Tentamen Lineaire Algebra B

29 juni 2012, 9-12 uur

OPGAVEN

Uitwerkingen volgen na de opgaven

1. Gegeven is de vectorruimte $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ van polynomen met reële coefficienten en graad ≤ 2. Op V hebben we een tweetal geordende bases gegeven, $E = \{1, x, x^2\}$ en $F = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

   Verder is gegegeven de lineaire afbeelding $A : V \to V$ gedefinieerd door $A : p(x) \mapsto x^2 p'(x) - 2xp(x)$.

   (a) (2 pt) Verifieer dat het beeld van A inderdaad in V ligt.

   (b) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis E.

   (c) (2 pt) Bepaal de overgangsmatrix S die, losgelaten op een coördinatenkolom ten opzichte van E, de coördinatenkolom van dezelfde vector ten opzichte van F geeft.

   (d) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis F.

   (e) (2 pt) Bepaal de eigenwaarden van A en hun bijbehorende eigenvectoren (als polynoom opgeschreven).

2. Bij de eigenschappen van het inproduct op een vectorruimte V luidt nummer (iv) als volgt: Voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (a) (3 pt) Neem als vectorruimte $V = \mathbb{R}[x]$, de vectorruimte van polynomen reële coëfficienten. Bewijs of weerleg in elk van de volgende gevallen of aan eigenschap (iv) is voldaan,

      i. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$

      ii. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$

      iii. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 xp(x)q(x)dx$

   Neem vanaf nu $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$ als inproduct.

   (b) (4 pt) Beschouw de deelruimte W opgespannen door $1, x, x^2$. Bepaal met behulp van het Gram-Schmidt procédé een *orthogonale* basis van W. (NB, je hoeft in dit onderdeel de vectoren dus niet op lengte te normaliseren).

   (c) (3 pt) Bepaal de orthogonale projectie van x^3 op de deelruimte opgespannen door $1, x$.

3. Zij V de vectorruimte $M_{2,2}$ van 2×2-matrices met reële coëfficienten. Definieer $\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^t)$ voor elk tweetal $A, B \in M_{2,2}$. Hierin is $\mathrm{Sp}(M)$ het spoor van de matrix M en betekent M^t de getransponeerde van M.

   (a) (2 pt) Bewijs dat $\langle A, B\rangle$ een inproduct op $M_{2,2}$ is.

   Kies nu een matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en de lineaire afbeelding $F_M : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $F_M : A \mapsto MA$.

   (b) (2 pt) Schrijf de matrix van F_M op ten opzichte van de standaardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) (3 pt) Stel dat M verschillende eigenwaarden λ, μ heeft, met bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Bepaal alle eigenwaarden van F_M met bijbehorende eigenvectoren.

   (d) (3 pt) Stel dat M een symmetrische matrix is. Bewijs dat F_M een symmetrische afbeelding is ten aanzien van ons inproduct. (Je mag gebruiken dat $\mathrm{Sp}(PQ) = \mathrm{Sp}(QP)$ voor elk tweetal 2×2-matrices P, Q.

UITWERKINGEN VANAF VOLGENDE BLADZIJDE

Tentamen Lineaire Algebra B

29 juni 2012, 9-12 uur

OPGAVEN MET UITWERKINGEN

1. Gegeven is de vectorruimte $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ van polynomen met reële coefficienten en graad ≤ 2. Op V hebben we een tweetal geordende bases gegeven, $E = \{1, x, x^2\}$ en $F = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

   Verder is gegegeven de lineaire afbeelding $A : V \to V$ gedefinieerd door $A : p(x) \mapsto x^2 p'(x) - 2xp(x)$.

   (a) (2 pt) Verifieer dat het beeld van A inderdaad in V ligt.
   Antwoord: We hoeven alleen te controleren dat het beeld van $1, x, x^2$ in V ligt. We berekenen, $A(1) = -2x$, $A(x) = x^2 - 2x \cdot x = -x^2$, $A(x^2) = 2x^3 - 2x^3 = 0$.

   (b) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis E.
   Antwoord: Uit de beelden van de voorgaande opgave leiden we de volgende matrix af,
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) (2 pt) Bepaal de overgangsmatrix S die, losgelaten op een coördinatenkolom ten opzichte van E, de coördinatenkolom van dezelfde vector ten opzichte van F geeft.
   Antwoord: Gevraagd wordt naar de matrix I_F^E (in de notatie van het dictaat). We bepalen eerst
   $$I_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   De inverse hiervan is de gevraagde matrix
   $$I_F^E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis F.
   Antwoord: Er geldt $A_F^F = I_F^I A_I^I I_I^F$. De matrices rechts zijn boven allen gegeven, dus we vinden
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) (2 pt) Bepaal de eigenwaarden van A en hun bijbehorende eigenvectoren (als polynoom opgeschreven).

Antwoord: We bepalen de eigenwaarden van de matrix in onderdeel (b).

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 = 0.$$

Eigenvectoren bij $\lambda = 0$, $(0,0,1)$ ten opzichte van E, ofwel het polynoom x^2.

