# Hoofdstuk 4

# Delers

## 4.1 Delers (op)tellen

Ieder getal heeft zijn delers. Van oudsher heeft het onvoorspelbare gedrag van delers van getallen een aantrekkingskracht uitgeoefend op mensen. Zozeer zelfs dat aan getallen, die een opmerkelijke relatie met hun delers vertonen, magische eigenschappen worden toegekend. Wij zullen ons echter niet met getallenmagie bezighouden, maar met getaltheorie.

Voor de getaltheorie vormen sommige eigenschappen van delers een goed startpunt om een zoektocht naar de diepere eigenschappen van getallen te beginnen. Hiermee volgen we een lijn die ook in de geschiedenis van de getaltheorie doorlopen is.

Laten we beginnen met wat begrippen. Voor elk natuurlijk getal $n$ geven we het totale aantal delers van $n$ aan met $d(n)$. Verder noemen we de som van alle delers van $n$, behalve $n$ zelf, het *aliquote deel* van $n$. We geven dit aan met $s(n)$. Tenslotte geven we met $\sigma(n)$ de som van alle delers van $n$ aan. Dus, $\sigma(n) = s(n) + n$.

Reeds uit de Griekse tijd stamt de belangstelling voor getallen waarvoor het aliquote deel een bijzondere waarde aanneemt. Bijvoorbeeld, zij noemden een getal *perfekt* als het gelijk is aan zijn aliquote deel. Voorbeelden zijn $n = 6$ en $n = 28$. Een natuurlijke vraag is, zijn er nog meer van deze getallen? Een ander type getallen waarvoor in de Griekse oudheid belangstelling bestond was dat van de *bevriende* getallen. Dat zijn paren verschillende getallen $m, n$ die gelijk zijn aan elkaars aliquote deel. Dus $s(n) = m$ en $s(m) = n$. Het kleinste voorbeeld was reeds aan Pythagoras bekend, $m = 220, n = 284$. Ook hier luidt de vraag of er nog meer van deze paren bestaan.

Om een idee te krijgen van het grillige gedrag van $d(n), s(n), \sigma(n)$ geven we op de volgende bladzij een tabel met daarin de waarden voor $n = 1, 2, \ldots, 30$. Alvorens verder te lezen is het zeer instruktief om eens een kwartiertje naar deze tabel te staren om te zien of er dingen opvallen en of er direkt vragen rijzen. Bijvoorbeeld, voor welke $n$ is $d(n)$ oneven of, zouden er $n$ kunnen bestaan waarvoor geldt $d(n) = 7$? Of voor welke $n$ is $\sigma(n)$ een priemgetal? Zou je een formule kunnen raden voor $d(n)$ of $\sigma(n)$?

| $n$ | delers | $d(n)$ | $\sigma(n)$ | $s(n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | 1 | 1 | 0 |
| 2 | $1, 2$ | 2 | 3 | 1 |
| 3 | $1, 3$ | 2 | 4 | 1 |
| 4 | $1, 2, 4$ | 3 | 7 | 3 |
| 5 | $1, 5$ | 2 | 6 | 1 |
| 6 | $1, 2, 3, 6$ | 4 | 12 | 6 |
| 7 | $1, 7$ | 2 | 8 | 1 |
| 8 | $1, 2, 4, 8$ | 4 | 15 | 7 |
| 9 | $1, 3, 9$ | 3 | 13 | 4 |
| 10 | $1, 2, 5, 10$ | 4 | 18 | 8 |
| 11 | $1, 11$ | 2 | 12 | 1 |
| 12 | $1, 2, 3, 4, 6, 12$ | 6 | 28 | 16 |
| 13 | $1, 13$ | 2 | 14 | 1 |
| 14 | $1, 2, 7, 14$ | 4 | 24 | 10 |
| 15 | $1, 3, 5, 15$ | 4 | 24 | 9 |
| 16 | $1, 2, 4, 8, 16$ | 5 | 31 | 15 |
| 17 | $1, 17$ | 2 | 18 | 1 |
| 18 | $1, 2, 3, 6, 9, 18$ | 6 | 39 | 21 |
| 19 | $1, 19$ | 2 | 20 | 1 |
| 20 | $1, 2, 4, 5, 10, 20$ | 6 | 42 | 22 |
| 21 | $1, 3, 7, 21$ | 4 | 32 | 11 |
| 22 | $1, 2, 11, 22$ | 4 | 36 | 14 |
| 23 | $1, 23$ | 2 | 24 | 1 |
| 24 | $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ | 8 | 60 | 36 |
| 25 | $1, 5, 25$ | 3 | 31 | 6 |
| 26 | $1, 2, 13, 26$ | 4 | 42 | 16 |
| 27 | $1, 3, 9, 27$ | 4 | 40 | 13 |
| 28 | $1, 2, 4, 7, 14, 28$ | 6 | 56 | 28 |
| 29 | $1, 29$ | 2 | 30 | 1 |
| 30 | $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ | 8 | 72 | 42 |

