



Universiteit Utrecht

St u d i e g r o
e p W i s k u n
d e m e t d e
I n d u s t r i e

STUDY GROUP:

Mathematics *with* Industry

26-30 January 2015

UTRECHT, THE NETHERLANDS

www.math.uu.nl/swi2015





Universiteit Utrecht

Verslagen van de Studiegroep

Wiskunde met de Industrie 2015

106th European Study Group Mathematics with Industry

26 - 30 januari 2015

Anouck Vrouwe

april 2015

www.projects.science.uu.nl/swi2015

Voorwoord

Voor u ligt het eerste gedeelte van de proceedings van de 106e Europese Studiegroep Wiskunde met de Industrie, die plaats vond in Utrecht van maandag 26 januari 2015 tot en met vrijdag 30 januari 2015.

In totaal 61 deelnemers hebben zich een week lang hard ingespannen in een poging om zes diverse vraagstukken uit het bedrijfsleven te kraken. De meeste deelnemers waren wiskundigen werkzaam aan de Nederlandse universiteiten, maar er waren ook deelnemers uit het bedrijfsleven en deelnemers die van (veel) verder kwamen. Een aantal wiskundigen uit o.a. België, Bosnië-Herzegovina, Brazilië, Bulgarije, Duitsland, Georgië, Macedonië en het Verenigd Koninkrijk waren speciaal voor deze gelegenheid naar Nederland over gekomen.

Wetenschapsjournaliste Anouck Vrouwe heeft, op basis van de voordrachten tijdens de week, de technische artikelen die na afloop door de deelnemers zijn geproduceerd en interviews met de bedrijven en deelnemers, voor elk van de zes vraagstukken een helder en voor een groot publiek toegankelijk beeld van het vraagstuk en de oplossing ervan geschetst.

De zes vraagstukken kwamen uit een scala aan bedrijfstakken en vroegen om zeer verschillende wiskundige technieken. Het KNMI vroeg bijvoorbeeld wat de beste manier is om een aantal weersvoorspellingsmodellen te combineren tot één “supermodel” (SUMO). Het bedrijf Mobidot riep de hulp van de wiskundigen in om het reisgedrag van personen beter te analyseren door middel van een app die op hun mobiele telefoon draait. Philips healthcare wilde de kosten van MRI scans omlaag brengen door met minder metingen toch een goed beeld te produceren. Het Nederlands Kanker Instituut (NKI) vroeg de deelnemers aan de SWI om bestralingsprogramma's van tumoren die over meerdere weken lopen gaandeweg aan te passen aan veranderingen in de patiënt - denk hierbij bijvoorbeeld aan een patiënt die aankomt of afvalt waardoor de positie van de tumor in het lichaam verandert. Het Britse NM group vroeg om methoden om hoogspanningstorens en -kabels zo te plaatsen dat aan alle eisen (zoals minimale kosten en minimaal ongemak voor omwonenden) zo goed mogelijk wordt voldaan. Het bedrijf SKF, een fabrikant van kogellagers, vroeg naar de efficiëntste manier om de levensduur van hun kogellagers te testen.

Bij alle zes vraagstukken lukte het de deelnemers om tijdens en na de studieweek in elk geval tot een gedeeltelijke oplossing te komen, en in een aantal gevallen zelfs tot een volledige oplossing die direct praktisch inzetbaar is. De verslagen in dit boekje vertellen in meer detail over de vraagstellingen, de gebruikte methoden, het proces om tot de oplossing te komen en de uiteindelijke oplossing. Lezers die de precieze technische details willen weten kunnen in het tweede, wetenschappelijke deel van de proceedings terecht. Daar vindt u engelstalige verslagen geschreven door de deelnemers zelf.

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie kon dit jaar rekenen op de nodige aandacht in de media. Onder andere van Radio EenVandaag, dat op drie verschillende dagen een item aan de SWI wijdde met korte interviews met de wiskundigen en de vertegenwoordigers van de bedrijven. Daarnaast werd de SWI verslagen door RTV Utrecht, en wijdde het Technisch Weekblad een artikel aan de studiegroep.

