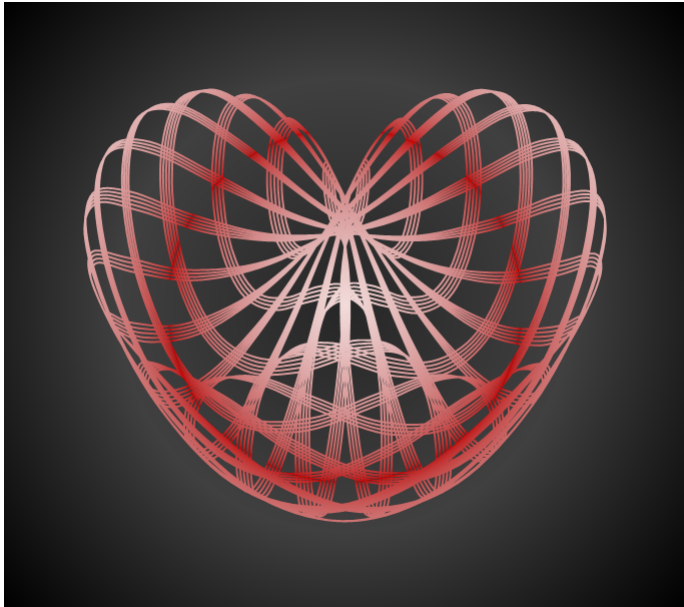


Dynamische systemen in Excel

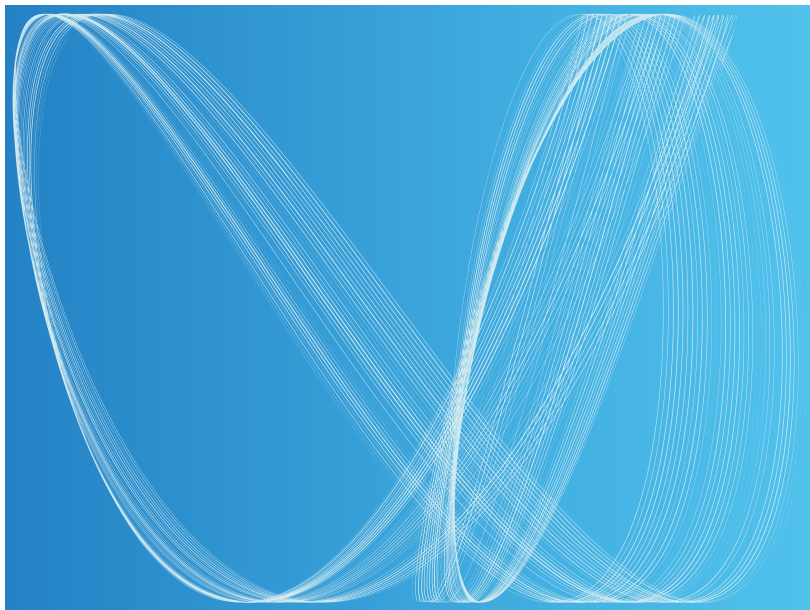
Frits Beukers

Nationale Wiskundedagen 2019

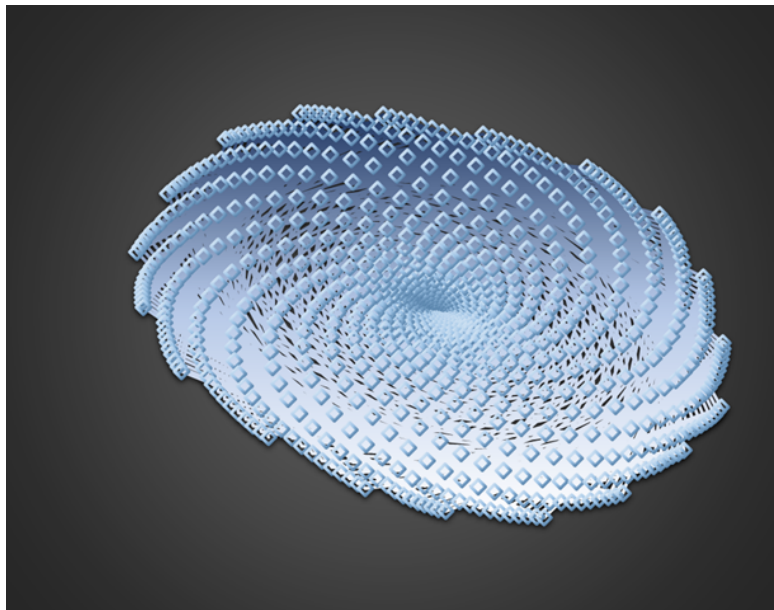
Plaatjes van Tess



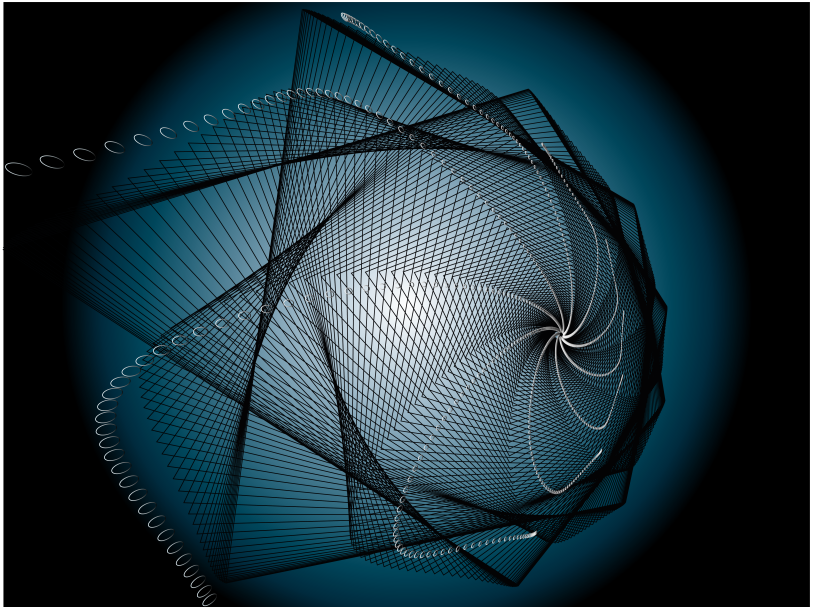
Plaatjes van Tess



