

Tips en trucs bij Surfer

Frits Beukers, email: `f.beukers@uu.nl`

18 maart 2016

Surfer, te downloaden van <https://imaginary.org/program/surfer>, is een mooi programma, maar je zult merken dat het lukraak invoeren van vergelijkingen niet erg veel interessante figuren oplevert. Om dat wel te bereiken zul je wat gedisciplineerder te werk moeten gaan en gebruik maken van een paar vuistregels die op wiskundige principes gebaseerd zijn. In de volgende paragrafen geef ik een aantal van deze regels die ik in de loop van experimenten met Surfer heb opgedaan. Een aantal ervan zijn geïnspireerd door ideeën die ook in de tips en trucs bij Surfer zelf te vinden zijn.

1 Geschiedenis

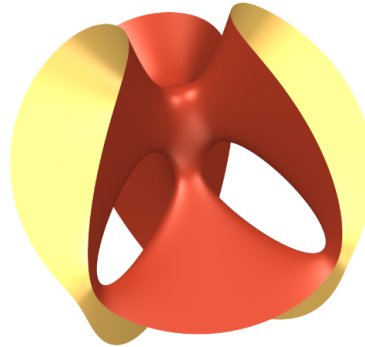
In de 19e eeuw heeft de meetkunde zich snel ontwikkeld. Met name in de algebraïsche meetkunde ging de kennis met grote sprongen voorwaarts en ook de meetkundige objecten, waarop de theorie van toepassing was, werden steeds ingewikkelder. Echter, de enige visualisatie die men van deze meetkundige objecten had, zat in het hoofd van de onderzoeker en was waarschijnlijk een mix van eigen fantasie en een aantal globale eigenschappen die uit onderzoek volgden. De behoefte aan betere visualisatie werd dus groter en speciaal met het oog op onderwijs aan studenten is in de periode 1880 - 1920 een reeks modellen door de firma's Brill en later Schilling gemaakt. Deze bestonden voor een groot deel uit gips- en draadmodellen van oppervlakken die bijzondere eigenschappen hebben. In die tijd was deze serie heel populair en ook een groot aantal Nederlandse universiteiten heeft de serie, of een deel ervan, aangeschaft.

Tegenwoordig hebben we computers en kunnen we veel van de objecten die destijds in gips en draad werden uitgevoerd op het beeldscherm reproduceren. We geven hier twee voorbeelden. Allereerst het oppervlak van Clebsch dat bestaat uit de punten (x, y, z) die voldoen aan de vergelijking

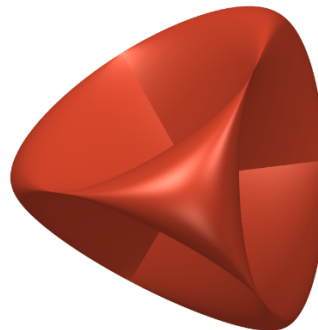
$$648x^2y - 216y^3 - 216x^2z - 216y^2z + 27z + 108z^2 + 113z^3 = 0.$$

Dit is een zogenaamd cubisch oppervlak, alle termen in de vergelijking hebben een totale graad kleiner of gelijk 3. Eén van de resultaten van de 19e eeuwse meetkunde is dat op dergelijke oppervlakken precies 27 rechte lijnen liggen (al of niet met complexe coördinaten). Hier is een plaatje van een gipsmodel en een

Surferplaatje. Heel vaag kun je op de gipsfiguur een aantal van de 27 rechte lijnen herkennen.



Een ander voorbeeld is het Romeins oppervlak ontdekt door Steiner. Deze doorsnijdt zichzelf en heeft de eigenschap dat het oppervlak noch een buitenkant, noch een binnenkant heeft. Het is een model van het zogenaamde projectieve vlak. Een vergelijking wordt gegeven door $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz = 0$. Hier is een gips- en Surfermodel,



2 Basisoppervlakken

We starten met een aantal basisfiguren die welbekend zijn. Allereerst de platte vlakken. Deze worden gegeven door vergelijkingen van graad 1 zijn. Dat wil zeggen de vergelijking luidt $ax + by + cz = d$ waarin a, b, c, d gegeven getallen, zó dat a, b, c niet alle drie nul zijn. Alle vlakken zijn congruent met het vlak $z = 0$. Als we $z = 0$ in Surfer typen dan krijgen we inderdaad een plat vlak te zien, althans het deel van het vlak dat zich binnen een zekere bol bevindt van punten die door Surfer worden weergegeven.

