

1 Kettingbreuken van rationale getallen

Laten we eens starten met een breuk bijvoorbeeld $37/13$. Laten we hier ons kettingbreuk algoritme op los,

$$\begin{aligned}\frac{37}{13} &= 2 + \frac{11}{13} \\ \frac{13}{11} &= 1 + \frac{2}{11} \\ \frac{11}{2} &= 5 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

We concluderen hieruit dat

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}$$

hetgeen we handiger zullen opschrijven als

$$\frac{37}{13} = [2, 1, 5, 2].$$

We kunnen nu ook de convergenten opschrijven.

a_n						
p_n	0	1	2	3	17	37
q_n	1	0	1	1	6	13

Uit de voorgaande paragraaf weten we ook, zonder rekenen, dat $17 \cdot 13 - 6 \cdot 37 = -1$. Met andere woorden, we hebben gehele getallen x, y gevonden zó dat $37x - 13y = 1$.

De kettingbreukontwikkeling van een rationaal is niet helemaal vastgelegd. Bijvoorbeeld

$$2 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}.$$

In het algemeen, als $a_n > 1$,

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1].$$

Door deze keuzevrijheid kunnen we er zelf voor kiezen of de kettingbreukontwikkeling van een rationaal getal even lengte of oneven lengte krijgt. Dit heeft de volgende toepassing.

Stelling 1.1 *Stel p, q, p', q' zijn positieve gehele getallen zó dat $p > p', q > q'$ en $p'q - pq' = 1$. Dan heeft de kettingbreukontwikkeling van p/q met oneven lengte als laatste twee convergenten p'/q' en p/q .*

Als $p'q - pq' = -1$ dan heeft de kettingbreukontwikkeling van p/q met even lengte als laatste twee convergenten p'/q' en p/q .

Opgave 1.2 *Controleer Stelling 1.1 aan de hand van $p = 7, q = 5$ en $3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 1$ en van $2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.*

We gaan nu de zaak omdraaien.

Opgave 1.3 *Bepaal de convergenten die horen bij de kettingbreuk $[3, 1, 1, 3, 1, 5]$. En ook de convergenten die horen bij $[5, 1, 3, 1, 1, 3]$.*

Uit de vorige opgave zou je de volgende stelling kunnen vermoeden.

Stelling 1.4 *Stel $a_0, a_1, \dots, a_n$ positieve gehele getallen en*

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Dan geldt

$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Het **bewijs** is niet lastig. We maken gebruik van de relatie $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$. Dus

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{p_{n-1}/p_{n-2}}.$$

Op p_{n-1}/p_{n-2} passen we hetzelfde trucje toe en zo doorgaand vinden we

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, p_{n-1}/p_{n-2}] = [a_n, a_{n-1}, p_{n-2}/p_{n-3}]$$

etcetera tot we uitkomen op

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, p_1/p_0].$$

Omdat $p_1/p_0 = (a_0 a_1 + 1)/a_0 = a_1 + 1/a_0$ volgt onze bewering. □

2 Kettingbreuken van kwadratische getallen

Een aantal irrationale getallen heeft een kettingbreukontwikkeling met een opvallend patroon erin. Dat geldt met name voor getallen van de vorm $\sqrt{N}$, waarin N een natuurlijk getal is, dat geen kwadraat is. Hier zijn een paar voorbeelden van hun kettingbreuken.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots] \\ \sqrt{13} &= [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, \dots] \\ \sqrt{14} &= [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, \dots] \\ \sqrt{31} &= [5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, \dots]\end{aligned}$$

Duidelijk springen hier twee regelmatigheden naar voren:

1. Na het eerste wijzergetal is de rij wijzergetallen periodiek. Bijvoorbeeld, het periodieke blok bij $\sqrt{14}$ is 1, 2, 1, 6 en bij $\sqrt{31}$ is dat 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10.

2. Als we van het periodieke blok het laatste cijfer weglaten, vormen de overgebleven wijzergetallen een palindroom. Bijvoorbeeld de cijfers 1, 2, 1 bij $\sqrt{14}$ en 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1 bij $\sqrt{31}$.