Als $p$ een priemgetal is, dan is de situatie duidelijk. De enige delers zijn 1 en $p$. Dus $d(p) = 2$ en $\sigma(p) = p + 1$. Als we een macht van een priemgetal hebben, zeg $p^k$, dan kennen we de delers ook. Dat zijn $1, p, p^2, \ldots, p^k$. En dus $d(p^k) = k+1$ en $\sigma(p^k) = 1+p+p^2+\cdots+p^k$. In de tabel kunnen we dit zien bij de priemmachten $4, 8, 9, 16, 25, 27$.

Hoe zit het met getallen $n$ die uit verschillende priemgetallen bestaan? Een wat diepere observatie die we aan de hand van voorbeelden uit de tabel kunnen herkennen is de volgende.

**Lemma 4.1.1** *Als $m, n$ positieve gehele getallen zijn die geen gemeenschappelijke priemdelers hebben, dan geldt $d(mn) = d(m)d(n)$ en $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.*

Kort gezegd, $d(n)$ en $\sigma(n)$ zijn *multiplicatieve functies*. Dit is niet zo moeilijk in te zien als het misschien lijkt. Elke deler $d$ van $mn$ bestaat uit priemfaktoren die in $m$ zitten en priemfaktoren die in $n$ zitten. Omdat $m, n$ geen gemeenschappelijke priemfactoren bevatten, splitst zo'n deler dus op natuurlijke manier in een produkt $d = d_1 d_2$ waarin $d_1|m$ en $d_2|n$. Omgekeerd levert elke keuze van $d_1|m$ en $d_2|n$ een deler van $mn$ op, namelijk $d_1 d_2$. Het aantal delers van $mn$ is dus gelijk aan het aantal delers van $m$ maal het aantal delers van $n$. Dat wil zeggen, $d(mn) = d(m)d(n)$. Uit onze observatie volgt ook dat

$$\begin{aligned} \sigma(mn) = \sum_{d|mn} d &= \sum_{d_1|m, d_2|n} d_1 d_2 \\ &= \sum_{d_1|m} d_1 \sum_{d_2|n} d_2 \\ &= \sigma(m)\sigma(n) \end{aligned}$$

We zijn nu klaar om een algemene formule voor $d(n)$ en $\sigma(n)$ te geven. Elk natuurlijk getal $n$ heeft een priemontbinding, en kan dus geschreven worden in de vorm $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, waarin $p_1, \ldots, p_r$ verschillende priemgetallen zijn. Uit de multiplikatieve eigenschap van $d$ volgt nu dat

$$\begin{aligned} d(n) &= d(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) \\ &= d(p_1^{k_1}) \cdots d(p_r^{k_r}) \\ &= (k_1 + 1) \cdots (k_r + 1) \end{aligned}$$

Op analoge manier volgt dat

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{k_1}) \cdots (1 + p_r + \cdots + p_r^{k_r}).$$

Gebruiken we nu ook nog de sommatieformule $1 + x + x^2 + \cdots + x^k = (x^{k+1} - 1)/(x - 1)$ dan vinden we de volgende stelling.

**Stelling 4.1.2** *Zij $n$ een natuurlijk getal en $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ zijn priemontbinding met $p_1, \ldots, p_r$ verschillende priemgetallen. Dan geldt,*

$$d(n) = \Pi_{i=1}^r (k_i + 1)$$

*en*

$$\sigma(n) = \Pi_{i=1}^r \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Hoewel we een formule voor $d(n)$, $\sigma(n)$ (en dus ook $s(n)$) hebben we gevonden, is het nog steeds een probleem om voor getallen van meer dan honderd cijfers deze funkties uit te rekenen. Probleem is namelijk dat we voor de berekening van $\sigma(n)$ de priemontbinding van $n$ moeten kennen. Er is geen andere methode bekend. Echter, ontbinden van grote getallen in hun priemfactoren is een notoir moeilijk probleem. In Hoofdstuk 8 kun je hier meer over lezen.