We danken iedereen die mee heeft geholpen om de studiegroep tot het daverende succes te maken dat het was. Allereerst natuurlijk onze hoofdsponsors NWO en STW voor hun genereuze bijdrage. Daarnaast danken we het Koninklijk Wiskundig Genootschap dat ook financieel bijdroeg. We danken ook de bedrijven voor hun deelname aan de week en het aanleveren van inspirerende en uitdagende vragen uit de cutting-edge van hun praktijk. We danken Jean Arthur, Ria Bekkering en Cécile Lemette voor secretariële ondersteuning en Monica van de Garde voor hulp bij het onder de aandacht brengen van de pers van het evenement. Tot slot willen we natuurlijk ook alle deelnemers bedanken voor hun enthousiaste inzet bij het vinden van oplossingen voor de vraagstukken die door de bedrijven naar voren werden gebracht.

Utrecht, april 2015

Rob Bisseling, Martin Bootsma, Jason Frank, Ross Kang, Tobias Müller,
Alessandro Sbrizzi, Cristian Spitoni, Paul Zegeling
(organisatiecommissie SWI 2015)

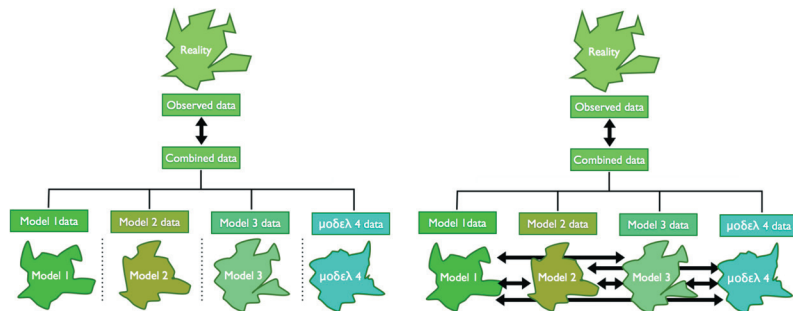
Weermodellen bundelen krachten

Het ene weermodel bijsturen met de berekeningen van een ander model, dat is het principe van supermodelling. Het KNMI experimenteert hiermee, maar stuitte op rare fenomenen. Zo stabiliseerde het weer soms volledig.

“Altijd zon in Europa”, aldus wiskundige Vivi Rottschäfer (UL).

“Helemaal zo gek nog niet, toch?”

“Alle weerdiensten in Europa hebben een eigen weermodel. De Duitsers vinden hun model natuurlijk het beste, net als de Engelsen. Maar in feite hebben ze allemaal hun sterke en zwakte punten. De mensen die de weersverwachting maken, weten dat ook. ‘Oh, bij dat weer moet je niet naar dat model kijken.’” Wiskundige Vivi Rottschäfer vertelt enthousiast over haar kijkje in de weerkundige keuken. Een week lang boog zij zich, met negen andere wiskundigen, over een probleem dat KNMI-er Frank Selten had ingebracht. Selten is senior onderzoeker bij de klimaatafdeling van het KNMI, met een voorliefde voor modellering. Het KNMI werkt aan een supermodel, prachtig afgekort tot SUMO. Een supermodel combineert de krachten van verschillende weer- of klimaatmodellen. Het is bovendien de bedoeling dat het supermodel leert welk model in welke weersituatie het beste presteert. Het best presterende model wordt dan bij dat weertype leidend; de andere modellen zullen met zijn berekeningen worden bijgestuurd. Zo profiteert het supermodel van de sterke punten van de afzonderlijke modellen; de verwachtingen van het supermodel moeten dan ook beter zijn dan die van de losse modellen.



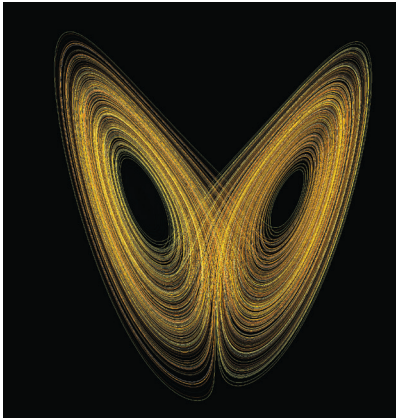
De verwachtingen van verschillende modellen worden nu aan het eind gecombineerd (links). Bij een supermodel sturen de modellen elkaar onderweg al bij. Beeld: KNMI.