In deze paragraaf zullen we deze twee regelmatigheden verklaren. Allereerst, de kettingbreuk van een wortelgetal kunnen we niet alleen met een rekenapparaat of computer bepalen, maar ook gewoon met de hand. We zullen dit laten zien aan de hand van $\sqrt{14}$. Het enige dat we daarbij hoeven te weten is dat $\sqrt{14}$ tussen 3 en 4 ligt. De eerste stap van de kettingbreuk is daarmee duidelijk

$$\sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14} - 3).$$

We bepalen nu de inverse van de rest $\sqrt{14} - 3$ en doen dit door exact te rekenen. We gebruiken hierbij een truc die ook bij deling van complexe getallen gebruikt wordt, alleen speelt $\sqrt{14}$ nu de rol van $\sqrt{-1}$. Om $\frac{1}{\sqrt{14}-3}$ te bepalen, vermenigvuldigen we teller en noemer met $\sqrt{14} + 3$. In de noemer krijgen we dan 5 en in de teller $\sqrt{14} + 3$. Dus

$$\frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-2}{5}.$$

In het tweede deel van bovenstaande regel hebben we ook alvast weer het gehele deel van de inverse afgesplitst. Dat dit gehele deel 1 moet zijn, zien we uit het feit dat de teller van $\frac{\sqrt{14}+3}{5}$ tussen 6 en 7 ligt. Neem weer de inverse van de laatste rest en splits het gehele deel af:

$$\frac{5}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14}-2}{2}.$$

Reken dit zelf na! Nog een keer:

$$\frac{2}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-3}{5}.$$

En nog een keer:

$$\frac{5}{\sqrt{14}-3} = \sqrt{14} + 3 = 6 + \sqrt{14} - 3.$$

De rest $\sqrt{14} - 3$ hadden we al eerder gezien, namelijk bij onze eerste stap! Dat betekent dat we van nu af aan steeds weer hetzelfde rijtje resten zullen tegenkomen. Tevens zullen de wijzergetallen 1, 2, 1, 6 die we tot nu toe vonden periodiek terugkeren. Daarmee hebben we de periodiciteit van de kettingbreuk van $\sqrt{14}$ vastgesteld. Voor later gebruik schrijven we de rij resten achter elkaar op:

$$\frac{\sqrt{14}-3}{1} \quad \frac{\sqrt{14}-2}{5} \quad \frac{\sqrt{14}-2}{2} \quad \frac{\sqrt{14}-3}{5}.$$

De daarop volgende rest wordt weer $\sqrt{14} - 3$ en de rij herhaalt zich weer. Voor willekeurige N hebben we de volgende stelling.

Stelling 2.1 *Zij N een positief geheel getal en geen kwadraat. Dan hebben de resten van de kettingbreuk van $\sqrt{N}$ de vorm*

$$\frac{\sqrt{N} - P}{Q}, \quad (1)$$

waarin P, Q natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:

- i. $P < \sqrt{N}$.
- ii. Q deelt $N - P^2$.
- iii. $\frac{\sqrt{N} + P}{Q} > 1$

Bewijs. Eigenschap i) volgt direct uit het feit dat $0 < \frac{\sqrt{N} - P}{Q}$.

De twee andere eigenschappen kunnen we zien door een inductief proces. De eerste rest, $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, heeft de drie genoemde eigenschappen want $P = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ en $Q = 1$ in dit geval (met $\lfloor x \rfloor$ bedoelen we het grootste gehele getal $\leq x$). Stel dat we van een rest weten dat hij de vorm (1) heeft, met eigenschappen i), ii), iii). We zullen laten zien dat de volgende rest deze eigenschappen ook heeft. Stel namelijk $Q' = (N - P^2)/Q$ en merk op dat

$$\frac{Q}{\sqrt{N} - P} = Q \frac{\sqrt{N} + P}{N - P^2} = \frac{\sqrt{N} + P}{Q'}.$$

Stel dat het gehele deel van het laatste getal k is, dan geldt

$$\frac{\sqrt{N} + P}{Q'} = k + \frac{\sqrt{N} - P'}{Q'}$$

waarin $P' = -P + kQ'$. De volgende rest is dus $\frac{\sqrt{N} - P'}{Q'}$. Omdat Q' een deler is van $N - P^2$, is Q' ook deler van $N - (P')^2 = N - P^2 + 2kPQ' - (Q')^2$. Dit bewijst eigenschap ii). Tenslotte,

$$\frac{\sqrt{N} + P'}{Q'} = \frac{\sqrt{N} + kQ' - P}{Q'} = k + \frac{\sqrt{N} - P}{Q'}. \quad (2)$$

