Tentamen Voorstellingen van groepen

14 juni 2011, 9u00-12u00

- Schrijf je naam op elk ingeleverd vel.
- Het boek mag geraadpleegd worden.
- Bij elk onderdeel kun je gebruik maken van de resultaten uit voorgaande onderdelen, ook als je die niet hebt opgelost.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
- Veel succes!

1. (4 pt) Zij G de groep voortgebracht door drei elementen a, b, c met de relaties $a^3 = b^3 = c^2 = e,\ ab = ba,\ cac = b,\ cbc = a$ (e is de eenheid in G). De groep G heeft orde 18 en elk element kan geschreven worden in de vorm $a^i b^j c^k$ met $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $k \in \{0, 1\}$.

   (a) Bepaal de conjugatieklassen van G.

   (b) Bepaal de ééndimensionale representaties van G en geef hun waarden in een tabel.

   (c) Laat zien dat er naast de ééndimensionale representaties alleen nog maar tweedimensionale irreducibele representaties van G bestaan.

   (d) Bewijs dat ab in het centrum van G zit en dat $G/\langle ab\rangle \cong S_3$.

   (e) Bepaal met behulp van voorgaand onderdeel een tweedimensionaal karakter van G.

   (f) Bereken de karaktertabel van G.

2. (4 pt) Gegeven is de diedergroep $D_8 = \langle a, b | a^4 = b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ van orde 8.

   (a) Bepaal de conjugatieklassen van D_8 en geef de karaktertabel.

   Zij V de vectorruimte van polynomen in x_1, x_2, x_3, x_4 opgespannen over $\mathbb{C}$ door $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$ (kwadratische monomen met verschillende indices). Definieer de afbeelding $\rho : D_8 \to GL(V)$ door

$$\begin{aligned} \rho(a) : P(x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto P(x_2, x_3, x_4, x_1), \\ \rho(b) : P(x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto P(x_4, x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

   voor alle $P \in V$ en $\rho(a^i b^j) = \rho(a)^i \rho(b)^j$ voor $i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1$.

(b) Laat zien dat ρ een representatie van D_8 is.

(c) Bepaal het karakter χ_ρ van ρ en geef deze in een tabel.

(d) Schrijf χ_ρ als som van irreducibele karakters.

(e) Bepaal van elke irreducibele deelrepresentatie van ρ een basis in V.

3. (2 pt) Zij G een groep met $4p$ elementen waarin p een priemgetal ≥ 5 is.

(a) Laat zien dat elke irreducibele representatie dimensie $1, 2$ of 4 heeft.

(b) Laat zien het aantal ééndimensionale representaties van G een deler van $4p$ is.

(c) Laat zien dat het aantal ééndimensionale representaties van G deelbaar door 4 is.

Stel van nu af aan dat G niet abels is.

(d) Bewijs dat G precies 4 ééndimensionale representaties heeft.

(e) Bewijs dat G een cyclische groep H van orde p als normaaldeler heeft.

(f) Zij H als boven en zij a een voortbrenger van H. Stel ook dat $G/H \cong C(4)$. Zij $b \in G$ is een element zó dat G wordt voortgebracht a en b. Bewijs dat de conjugatieklasse van b gelijk is aan bH.