Ook nu combineren weerdiensten de uitkomsten van weermodellen, maar dat gebeurt pas aan het eind van de berekeningen. Een supermodel stemt onderweg al af; de tussenresultaten van het ene model worden gebruikt om het andere model te voeden, en omgekeerd.

Het KNMI heeft net het Europees SUMO-project afgerond, een groot onderzoeksproject naar supermodellering. Toch besloot Selten om ook de Studiegroep Wiskunde met de Industrie te vragen, om ook eens naar de principes van supermodellering te kijken. “Ik ging de week vrij open in”, zegt Selten. “Supermodellering is een jong idee, dat een paar jaar geleden is gelanceerd door de Amerikaanse weerkundige Greg Duante. Uit het Europese onderzoek blijkt dat supermodellering inderdaad voordelen heeft. Maar er zijn nog genoeg losse eindjes, waarover ik graag de ideeën van deze wiskundigen wilde horen.”

Een van die losse eindjes is de vraag, welke grootheden je in het supermodel zou moeten koppelen. Het KNMI weet uit ervaring dat je niet alle grootheden uit de modellen hoeft te koppelen. Rottschäfer: “Een paar koppelingen blijkt genoeg om de modellen synchroon te laten lopen.” Maar welke grootheden kan je daarvoor het best kiezen? En hoe verknoop je die met elkaar? Tot nu toe hebben we de modellen lineair verbonden, maar is dat wel de beste manier? Dat waren de vragen waar de groep zich in de studieweek op richtte.

De wiskundigen werkten niet in een echt weermodel. Dat zou te complex zijn – het wereldwijde atmosfeermodel van het KNMI telt al miljoenen vrijheidsgraden. Als alternatief is het Lorenzstelsel gebruikt. “Dat is het speelmodel dat we bij het KNMI ook gebruiken”, vertelt Selten. Het Lorenzstelsel is vernoemd naar de Amerikaanse meteoroloog en wiskundige Edward Lorenz, een invloedrijke pionier in chaostheorie. Hij was de man die ontdekte dat het weer chaotisch is, wat betekent dat een kleine verandering in de begincondities grote invloed kan hebben op het eindresultaat. Lorenz illustreerde dit zelf door te zeggen dat de vleugelslag van een vlinder een orkaan kon veroorzaken. Die uitspraak is inmiddels wereldberoemd.



Het Lorenzstelsel
Beeld: Wikimol

Lorenz ontwikkelde in 1963 een eenvoudig model voor convectie in de atmosfeer. Het Lorenzmodel is een set van drie simpele differentiaalvergelijkingen. In sommige gevallen gedraagt het model zich chaotisch; door een klein verschil kan de oplossing van de ene in de andere ‘modus’ schieten. Rottschäfer: “We hebben de hele week gewerkt met gekoppelde Lorenzmodellen. Frank verzekerde ons dat alles wat we daarin deden, bruikbaar zou zijn voor de echte weermodellen.” De wiskundigen beten zich in die week vooral vast in een wonderlijk fenomeen, dat het KNMI in het supermodel zag. “Het weer hield op”, zo vat Selten het bondig samen. “Dan werd het voor altijd zonnig in Europa”, lacht Rottschäfer. “Eerlijk gezegd vonden wij dat best een goed idee.” Goed idee of niet, in de praktijk komt deze situatie nooit voor. Er ging dus iets goed mis wanneer de modellen werden gesynchroniseerd.