Omdat $k \geq 1$ en $\sqrt{N} > P$, zien we dat $(\sqrt{N} + P')/Q' > 1$. Dit bewijst eigenschap iii). □

Uit bovenstaande bewering kunnen we nog meer halen. Stel we hebben twee opeenvolgende resten,

$$\frac{\sqrt{N} - P}{Q}, \quad \frac{\sqrt{N} - P'}{Q'}.$$

De tweede volgt uit de eerste door een stap van het kettingbreuk algoritme uit te voeren. Namelijk

$$\left(\frac{\sqrt{N} - P}{Q} \right)^{-1} = k + \frac{\sqrt{N} - P'}{Q'},$$

waarin k het wijzergetal bij de betreffende stap is. Verander nu $\sqrt{N}$ in $-\sqrt{N}$, vermenigvuldig alles met -1 . Breng in de rechtse gelijkheid de term $-k$ naar de linkerkant van het $=$ -teken. We vinden,

$$\frac{\sqrt{N} + P'}{Q'} = k + \left(\frac{\sqrt{N} + P}{Q} \right)^{-1}.$$

Uit eigenschap iii) van Bewering 1 weten we dat $(\sqrt{N} + P)/Q > 1$ en dus geldt dat k het grootste gehele getal kleiner dan $(\sqrt{N} + P')/Q'$ is. Dus de eerste rest volgt op unieke wijze uit de tweede door

$$\frac{\sqrt{N} - P}{Q} = \frac{1}{k + \frac{\sqrt{N} - P'}{Q'}}.$$

We kunnen nu periodiciteit van de wijzergetallen van $\sqrt{N}$ bewijzen.

Periodiciteit. We volgen de kettingbreukontwikkeling met resten van de vorm (1). We weten dat $P < \sqrt{N}$ en dat $Q < \sqrt{N} + P < 2\sqrt{N}$ (eigenschappen i) en iii) in Bewering 1). Het aantal verschillende paren P, Q dat kan optreden is dus eindig. Dus is ook het aantal mogelijke resten eindig. Dit betekent dat er een rest van de vorm (1) is die na enige stappen in de kettingbreukontwikkeling weer optreedt. Dat betekent dat de rij resten en inverse resten het volgende patroon heeft:

$$\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor, \dots, \frac{\sqrt{N} - P}{Q}, \dots, \frac{\sqrt{N} - P}{Q}, \dots$$

Na de tweede rest $\frac{\sqrt{N} - P}{Q}$ weten we zeker dat de rij periodiek is geworden, en daarmee ook de rij wijzergetallen. We weten dat de resten voorafgaand aan de eerste $\frac{\sqrt{N} - P}{Q}$ uniek bepaald zijn. We komen ook de rest $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ tegen. Dit betekent dat we deze rest ook tegenkomen als vanaf de tweede $\frac{\sqrt{N} - P}{Q}$ naar links werken. Dus in de rij tussen de twee resten $\frac{\sqrt{N} - P}{Q}$ komt $\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ voor. Dit betekent dat periodiciteit al vanaf de eerste rest optreedt. Hetzelfde geldt dus ook voor de wijzergetallen $a_1, a_2, a_3, \dots$. We hebben de volgende stelling bewezen.

Stelling 2.2 *Stel N is een positief geheel getal en geen kwadraat. Dan heeft de kettingbreuk-ontwikkeling van $\sqrt{N}$ de vorm*

$$\sqrt{N} = \lfloor \sqrt{N} \rfloor, \overline{a_1, a_2, \dots, a_r, 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor}$$

waarin de streep aangeeft dat het blok $a_1, \dots, a_r, 2\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ steeds herhaald wordt.