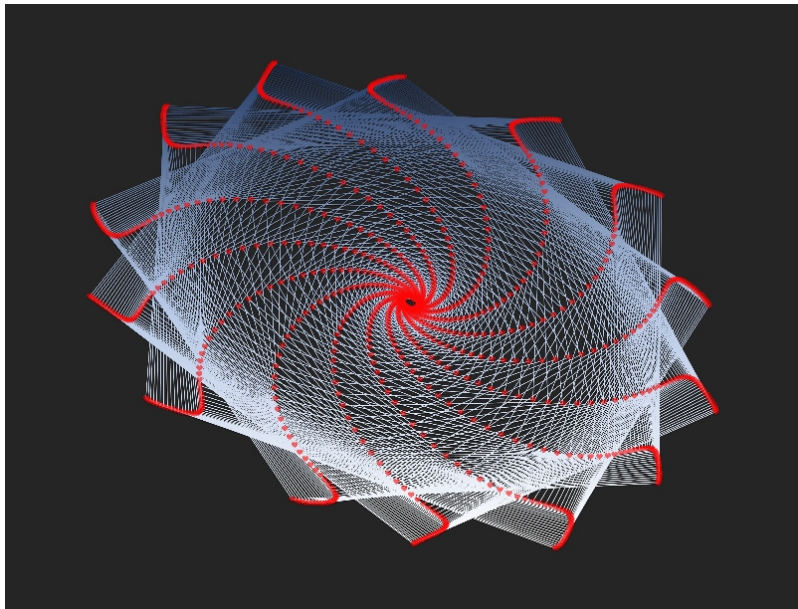
Plaatjes van Tess



Plaatjes van Tess



Plaatjes van Tess

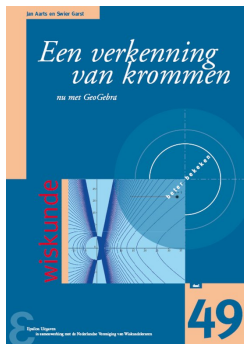


Onderwerpen

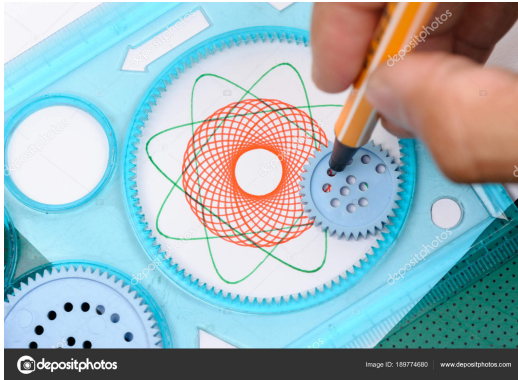
- Grafieken plotten
- Parametervoorstellingen plotten
- Discrete dynamische systemen
- Continue dynamische systemen