Dat dode weer ontstond wanneer de modellen niet al te sterk, maar ook niet al te los met elkaar werden verbonden. “Wanneer je de modellen maar losjes met elkaar verbindt, gaan ze alsnog hun eigen gang. Koppel je ze te sterk, dan gaan ze volledig met elkaar in de pas lopen. Logischerwijs wil je in een supermodel daar tussenin gaan zitten; je wilt dat de modellen op elkaar reageren, maar je wilt ze ook genoeg vrijheid geven om wel ‘hun eigen pad’ te volgen”, zo vertelt Rottschäfer. Maar juist wanneer het KNMI de modellen middelsterk koppelde, kwamen de modellen van tijd tot tijd in een dood punt terecht. Selten: “Ik wilde heel graag weten hoe dat kwam – en beter nog, hoe we dat konden vermijden.”

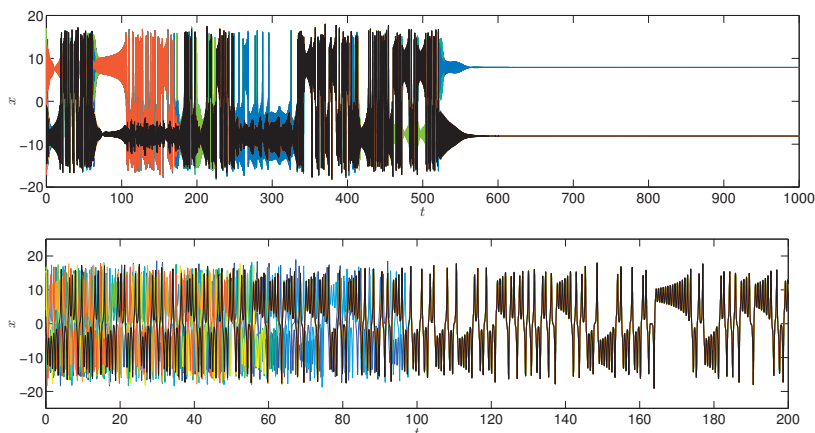
“Het was duidelijk dat dit fenomeen te maken had met de zogeheten vaste punten van het Lorenzmodel”, vertelt Rottschäfer. “Voor bepaalde waardes van de coëfficiënten heeft het Lorenzmodel drie van die punten. Wanneer het model daarin begint, blijf het daar zitten. Maar wanneer je in de buurt begint, ga je er niet naartoe; ze zijn instabiel”, zo vertelt Rottschäfer. “We zagen dat het gekoppelde Lorenzstelsel in bepaalde gevallen meer van dat soort vaste punten heeft. Een aantal daarvan is wél stabiel. Wanneer je dichtbij zo’n punt bent, gaat het model er naar toe en blijft het daar in de buurt hangen. Dat had die eeuwige zon tot gevolg.”

De wiskundigen ontdekten ook hoe het kwam, dat het supermodel soms in zo’n vast punt belandde. “Ik weet niet meer op welke dag het was, maar ik kan me het moment zelf nog precies herinneren”, vertelt Selten. Wiskundigen Bart de Leeuw en Ivan Kryven bestudeerden simulaties van een supermodel, waarin tien Lorenzmodellen waren gekoppeld. Om gevoel voor het supermodel te krijgen, keken ze in welke volgorde de modellen koppelden. Dat bleek in clusters te gaan: eerst koppelen twee modellen, dan twee anderen, en vervolgens clusteren die twee groepjes van twee. Selten: “Bart of Ivan zei toen ineens dat aantrekking tussen de modellen het grootst is wanneer ze ver van elkaar afliggen. Dankzij die lineaire koppeling trekken ze dan het hardst aan elkaar. En dat is misschien niet wat je wilt.”

Het bleek een echt aha-moment. “Ik dacht meteen ‘oh natuurlijk’”, vertelt Selten. Wanneer de modellen ver uiteen lopen, en ze worden dan gesynchroniseerd, dan worden beide modellen een heel eind van hun pad getrokken. Ze komen dan samen op een punt, waar ze afzonderlijk nooit terecht waren gekomen. En vanuit daar lopen ze dan naar zo’n vast punt, waar ze niet meer uitkomen.” Selten noemt dit inzicht de doorbraak van de week. “Hier ben ik echt blij mee.”