De volgende klasse wordt gegeven door de tweede graadsoppervlakken, ofwel *kwadrieken*. Deze worden gegeven door vergelijkingen van het type $F(x, y, z) = 0$ met

$$F(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 + gx + hy + kz + l,$$

en waarin a t/m l gegeven getallen zó dat a t/m f niet allen nul zijn. Er zijn een paar gevallen die we willen uitsluiten. Bijvoorbeeld als F het product van twee

lineaire functies is, zoals $(x + y + 1)(y + z)$. Het oppervlak $(x + y + 1)(y + z) = 0$ is een vereniging van de twee vlakken $x + y + 1 = 0$ en $y + z = 0$. Een ander geval is als F de som van minstens twee verschillende kwadraten is, zoals $x^2 + (z + y)^2$ of $x^2 + y^2 + z^2$, of $x^2 + y^2 + z^2 + 1$. In het eerste geval is de oplossingsverzameling de lijn $x = 0, y + z = 0$, in het tweede geval het punt $x = y = z = 0$ en in het derde geval de lege verzameling.

Laten we dus aannemen dat F niet het product is van twee lineaire polynomen of de som van kwadraten van lineaire polynomen of constanten. In dat geval is ons oppervlak congruent is met één van de volgende oppervlakken,

1. $-y + x^2 = 0$, de paraboolvormige cilinder.
2. $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, $ab \neq 0$
 - (a) $a, b < 0$, de ellipsvormige cilinder,
 - (b) $a > 0, b < 0$, de hyperboolvormige cilinder.
3. $ax^2 + by^2 + z = 0$, $ab \neq 0$,
 - (a) $a, b > 0$, de parabolode,
 - (b) $a > 0, b < 0$ de hyperbolische parabolode (zadeloppervlak).
4. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $a, b > 0, c < 0$, de *kegel*.
5. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$, $abc \neq 0$
 - (a) $a, b, c < 0$, de ellipsoide,
 - (b) $a > 0, b, c < 0$, de éénbladige hyperboloide,
 - (c) $a, b > 0, c < 0$, de tweebladige hyperboloide.

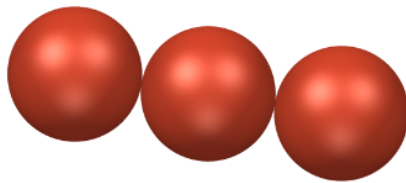
Voor oppervlakken van graad drie en hoger is het aantal mogelijkheden zo groot dat een classificatie te omvangrijk wordt. In plaats daarvan kijken we naar combinaties van vlakken en kwadrieken.

Type in surfer in: $xyz = 0$. We krijgen drie vlakken te zien, namelijk $x = 0, y = 0$ en $z = 0$.

Bekijk drie bollen in $\mathbb{R}^3$ met straal 1, maar middelpunten $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (-2, 0, 0)$. We kunnen deze drie bollen in één plaatje laten zien door de vergelijkingen te vermenigvuldigen,

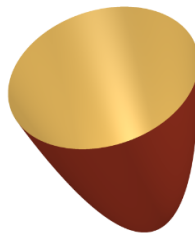
$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)((x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 1)((x + 2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Hier is het Surfer plaatje,

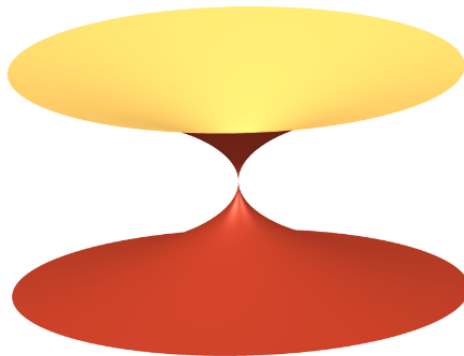


3 Omwentelingsfiguren

We starten met een gewone grafiek, bijvoorbeeld de parabool, met vergelijking $y = x^2$. Alleen, met het oog op wat komen gaat, nemen we als verticale as de z -as en als horizontale as de r -as. De waarde r van een punt is de afstand tot de z -as. We bekijken dus de grafiek van $z = r^2$. Nu wentelen we de grafiek om de z -as, waarbij de r -as dus in de rondte draait en een vlak loodrecht op de z -as vormt. We geven dit vlak de gewone x, y -coördinaten en er geldt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dus de omwentelingsfiguur heeft de vergelijking $z = r^2 = x^2 + y^2$. Hier is een plaatje van de figuur $-z + x^2 + y^2$, een zogenaamde paraboloid (fietslamp).