2. Bij de eigenschappen van het inproduct op een vectorruimte V luidt nummer (iv) als volgt: Voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (a) (3 pt) Neem als vectorruimte $V = \mathbb{R}[x]$, de vectorruimte van polynomen reële coëfficienten. Bewijs of weerleg in elk van de volgende gevallen of aan eigenschap (iv) is voldaan,

      i. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$
      Antwoord: $\langle p, p \rangle = \int_0^1 xp(x)^2 dx \geq 0$ omdat $xp(x)^2 \geq 0$ voor alle $x \in [0,1]$. Als $\langle p, p \rangle = 0$ dan kan dit alleen als $xp(x)^2 = 0$ en dus $p(x) = 0$ voor alle $0 < x \leq 1$ en vanwege continuiteit volgt hieruit ook $p(0) = 0$.

      ii. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
      Antwoord: $\langle p, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)^2 dx \geq 0$ omdat $p(x)^2 \geq 0$ voor alle $x \in [-1,1]$. Als $\int p, p = 0$ dan kan dit alleen als $p(x)^2 = 0$ voor alle $x \in [-1,1]$.

      iii. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 xp(x)q(x)dx$
      Antwoord: $xp(x)^2 \geq 0$ als $x \geq 0$ en $xp(x)^2 \leq$ als $x \leq 0$. Dit betekent dat $\langle p, p \rangle$ niet altijd positief hoeft te zijn, bijvoorbeeld $\langle x-1, x-1 \rangle = \int_{-1}^1 x(1-x)^2 dx = -4/3$. Dus geen inproduct.

   Neem vanaf nu $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$ als inproduct.

   (b) (4 pt) Beschouw de deelruimte W opgespannen door $1, x, x^2$. Bepaal met behulp van het Gram-Schmidt procédé een *orthogonale* basis van W. (NB, je hoeft in dit onderdeel de vectoren dus niet op lengte te normaliseren). De Gramm-matrix luidt

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix}$$

We gebruiken hierbij dat $\langle x^m, x^n\rangle = 1/(m+n+2)$. Voer nu het procéd'e uit op

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ x & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ x^2 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{array}\right)$$

Vegen in eerst kolom Gram-matrix,

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ x-2/3 & 0 & 1/36 & 1/30 \\ x^2-1/2 & 0 & 1/30 & 1/24 \end{array}\right)$$

Vegen in tweede kolom

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ x-2/3 & 0 & 1/36 & 1/30 \\ x^2-6x/5+3/10 & 0 & 0 & 1/600 \end{array}\right)$$

(c) (3 pt) Bepaal de orthogonale projectie van x^3 op de deelruimte opgespannen door $1, x$.

Antwoord: De vectoren $1, x-2/3$ zijn orthogonaal en spannen de ruimte $\mathrm{span}(1,x)$ op. Verder geldt $\langle 1,1\rangle = 1/2$ en $\langle x-2/3, x-2/3\rangle = 1/36$. Dus $\sqrt{2}, 6x-4$ vormen orthonormale basis van $\mathrm{span}(1,x)$. We gebruiken nu de projectieformule

$$\begin{aligned} & \langle x^3, \sqrt{2}\rangle\sqrt{2} + \langle x^3, 6x-4\rangle(6x-4) \\ = \; & (\sqrt{2}/5)\sqrt{2} + (6/6-4/5)(6x-4) = (2/5)(3*x-1) \end{aligned}$$

Andere manier, stel projectie is $ax+b$. Bereken a, b uit het stelsel lineaire vergelijkingen dat ontstaat uit $\langle 1, x^3-ax-b\rangle = 0, \langle x, x^3-ax-b\rangle = 0$.

3. Zij V de vectorruimte $M_{2,2}$ van 2×2-matrices met reële coëfficienten. Definieer $\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^t)$ voor elk tweetal $A, B \in M_{2,2}$. Hierin is $\mathrm{Sp}(M)$ het spoor van de matrix M en betekent M^t de getransponeerde van M.

(a) (2 pt) Bewijs dat $\langle A, B\rangle$ een inproduct op $M_{2,2}$ is. *Antwoord:* Controle van de eerste drie eigenschappen is uitschrijven. We concentreren ons op eigenschap (iv). Stel $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Dan geldt dat

$$\mathrm{Sp}(AB^t) = \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 & a_1b_3 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_2 & a_3b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

Dus het inproduct komt neem op het inproduct in $\mathbb{R}^4$, waarvoor we alle eigenschappen kennen.

Kies nu een matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en de lineaire afbeelding $F_M : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $F_M : A \mapsto MA$.

(b) (2 pt) Schrijf de matrix van F_M op ten opzichte van de standaardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwoord: Merk op,

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

De gevraagde matrix wordt

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

(c) (3 pt) Stel dat M verschillende eigenwaarden λ, μ heeft, met bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Bepaal alle eigenwaarden van F_M met bijbehorende eigenvectoren. *Antwoord:* We kunnen eingenwaarden/vectoren met de matrix uit voorgande onderdeel bepalen. Maar het kan ook simpeler. Merk namelijk op dat, als we met $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ de 2×2-matrix met kolommen $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ noteren, geldt

$$M(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{0}), \quad M(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{0}, \mathbf{u})$$

$$M(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = (\mu\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \mu(\mathbf{v}, \mathbf{0}), \quad M(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mu\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{0}, \mathbf{v}).$$

We zien hier vier onafhankelijke elementen uit onze vectorruimte die eigenvector zijn t.a.v. F_M.

(d) (3 pt) Stel dat M een symmetrische matrix is. Bewijs dat F_M een symmetrische afbeelding is ten aanzien van ons inproduct. (Je mag gebruiken dat $\mathrm{Sp}(PQ) = \mathrm{Sp}(QP)$ voor elk tweetal 2×2-matrices P, Q. *Antwoord:* Voor elk tweetal matrices geldt

$$\langle F_M(A), B\rangle = \mathrm{Sp}(MA, B) = \mathrm{Sp}(MAB^t) = \mathrm{Sp}(AB^tM) = \mathrm{Sp}(A(M^tB)^t.$$

Omdat M symmetrisch is volgt hieruit

$$\langle F_M)(A), B\rangle = \mathrm{Sp}(A(MB)^t) = \langle A, MB\rangle = \langle A, F_M(B)\rangle.$$

Dus F_M is een symmetrische afbeelding.