Lineaire koppeling bleek dus geen goed idee. “We zijn gaan nadenken over andere koppelingen”, vertelt Rottschäfer. De groep besloot een Gaussische koppeling te proberen. “De sterkte van de koppeling zwakt af naarmate de modellen verder uiteen raken. Eigenlijk zeg je ‘ga maar even je eigen gang’ op het moment dat de modellen een heel ander pad aan het volgen zijn. Je ontkoppelt ze tijdelijk. Als ze later weer in de buurt van elkaar zitten, voelen ze elkaar weer meer.” Toen de groep simulaties deed met deze manier van koppelen, verdween het dode weer.

Het gekoppelde supermodel kwam niet langer in de vaste punten terecht. “Dat was goed nieuws voor ons. Maar wel jammer van dat mooie weer in Europa”, grapt Rottschäfer.



10

Bij lineaire koppeling (boven) belandt het supermodel soms in een dood punt: het weer verandert dan niet meer. Door de modellen Gaussisch te koppelen, verdwijnt dat probleem.

Dat lineaire koppeling niet het beste idee is, is nu duidelijk. Maar of Gaussische koppeling ook de best mogelijke koppeling is, dat weten de wiskundigen niet. “Je kunt in een week niet alles doen”, benadrukt Rottschäfer. “Deze hebben we gekozen omdat hij zwakker koppelt naarmate de modellen meer afwijken, maar er zijn natuurlijk meer koppelingen te bedenken die dat doen.” Selten: “Je kunt ook een drempelwaarde invoeren, waarboven je de koppeling los laat.”

De beste koppeling zal een belangrijk onderwerp zijn bij het vervolgonderzoek van het KNMI. Selten zal de uitkomsten van de studiegroep gebruiken bij het schrijven van een nieuw onderzoeksvoorstel over supermodellering. “In het Europese project hebben we de principes van supermodellering onderzocht in kleine modellen als het Lorenzmodel. Nu willen we de stap zetten naar de echte modellen.”

Mobidot meet reizen mobiel

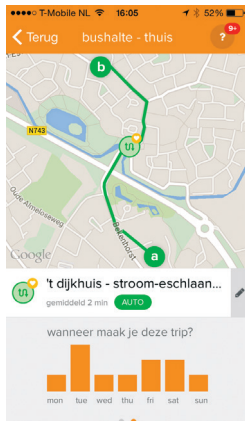
“Een week vol ideeën, die we op zijn minst nog niet hebben geprobeerd en die op zijn best heel bruikbaar zijn”, zo kijkt Johan Koolwaaij van mobiliteitsbureau Mobidot terug op de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Mobidot vroeg de studiegroep om de analyse van hun data te verbeteren.

Met de fiets naar het station, dan een stukje met de trein en daarna met de bus naar kantoor. Met de auto de kinderen van zwemles halen. Te voet naar de supermarkt om de hoek. Op al die tochtjes reist onze mobiele telefoon met ons mee. Mobidot, een bedrijf uit Enschede, maakt daar handig gebruik van. Het bedrijf onderzoekt mobiliteitspatronen. Dat doet het bedrijf niet met behulp van enquêtes, zoals dat traditioneel gesproken gaat. Mobidot gebruikt smart phones om in beeld te brengen, welke reizen mensen maken en welk vervoersmiddel ze daarvoor gebruiken.

Mobidot doet onderzoek voor gemeenten, die willen weten hoe hun inwoners zich door de stad verplaatsen. Maar ook voor werkgevers, die graag zouden zien dat het personeel vaker op de fiets naar het werk komt. “Meten, weten en verleiden, dat is ons motto”, vertelt Johan Koolwaaij, medeoprichter van Mobidot.