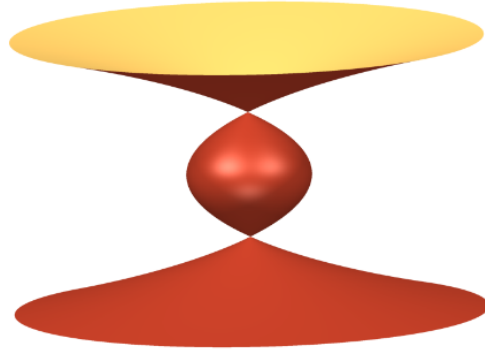


Laten we nu de parabool op zijn kant zetten, dus $r = z^2$. Omwentelen van deze figuur rond de z -as geeft $\sqrt{x^2 + y^2} = z^2$. Helaas slikt Surfer geen uitdrukkingen met een wortelteken, dus moeten we kwadateren, $x^2 + y^2 = r^2 = z^4$. Het oppervlak $-z^4 + x^2 + y^2$ ziet er zo uit,

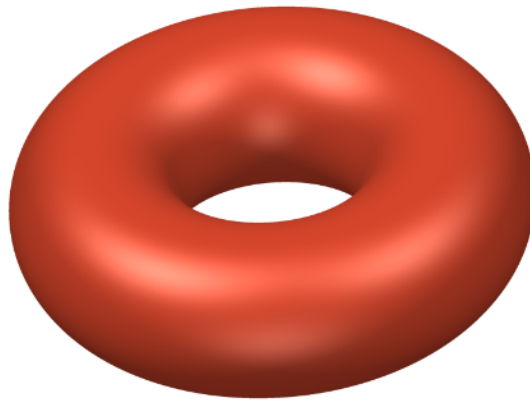


Een kleine variatie, we schuiven de liggende parabool naar links. Dat wordt $r =$

$z^2 - 1$. Weer r door $\sqrt{x^2 + y^2}$ vervangen en kwadrateren geeft $x^2 + y^2 = (z^2 - 1)^2$. Het oppervlak $x^2 + y^2 - (z^2 - 1)^2$ ziet er zo uit,



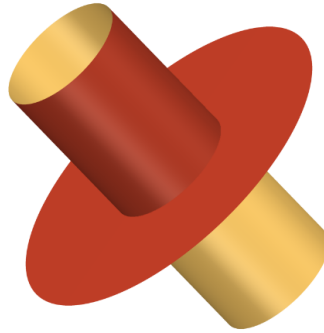
Een nieuwe figuur. Neem de cirkel met middelpunt $(1, 0)$ en straal a . In het r, z -vlak heeft deze de vergelijking $(r-1)^2 + z^2 = a^2$. Uit gewerkt, $r^2 - 2r + z^2 + 1 - a^2 = 0$. Voor de omwentelingsfiguur vervangen we r door $\sqrt{x^2 + y^2}$. We krijgen $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 + 1 - a^2 = 0$. Helaas staat er nu nog steeds een wortelteken. Om dit te verhelpen brengen we $\sqrt{x^2 + y^2}$ naar rechts en kwadrateren, $(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - a^2)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Hier is het plaatje van $(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - a^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$ met $a = 0.5$,



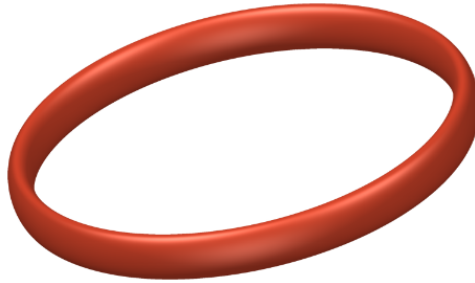
Varieer zelf met de waarde van a en probeer te begrijpen wat er gebeurt.

4 Opblazen van krommen

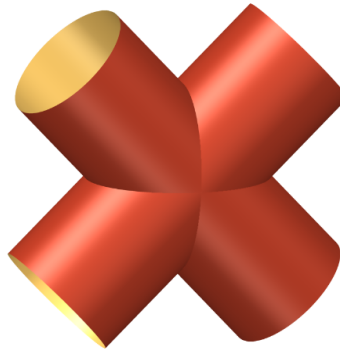
Het programma Surfer kan geen plaatjes van krommen tekenen. Bijvoorbeeld de cirkel in $x^2 + y^2 - 1 = 0$ geeft een cilinder. Dit komt natuurlijk omdat z een willekeurige waarde kan hebben. Hier is de cilinder met het vlak $z = 0$.