Parametervoorstellingen

- Spirograaf
- Lissajousfiguren
- Logaritmische spiraal



Spirograaf



Spirograaf formules

Eerste cirkel:

$$x = \cos(mt), \quad y = \sin(mt).$$

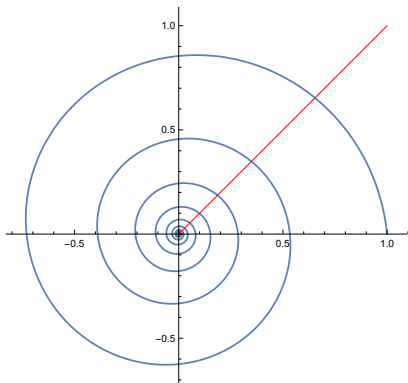
Tweede cirkel:

$$x = r \cos(nt + \delta), \quad y = r \sin(nt + \delta).$$

Spirograafkromme:

$$x = \cos(mt) + r \cos(nt + \delta), \quad y = \sin(mt) + r \sin(nt + \delta).$$

Logaritmische spiraal



$$r = \exp(-c\phi), \text{ contractie} = \exp(-2\pi c).$$

Groeimodellen

Exponentieel groei:

Kies $a > 0$ en $u(0) > 0$ (startwaarde). Beschouw

$$u(n+1) = au(n), \quad n \geq 0.$$

Fibonacci:

Stel $F(1) = F(2) = 1$ en definieer $F(n)$, $n \geq 3$ door

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

$$F(3) = 2, \quad F(4) = 3, \quad F(5) = 5, \quad F(6) = 8, \quad F(7) = 13, \\ F(8) = 21, \quad F(9) = 34, \quad F(10) = 55, \quad \dots$$

Logistische groei

Kies $0 \leq a \leq 4$ en $0 \leq v(0) \leq 1$. Beschouw de recursie

$$v(n+1) = av(n)(1 - v(n)), \quad n \geq 0.$$

Roofdier-prooidier model

Kies $2 \leq a, b \leq 4$ en $x(0), y(0) \geq 0$ en $x(0) + y(0) < 1$.

Recursie:

$$x(n+1) = ax(n)(1-x(n)-y(n)) \quad y(n+1) = bx(n)y(n) \quad n \geq 0.$$

Fantasiemodel

Kies a, b, c . Recursie:

$$x(n+1) = y(n) - z(n) \quad y(n+1) = x(n) + ay(n) \quad z(n+1) = b + z(n)(x(n) -$$

en kijk in xy -vlak.

Differentiaalvergelijkingen

Kies a . We zoeken een kromme met parameter $(x(t), y(t))$ die voldoet aan

$$x'(t) = y(t) + ax(t) \quad y'(t) = -x(t) + ay(t)$$

Discretisatie: kies tijdstap Δt en bekijk de reeks tijdstippen $t_n = n\Delta t$ voor $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ en de bijbehorende punten $(x_n, y_n) = (x(t_n), y(t_n))$.

Voor de afgeleide $x'(t_n)$ geldt bij benadering $x'(t_n) \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$.
Zelfde met $y'(t_n)$. We krijgen:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = y_n + ax_n \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = -x_n + ay_n$$

en dus

$$x_{n+1} = x_n + (y_n + ax_n)\Delta t, \quad y_{n+1} = y_n + (-x_n + ay_n)\Delta t.$$

Van der Pol vergelijking

Zij $m > 0$. Van der Pol oscillator

$$x'(t) = y(t) \quad y'(t) = -x(t) + m(1 - x(t)^2)y(t)$$

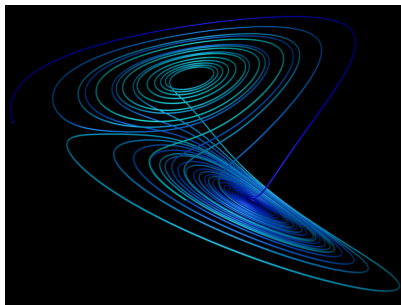
Lorenz vergelijkingen

Parameters s, r, b .

$$x' = s(y - x)$$

$$y' = x(r - z) - y$$

$$z' = xy - bz$$



Lorenz dans

Aanrader:



www.youtube.com/watch?v=iu4RdmBVdps