Mobidot is een jong bedrijf, het is in 2013 gestart. Het bedrijf besteedt veel tijd aan het verbeteren van de meetstrategie. Wanneer Mobidot een mobiliteitsonderzoek doet, krijgt het bedrijf van deelnemers toegang tot een aantal telefoongegevens, zoals GPS, wifi en de versnellingsmeter. Mobidot verrijkt die basisgegevens met informatie over de omgeving. Koolwaaij: “We weten bijvoorbeeld hoe de buslijnen door de stad lopen. Dat helpt om verschil te maken tussen iemand in de bus en iemand in de auto.” Voor sommige klanten kijkt Mobidot ook naar de intentie van de reis. Koolwaaij: “Voor de een is een tochtje naar de supermarkt boodschappen doen, voor de ander is het de reis naar werk. Dat verschil willen we ook kunnen maken.”

De resultaten presenteert Mobidot in een app. De deelnemers aan het onderzoek kunnen in die app aangeven of Mobidots inschatting – reis van huis naar werk met de auto – correct is.



Op de app van Mobidot kan de gebruiker zien hoe, wanneer en hoe lang hij reist. Beeld: Mobidot

Een van Mobidots grote uitdagingen is om de batterij van de telefoons niet te zwaar te belasten met het onderzoek. De GPS en de versnellingsmeter in het toestel geven belangrijke informatie over de positie en de beweging van het toestel, maar het meten van die data kost relatief veel energie. “Wanneer je continu zou meten, zou de batterij van de telefoon in vier uur leeg zijn”, vertelt Koolwaaij. Mobidot wil daarom strategisch meten. “We willen zo min mogelijk meten aan dingen die je al weet, en zo veel mogelijk aan dingen die je nog niet weet.” Van de tijd die een deelnemer thuis is, of achter zijn bureau zit, hoeft Mobidot niet zoveel gegevens. Maar zodra die gebruiker opstaat om op pad te gaan, wil het bedrijf graag data met meer detail. “We hebben de studiegroep gevraagd na te denken over de beste meetstrategie. We willen het begin van de reis niet missen. Juist dat eerste stukje lopen, bijvoorbeeld naar de bushalte, is karakteristiek voor het begin van een reis.”

Daarnaast had het bedrijf nog heel wat andere vragen aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Zo heeft het bedrijf last van spookreizen: de software denkt dat iemand een reis heeft gemaakt, terwijl dat niet zo is. Dat kan bijvoorbeeld gebeuren wanneer de telefoon eventjes wordt opgepikt door een verlegen zendmast. Maar het omgekeerde gebeurt ook, dan zijn er gaten. Mensen zijn dan ineens heel ergens anders, zonder dat ze een reis hebben gemaakt.

Mobidot wil ook graag weten wat de beste manier is om te bepalen wat voor vervoersmiddel iemand gebruikt. Het verschil tussen een wandelaar en een

automobilist is snel gemaakt, maar het verschil tussen iemand in de auto en iemand in de bus is al moeilijker.

En dan zijn er nog de ingewikkelde reizen, waarbij iemand bijvoorbeeld eerst een stukje met de bus gaat, en daarna de trein neemt. Mobidot zou graag willen dat de analysesoftware een patroon als dat herkent als één reis met meerdere vervoermiddelen, in plaats van twee losse reizen.

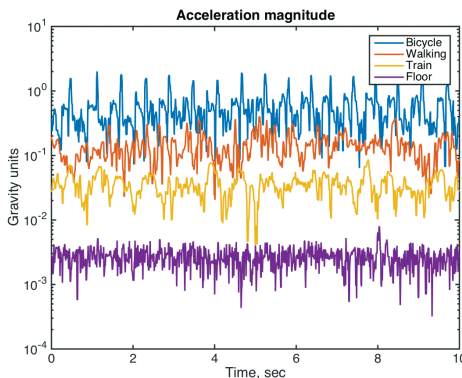
Koolwaaij: "Natuurlijk wist ik vooraf dat je niet al die vragen in één week zou kunnen aanpakken. Maar ik heb de vraagstelling bewust breed gehouden. Zo kon de studiegroep zelf filteren en beslissen waar ze het meest konden betekenen."

Jasper van Heugten (RUN) was een van de studiegroepdeelnemers die met de opdracht aan de slag ging. "Ik vind het interessant hoe moderne technologie wordt ingezet om het gedrag van mensen te veranderen. Daarnaast vind ik patroonherkenning een interessant onderwerp. Dat was voor mij de reden om voor deze vraag te kiezen."