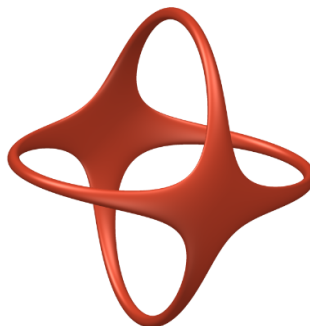
Eigenlijk zouden we de doorsnijding van deze twee figuren willen zien. Dat is een echte cirkel. Deze twee vergelijkingen $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en $z = 0$ kunnen door 1 vergelijking vervangen worden, namelijk $(x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2 = 0$. Beide kwadraten moeten immers nul zijn. In Surfer zien we niet veel. Maar wel als we de rechterzijde iets positief maken, $(x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2 = a^2$. Hier is het Surferplaatje met $a = 0.1$,



Een ander voorbeeld, laten we kijken naar de doorsnijding van twee cilinder, bijvoorbeeld $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en $x^2 + z^2 - 1 = 0$. Hier is de vereniging van de twee cilinders gegeven door $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 0$.



We zien wel hoe de doorsnijding er uit, maar willen we alleen die doorsnijding in beeld brengen. Dit kan door $(x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 + z^2 - 1)^2 = a^2$ met $a = 0$. Alleen zien we dan niets. Laten we daarom $a = 0.1$ nemen,

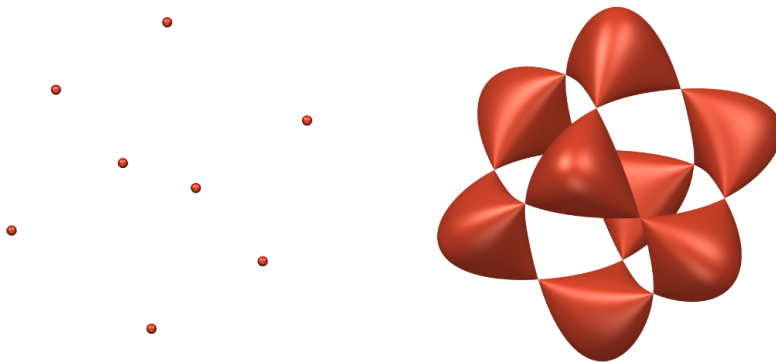


Als we het oorspronkelijke idee (doorsnijding bekijken) loslaten, is het leuk om met verschillende waarden van a te experimenteren.

5 Puntverzamelingen opblazen

Een zelfde idee kunnen we ook voor punten uitvoeren. Bijvoorbeeld het punt $(0, 0, 0)$ kunnen we geven door het drietal vergelijkingen $x = 0, y = 0$ en $z = 0$. Deze kunnen vervangen worden door de enkele vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. In Surfer zien we echter niets. Kijken we echter naar $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ met $a > 0$ dan krijgen we een bol, een opgedikte $(0, 0, 0)$.

Dit idee kunnen we veralgemenen. Kijk naar de punten (x, y, z) die voldoen aan de vergelijkingen $x^2 = 1, y^2 = 1, z^2 = 1$. Natuurlijk zijn dit de punten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, de hoekpunten van een kubus. We kunnen deze punten door de ene vergelijking $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (z^2 - 1)^2 = 0$ geven. Wederom zien we niets in Surfer, maar wel bij de vergelijking $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (z^2 - 1)^2 - a^2 = 0$. Voor heel kleine a zien we de kubushoekpunten zitten. Bij $a = 0.1$ respectievelijk $a = 1$ krijgen we,

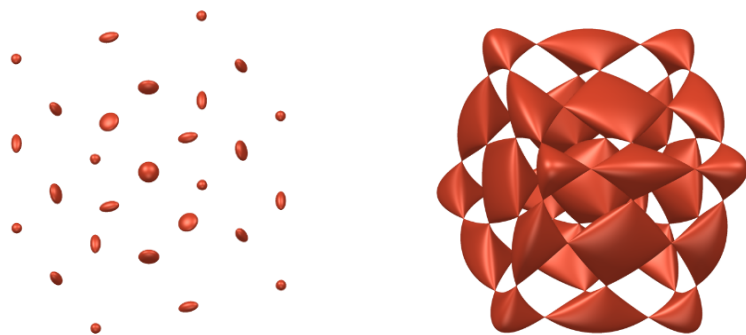


Varieer a nu en kijk wat er gebeurt.