3 Opgaven kettingbreuken

Opgave 3.1 *Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $358/271$ en bepaal gehele getallen x, y zó dat $271x - 358y = 1$.*

Opgave 3.2 *Stel we hebben een kettingbreukontwikkeling van een rationaal getal. Ga na dat de noemer van elke rest strikt kleiner is dan de noemer van de voorgaande rest. Concludeer hieruit dat het kettingbreukalgoritme voor een rationaal getal afbreekt.*

We gaan Stelling 1.4 toepassen op *palindrome kettingbreukontwikkelingen*. Je weet wat palindromen zijn, hier zie je een paar voorbeelden,

"Mooie zeden in Ede", zei oom
 God, red nu 'ns 'n underdog
 A man, a plan, a canal, Panama!

Hier is een opgave met *palindrome kettingbreuken*.

Opgave 3.3 *Bepaal de convergenten van $[1, 2, 3, 3, 2, 1]$. Wat valt je op aan de laatste twee convergenten?*

*Nu algemeen. Stel dat p'/q' en p/q de laatste twee convergenten van een *palindrome kettingbreuk* zijn. Bewijs dat $p' = q$.*

Bewijs ook dat $q^2 - pq' = (-1)^{r-1}$, waarin r de lengte van de kettingbreuk is.

We kunnen al het bovenstaande ook combineren tot de volgende opgave.

Opgave 3.4 *Kies een positief geheel getal q en zij p een deler van $q^2 + 1$ met $p > q$. Dan is de rij wijzergetallen van de kettingbreuk van p/q met even lengte een palindroom.*

1. *Geef een voorbeeld van deze bewering (dwz kies zelf een q, p en bepaal de kettingbreuk van p/q).*
2. *Bewijs de algemene bewering.*

Bewijs ook de volgende bewering: Stel dat $p > q$ een deler van $q^2 - 1$ is. Dan is de rij wijzergetallen van de kettingbreuk van p/q met oneven lengte een palindroom.

Opgave 3.5 *Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{23}$ op dezelfde manier als boven. Schrijf ook de rij resten op.*

Opgave 3.6 *Zij N een natuurlijk getal en geen kwadraat. Met $l(N)$ geven we de kleinste periodelengte van de wijzergetallen van $\sqrt{N}$. Bepaal voor een aantal zelfgekozen waarden van N de periodelengte $l(N)$ en maak er een tabel van. Probeer zo lang mogelijke periodes te vinden.*

Opgave 3.7 *Bepaal de kettingbreukontwikkelingen van getallen van de volgende vorm,*

1. $\sqrt{n^2 - 1}$ met $n > 1$ geheel.
2. $\sqrt{n^2 + 1}$ met $n > 1$ geheel.
3. $\sqrt{n^2 + 2}$ met $n > 1$ geheel.
4. $\sqrt{n^2 + 4}$ met $n > 1$ even geheel.

5. $\sqrt{n^2 + 4}$ met $n > 1$ oneven geheel.

De laatste twee kun je het beste met Mathematica testen. Probeer hier nog meer variaties op, bijvoorbeeld $\sqrt{n^2 - 2}$ of $\sqrt{n^2 \pm n + 1}$, etc.

Opgave 3.8 *Bepaal het getal dat hoort bij de volgende kettingbreuken,*

1. $[1, 1, 1, 1, \dots]$.
2. $[1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$.
3. $[a, b, 2a, b, 2a, b, 2a, b, \dots]$ waarin a, b positieve gehele getallen zijn.
4. *Geef een aantal keuzen voor a, b zó dat het getal uit de vorige opgave de vorm $\sqrt{N}$ met N geheel heeft.*

Opgave 3.9 *Bepaal een niet-triviale oplossing van $x^2 - 23y^2 = 1$ met behulp van de kettingbreuk van $\sqrt{23}$.*

Opgave 3.10 *Type in je grafische rekenmachine $(15 + 4\sqrt{14})^n/2$ in voor $n = 2, 3, 4$. Verklaar de antwoorden die je ziet.*

Opgave 3.11 *Bepaal het viertal kleinste oplossingen van $x^2 - 2y^2 = 1$.*

Opgave 3.12 *Bepaal voor elke positieve gehele waarde van m de kleinste positief gehele oplossing x, y van de volgende vergelijkingen,*

1. $x^2 - (m^2 - 1)y^2 = 1$
2. $x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1$
3. $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$