## 4.2 Multiperfecte getallen

Kunnen we met de formule voor $\sigma(n)$ iets zeggen over de perfekte getallen? In onze terminologie zijn perfekte getallen precies die getallen $n$ waarvoor geldt dat $s(n) = n$. En dus $\sigma(n) = 2n$. Omdat dit toch geen extra moeite is, zullen we ons ook voor *multiperfekte getallen* interesseren. Dat zijn getallen zó dat $\sigma(n)/n$ geheel is. Hieronder bevinden zich dus de perfekte getallen. Ter illustratie geven we hier een tabel van alle multiperfekte getallen $1 < n < 2 \cdot 10^7$.

| $n$ | $\sigma(n)/n$ |
|---|---|
| 6 | 2 |
| 28 | 2 |
| 120 | 3 |
| 496 | 2 |
| 672 | 3 |
| 8128 | 2 |
| 30240 | 4 |
| 32760 | 4 |
| 523776 | 3 |
| 2178540 | 4 |

Deze tabel geeft ook aanleiding tot vragen. Het valt bijvoorbeeld op dat multiperfekte getallen erg dun gezaaid zijn. Deze tabel is met een PC thuis gegenereerd door gewoon voor $n = 1, 2, 3, ..., 2 \cdot 10^7$ te kijken of $n$ een deler is van $\sigma(n)$. Als we in de waarden van $n$ met zes of meer cijfers komen duurt het echter erg lang voor we weer een nieuw voorbeeld tegenkomen. Je begint je af te vragen of er geen handiger manieren zijn om dergelijke getallen te genereren. Een andere vraag die rijst is of er ook oneven multiperfekte getallen zijn. Of, nog een vraag, kan elk geheel getal als waarde van $\sigma(n)/n$ voor zekere $n$ voorkomen?
Laten we eens beginnen met de even perfekte getallen. Euclides merkte reeds op, dat als $2^k - 1$ priem is, dan is $2^{k-1}(2^k - 1)$ een perfekt getal. Immers,

$$\sigma(2^{k-1}(2^k - 1)) = \sigma(2^{k-1})\sigma(2^k - 1) = (2^k - 1)2^k = 2 \cdot 2^{k-1}(2^k - 1).$$

Euler liet zien dat ook het omgekeerde waar is. Ieder even perfect getal is van de vorm die Euclides aangaf. Stel namelijk dat $n$ een even perfect getal is. Schrijf het in de vorm $n = 2^{k-1}m$ waarin $m$ een oneven getal is en $k \geq 2$. We weten dat $\sigma(n) = \sigma(2^{k-1}m) = (2^k - 1)\sigma(m)$. Samen met het gegeven dat $n$ perfect is, dat wil zeggen $2n = \sigma(n)$, levert dit

$$2^k m = (2^k - 1)\sigma(m). \tag{4.1}$$

Hieruit zien we dat $2^k - 1$ een deler van $m$ is. Dus is $m/(2^k - 1)$ ook een deler van $m$. Uit ((4.1) volgt na deling door $2^k - 1$ dat $m + m/(2^k - 1) = \sigma(m)$. Met andere woorden, behalve de delers $m$ en $m/(2^k - 1)$ van $m$ kunnen er geen andere delers zijn. Dit impliceert dat $m$ een priemgetal is en $m/(2^k - 1) = 1$. Hiermee is de volgende stelling bewezen,

**Stelling 4.2.1** *Een even getal $n$ is perfect precies dan als er een $k$ bestaat zó dat $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ en $2^k - 1$ priem is.*