Iets algemener, start met de punten (x, y, z) die voldoen aan $x(x^2 - 1) = 0, y(y^2 - 1) = 0, z(z^2 - 1) = 0$. Dit zijn 27 punten. Bekijk nu de figuur

$$x^2(x^2 - 1)^2 + y^2(y^2 - 1)^2 + z^2(z^2 - 1)^2 - a^2 = 0$$

als a varieert. Voor $a = 0.1$ respectievelijk $a = 0.385$ zien we

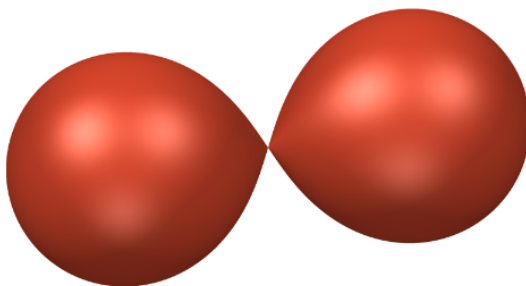


6 Boetseren

Met de ideeën van de vorige onderdelen kunnen we nu gaan knutselen. Hier zijn twee bollen, $((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 2)((x+2)^2 + y^2 + z^2 - 2) = 0$. We bekijken nu de familie

$$((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 2)((x+2)^2 + y^2 + z^2 - 2) - 10a = 0.$$

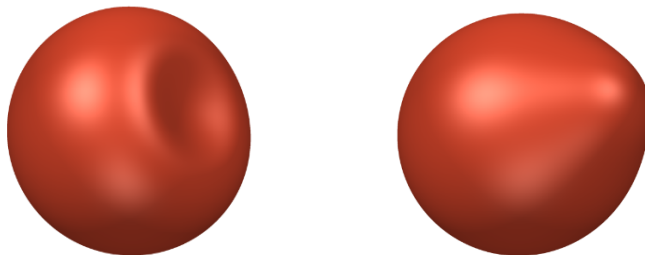
Als $a < 0.4$ dan zien twee losse figuren. Als $a > 0.4$ dan zitten ze vast. Bij $a = 0.4$ zien we



Laten we als variant de standaardbol $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ nemen en de triviale bol (met straal nul), $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0$. Bekijk nu de familie

$$a + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)((x-1)^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

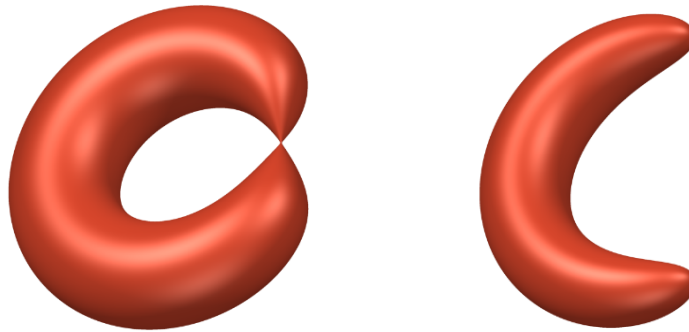
Als $a = 0.1$ respectievelijk $a = -0.1$, dan zien we



Uit het eerste voorbeeld zien we hoe we deuken kunnen maken in bestaande figuren. Uit het tweede hoe we uitstulpingen kunnen maken. Laten we een deuk maken in de torus $(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - 0.25)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$. We doen dit door te combineren met $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 0$. Bekijk

$$4a + ((x - 2)^2 + y^2 + z^2)((x^2 + y^2 + z^2 + 1 - 0.25)^2 - 4(x^2 + y^2)) = 0.$$

Varieer a . Met $a = 0.23$ respectievelijk $a = 1$ zien we,



Je kunt nu je fantasie de vrije loop laten, cilinders of vlakken met bollen smelten, tori combineren, etc. Hier is een experiment met de drie cilinders $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ die we laten samensmelten.

$$-0.05a + (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + z^2 - 1)(y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Kijk met name wat er binnenin de cilinders gebeurt als a klein is.