Hentamen Lineaire Algebra B

24 aug 2012, 9-12 uur

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam en studnr.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

OPGAVEN

1. Gegeven is de vectorruimte $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ van polynomen met reële coefficienten en graad ≤ 2. Op V hebben we een tweetal geordende bases gegeven, $E = \{1, x, x^2\}$ en $F = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

   Verder is gegegeven de afbeelding $A : V \to V$ gedefinieerd door $A : p(x) \mapsto xp'(x) - p(1)x$.

   (a) (2 pt) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

   (b) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis E.

   (c) (2 pt) Bepaal de overgangsmatrix S die, losgelaten op een coördinatenkolom ten opzichte van E, de coördinatenkolom van dezelfde vector ten opzichte van F geeft.

   (d) (2 pt) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis F.

   (e) (2 pt) Bepaal de eigenwaarden van A en hun bijbehorende eigenvectoren (als polynoom opgeschreven).

2. Bij de eigenschappen van het inproduct op een vectorruimte V luidt nummer (iv) als volgt: Voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ en $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (a) (3 pt) Neem als vectorruimte $V = \mathbb{R}^4$. Bewijs of weerleg in elk van de volgende gevallen of aan eigenschap (iv) is voldaan,

      i. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$

      ii. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$

      iii. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$

      (Hierin gebruiken we de notatie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$)

   Neem vanaf nu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$ als inproduct, waarin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ het gebruikelijke dotproduct is op $\mathbb{R}^4$.

Z.O.Z.

(b) (4 pt) Beschouw de deelruimte W opgespannen door

$$(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0).$$

Bepaal met behulp van het Gram-Schmidt procédé een *orthogonale* basis van W. (NB, je hoeft in dit onderdeel de vectoren dus niet op lengte te normaliseren).

(c) (3 pt) Bepaal de orthogonale projectie van $(0,1,0,0)$ op de ruimte opgespannen door $(1,0,0,1),(1,0,1,0)$.

3. Zij V de vectorruimte $M_{2,2}$ van 2×2-matrices met reële coëfficienten. Definieer $\langle A,B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^t)$ voor elk tweetal $A,B \in M_{2,2}$. Hierin is $\mathrm{Sp}(M)$ het spoor van de matrix M en betekent M^t de getransponeerde van M.

(a) (2 pt) Bewijs dat $\langle A,B\rangle$ een inproduct op $M_{2,2}$ is.

Kies nu een 2×2-matrix M en de lineaire afbeelding $F_M : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $F_M : A \mapsto MAM$.

(b) (3 pt) Stel dat M een symmetrische matrix is. Bewijs dat F_M een symmetrische afbeelding is ten aanzien van ons inproduct. (Je mag gebruiken dat $\mathrm{Sp}(PQ) = \mathrm{Sp}(QP)$ voor elk tweetal 2×2-matrices P,Q.

Kies van nu af aan $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) (2 pt) Schrijf de matrix van F_M op ten opzichte van de standaardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) (3 pt) Bepaal alle eigenwaarden van F_M met bijbehorende eigenvectoren (geschreven als elementen van $M_{2,2}$).