Bij de eerste brainstormsessies besloten de wiskundigen om eerst een goede meetstrategie te verzinnen. Van Heugten: "Het is logisch om de telefoon in sluimerstand te laten gaan, wanneer iemand een tijd op één plek blijft. De GPS-data veranderen dan nauwelijks. Vervolgens laat je het apparaat af en toe 'kijken' of er al iets is veranderd. Zodra blijkt dat de gebruiker in beweging is, gaat de telefoon actiever meten." In zo'n schema worden perioden van rust dus afgewisseld met intensieve meetperioden. Van Heugten: "Hoe langer de rustperioden, hoe minder energie er wordt gebruikt. Maar hoe groter ook de kans, dat de telefoon te laat actief wordt en het begin van de trip mist. En precies dat wil Mobidot voorkomen." De studiegroep adviseert Mobidot om in rustperiode vooral de versnellingsmeter te laten meten. De GPS peilt slechts af en toe de positie. Van Heugten: "Wanneer je met de GPS een duidelijke plaatsverandering ziet, kan je in de data van de versnellingsmeter terugzien wanneer de reis begonnen is." Het voordeel van deze strategie is dat de GPS minder vaak aan de slag hoeft: "De GPS-ontvanger kost veel energie, omdat de telefoon dan steeds op zoek is naar satellietsignalen. De versnellingsmeter in het apparaat is gewoon een sensor, die verbruikt veel minder stroom."

De wiskundigen deden geen berekeningen om de verwachte opbrengst van deze strategie te berekenen. Van Heugten: “Dit was niet zozeer een diep wiskundig inzicht, meer een handig idee.” Koolwaaij van Mobidot vond het ook een slimme vondst: “Tot nu toe waren de GPS-data voor ons leidend, en de metingen van de versnellingsmeter aanvullend. In dit voorstel is dat omgekeerd. Dit ga ik zeker testen.”

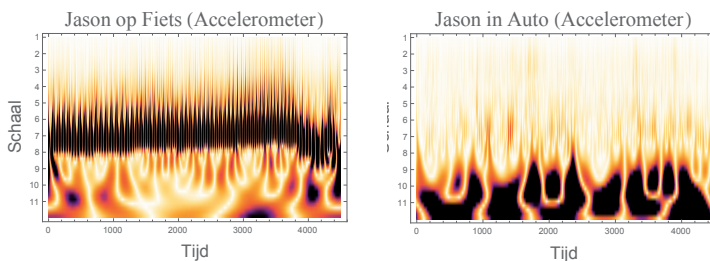
Daarna gingen de wiskundigen aan de slag met een probleem, waar wat meer wiskundig inzicht bij komt kijken: het bepalen van het type voertuig. De groep hoopte dat de vervoerswijze op basis van de metingen van de versnellingsmeter te bepalen is. “We hadden daarvoor ruwe sensordata nodig. Mobidot had alleen versnellingsdata voor ons, die al door de telefoon was bewerkt. Jason Frank, een van de teamleden, was toen heel kordaat. Die pakte zijn telefoon en sprong op een fiets.” Van Heugten lacht bij de herinnering. De wiskundigen deden heel wat metingen: lopend met de telefoon in een broekzak, lopend met de telefoon in de hand, op de fiets, in de bus, de auto en de trein. Al die ritjes leverden versnellingsdata in drie richtingen. Van Heugten: “We zagen grote verschillen in de data, ook voor dezelfde voertuigen. Het maakt bijvoorbeeld een wereld van verschil of de telefoon in je zak zit, of dat je hem in je hand hebt. Die variatie maakt het lastiger om uit de data het vervoersmiddel te filteren.”



Data van de versnellingsmeter. Bij de fiets is een mooie cadans te zien.

De cruciale vraag was of er in die signalen typische bewegingspatronen zitten, waardoor je een fiets van een bus kan onderscheiden. Een analyse met hulp van wavelets lag voor de hand. Van Heugten: “Daarmee doorzoek je het signaal op typische frequenties van bepaald gedrag.” Hij wijst naar de data van een fietstochtje: “Hier zie je bijvoorbeeld pieken van een cadans, waarschijnlijk van het trappen. Met wavelets kan je ook minder zichtbare karakteristieken opsporen.”