Strikt genomen is nu het probleem van de even perfecte getallen teruggevoerd tot een ander probleem, namelijk het vinden van priemgetallen van de vorm $2^k - 1$. In het hoofstuk over Mersenne-getallen zullen we op deze vraag terugkomen. Intussen kunnen we niet nalaten een anecdote te vertellen die in André Weil's boek [Wei] beschreven wordt. Uit de briefwisseling tussen B.Frenicle de Bessy (1612?-1675) en Fermat zien we dat Fermat wordt uitgedaagd om de (even) perfecte getallen tussen $10^{20}$ en $10^{22}$ te vinden. Het is duidelijk dat Fermat om te beginnen alle $k$ moet bepalen zó dat $10^{20} < 2^{k-1}(2^k - 1) < 10^{22}$. Het is niet moeilijk te zien dat dit $k = 34, 35, 36, 37$ zijn. In Hoofdstuk 5 zullen we zien dat $2^k - 1$ priem impliceert dat $k$ priem is. Dus blijft over $k = 37$. In Fermat's tijd zou men gemakkelijk in Frenicle's val kunnen trappen door te denken dat $2^{37} - 1$ priem is. Zo niet Fermat. Hij ontdekte nog net op tijd dat 223 een priemdeler van $2^{37} - 1$ is. De methode waarmee Fermat tot deze conclusie kwam vormt een rode draad naar verdere ontwikkelingen in de getaltheorie en is eigenlijk interessanter dan het resultaat zelf. Getallen van de vorm $2^k - 1$ noemt men *Mersenne getallen*, naar pater Marin Mersenne (1588-1648) die een uitgebreide correspondentie met Fermat voerde waarvan nog veel bewaard is gebleven. Als een Mersenne-getal ook nog priem is noemt men het een *Mersenne-priemgetal*. Records van de grootst bekende priemgetallen, die soms nog wel eens de krant halen, zijn meestal Mersenne-priemgetallen. Waarom dit zo is bespreken we in Hoofdstuk 5. Daar vinden we ook een lijst met de tot nu toe (2014) bekende Mersenne-priemgetallen.
Hoe zit het nu met oneven perfecte getallen? Ze komen niet in onze tabel voor. Sterker nog, niemand weet of ze bestaan. Het enige dat we weten is dat mocht er een oneven perfect getal bestaan, dan is dit groter dan $10^{150}$.
Met onze kennis over multiperfecte getalen is het ook mager gesteld. Er zijn meer vragen dan antwoorden. De grootst bekende $k$ zó dat $\sigma(n) = kn$ was $k = 11$ in 2008. Hiervan was een handje vol voorbeelden bekend. De tabel voor bekende multiperfecte getallen groeit echter iedere dag en bevat nu een paar duizend exemplaren. Desondanks is het nog steeds niet bekend of er oneindig veel van deze getallen zijn.

## 4.3 Het gemiddelde van $\sigma(n)/n$

Het feit dat multiperfecte getallen zeldzaam zijn wordt gedeeltelijk veroorzaakt door het feit dat $\sigma(n)/n$ tamelijk groot is voor deze getallen. Een aardige vraag is de waarde van $\sigma(n)/n$ voor de meerderheid van de getallen te bepalen. Het gemiddelde van $\sigma(n)/n$ dus. Wonderlijk genoeg kunnen we hier wel wat over zeggen.

**Stelling 4.3.1** *Het gemiddelde*

$$G_N = \frac{1}{N}\left(\frac{\sigma(1)}{1} + \frac{\sigma(2)}{2} + \cdots + \frac{\sigma(N)}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma(n)}{n}$$

*gaat naar* $\frac{\pi^2}{6}$ *als* $N \to \infty$.

Om dit in te zien moeten we van de volgende twee feiten uit de elementaire analyse gebruikmaken (zie de Appendix),

**Lemma 4.3.2** *1. Voor elke gehele* $N \geq 2$ *geldt* $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} < 1 + \log(N)$.

*2.*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

We gaan het gemiddelde $G_N$ uitrekenen door wat sommaties te verwisselen. Merk op dat voor elke $n$ geldt

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n}\frac{d}{n} = \sum_{d|n}\frac{1}{d}.$$

De tweede gelijkheid volgt uit het feit dat $n/d$ de delers van $n$ doorloopt als $d$ dat doet. Kies nu een getal $d \leq N$ en kijk hoe vaak de term $1/d$ in de dubbele sommatie

$$NG_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{d|n}\frac{1}{d}$$

voorkomt. Uiteraard komt $1/d$ voor bij elke $n$ die een veelvoud van $d$ is. Dus $n = d, 2d, \ldots [N/d]d$, waarin $[N/d]$ de gehele afronding van $N/d$ naar beneden is. In totaal komt $1/d$ dus $[N/d]$ maal in de sommatie voor. Dit geldt voor elke $d$ met $1 \leq d \leq N$. De dubbelsommatie kan dus herschreven worden als

$$NG_N = \sum_{d=1}^{N}\left[\frac{N}{d}\right]\frac{1}{d}.$$

Maak nu gebruik van de ongelijkheden $N/d - 1 < [N/d] \leq N/d$. Dan volgt,

$$\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N}\left(\frac{N}{d^2} - \frac{1}{d}\right) < G_N \leq \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N}\frac{N}{d^2}.$$

