. In dat laatste geval hebben we dus ook een oplossing voor onze vergelijking van Pell met -1 aan de rechterkant, waaruit we een oplossing met rechts een 1 kunnen afleiden. In het geval dat x, y uit bovenstaande berekening oneven uitvallen, zal blijken dat de getallen $a^3 - 1/a^3$ en $(a^3 + 1/a^3)/\sqrt{p}$ even zijn. In het geval $p = 61$ vinden we $a^3 = 0.00001682481996966\ldots$ en daaruit, $x = -59436,\ y = 7610$. Dit geeft aanleiding tot

$$29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1$$

Voor de aardigheid hebben we ook Brouncker's $p = 313$ geprobeerd en vonden $x = -253724736$ en $y = 14341370$. Dat wil zeggen, na deling van x, y door 2,

$$126862368^2 - 313 \cdot 7170685^2 = -1$$

Voor samengestelde getallen $N \equiv 1(\text{mod } 4)$ bestaan er ook dergelijke, maar iets ingewikkelder, formules. Het zal echter duidelijk zijn dat dit soort formules niet erg geschikt is om werkelijk oplossingen van Pell's vergelijking te bepalen. Daarvoor is de kettingbreukmethode veel beter. Het is alleen opmerkelijk dat er analytische formules bestaan die een oplossing van een diophantische vergelijking geven. Men zou willen dat dit ook vaker bij andere diophantische vergelijkingen dan die van Pell optreedt. Helaas is dit echter vrijwel nooit het geval.