Maak nu gebruik van $\sum_{d=1}^{N}(1/d) < 1+\log(N)$ en laat de $N$'s waar mogelijk tegen elkaar wegvallen,

$$-\frac{1+\log(N)}{N} + \sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d^2} < G_N \leq \sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d^2}.$$

Laat nu $N \to \infty$ in deze ongelijkheden. Omdat

$$(1+\log(N))/N \to 0 \quad \text{en} \sum_{d=1}^{N}(1/d^2) \to \pi^2/6$$

vinden we dat zowel de boven- als ondergrens voor $G_N$ naar $\pi^2/6$ gaat. Dus $\lim_{N\to\infty} G_N$ bestaat en is gelijk aan $\pi^2/6$. $\square$

Uit het bovenstaande volgt dus ook dat het gemiddelde van $s(n)/n$ gelijk is aan $\pi^2/6 - 1 = 0.64493\ldots$. Gemiddeld is het aliquote deel van een geheel getal dus kleiner dan $n$. De spreiding in de waarden is echter groot. Bijvoorbeeld, voor een priemgetal $p$ geldt $s(p)/p = 1/p$, een getal zeer dicht bij 0 dus. Daarentegen geldt voor de even getallen dat het gemiddelde van $s(2n)/2n$ gelijk is aan $1.056\ldots$. Het aliquote deel van een even getal is dus gemiddeld iets groter dan $n$. Om dit resultaat in te zien bepalen we de limiet van

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\sigma(2)}{2} + \frac{\sigma(4)}{4} + \cdots + \frac{\sigma(2N)}{2N}\right)$$

als $N \to \infty$. De berekening hiervan gaat analoog aan de berekening hier boven. Wie zich hiertoe uitgedaagd voelt is welkom dit te proberen. Het antwoord is $5\pi^2/24$ en $5\pi^2/24 - 1 = 1.056\ldots$

## 4.4 Aliquote rijen

Op het gevaar af van ons verhaal over getaltheorie af te dwalen wil ik nog een paar dingen zeggen over het volgende probleem. Begin met een natuurlijk getal $n$. Bepaal het aliquote deel $s(n)$ van $n$, vervolgens daar weer het aliquote deel $s(s(n)) = s^2(n)$, enzovoorts. Dergelijke rijen noemt men *aliquote rijen*. Als we op 1 uitkomen dan zeggen we dat de rij afbreekt. Een voorbeeld,

$$n = 14,\ s(14) = 10,\ s^2(14) = 8,\ s^3(14) = 7,\ s^4(14) = 1.$$

Deze rij breekt dus af bij de vierde stap. Een andere mogelijkheid is dat de rij periodiek wordt, bijvoorbeeld,

$$n = 220,\ s(220) = 284,\ s^2(284) = 220,\ s^3(220) = 284, \ldots$$

Experimenteren met andere $n$ suggereert dat de rij ofwel afbreekt of periodiek wordt. In beide gevallen blijven de termen van de rij begrensd. Soms kan een aliqote rij een spectaculair verloop hebben. Bijvoorbeeld, $n = 138$ geeft een aliquote rij die na de 177-ste stap pas op 1 uitkomt. Het maximum in deze rij wordt bereikt door

$$s^{117}(138) = 179931895322 = 2 \cdot 61 \cdot 929 \cdot 1587569.$$

Hoewel aanvankelijk vermoed werdt dat alle aliquote rijen begrensd zijn, zorgen dit soort voorbeelden ervoor dat er toch enige twijfel rijst. Het was in 2009 bijvoorbeeld nog steeds niet bekend of de rij beginnend met $n = 276$ wel of niet naar oneindig gaat. De moeilijkheid bij het berekenen van aliquote rijen is dat we bij elke stap de priemontbinding van een getal moeten kennen om zijn aliquote deel te berekenen.