De groep experimenteerde met verschillende typen wavelets. Van Heugten: “De resultaten worden beter, wanneer de vorm van de wavelet grofweg matcht met de vorm van het signaal dat je zoekt. Maar omdat we nog niet wisten wat voor soort signaal we zochten, hebben we eerst maar eens twee wavelets uitgetoetst. De eerste wavelet was de Haarwavelet, die een stapfunctie is. De tweede was de Mexican hat-wavelet. “De resolutie van de Haarwavelet was minder, maar de Haarwavelet is computationeel erg efficiënt.” Beide wavelets leverden goede resultaten. Van Heugten: “Je ziet duidelijk dat een fietssignaal andere karakteristieken heeft dan een autosignaal.”



De data zijn bewerkt met de Mexican hat-wavelet. Fiets en auto zijn duidelijk te onderscheiden.

“De week was te kort om deze aanpak in detail uit te werken, maar ik denk wel dat hij succesvol kan zijn”, aldus Van Heugten. In het ideale geval zou Mobidot aangepaste wavelets moeten maken voor ieder type vervoer. Van Heugten: “Dan analyseer je het signaal zowel met een ‘fietswavelet’ als met een ‘autowavelet’. Als het signaal een fietssignaal is, zal de fietswavelet beter ‘passen’ dan de autowavelet.” Die wavelets zou Mobidot kunnen ontwikkelen door de computer te laten oefenen op data, waarvan het bedrijf zeker weet wat voor vervoersmiddel er is gebruikt.

Koolwaaij over de suggestie om wavelets te gebruiken: “Ik ken wavelets vooral uit de datacompressie. We hebben ze nog niet gebruikt voor het herkennen van patronen. Maar ik kan me goed voorstellen, dat deze aanpak succesvol kan zijn.” Hij kijkt tevreden terug op de Studiegroep Wiskunde met de Industrie: “Voor mij is het een week geweest vol verse ideeën, die we op zijn minst nog niet geprobeerd hebben en die op zijn best heel bruikbaar zijn.”

Snel door de MRI

Sneller scannen helpt om de prijs van een MRI-opname laag te houden. Philips werkt aan methoden om met minder metingen toch een goed beeld te krijgen. De Studiegroep Wiskunde met de Industrie dacht mee over de beste aanpak. Johan van den Brink van Philips: “Ik ben blij verrast. Ik ben ervan overtuigd dat de gevonden oplossing realiseerbaar is.”

De eerste MRI's deden hun intrede in het ziekenhuis in de jaren 80. Daarna is het snel gegaan. Artsen gebruiken MRI-scans inmiddels voor allerlei diagnose, van knieklachten tot Alzheimer. Op een MRI-scan is – anders dan bij röntgen – scherp onderscheid te zien tussen verschillende typen zachte weefsels. Bijkomend voordeel is dat de straling die bij een MRI-scan wordt gebruikt, niet schadelijk is voor het lichaam.



MRI-scanner Beeld: Philips

Nu zijn MRI-scanners dure apparaten. Om de kosten van een scan laag te houden, is het belangrijk efficiënt te scannen. Een eenvoudige manier om de tijd per scan te verkleinen, is te zorgen dat de patiënt zo snel mogelijk klaar ligt voor de scan. Zo gebruiken veel ziekenhuizen – als dat gaat – een opstapje om de patiënt op de tafel te krijgen. Dat is sneller dan de tafel te laten zakken en weer omhoog te zetten. Daarnaast wordt er kritisch gekeken naar het aantal scans dat noodzakelijk is.

Aan de scantijd zelf wordt ook gesleuteld: de industrie doet veel onderzoek naar het verkorten van de scantijd. Een kortere scantijd verlaagt de kosten, maar het is ook prettiger voor de patiënt. MRI-scanners zijn namelijk krap en best luidruchtig.

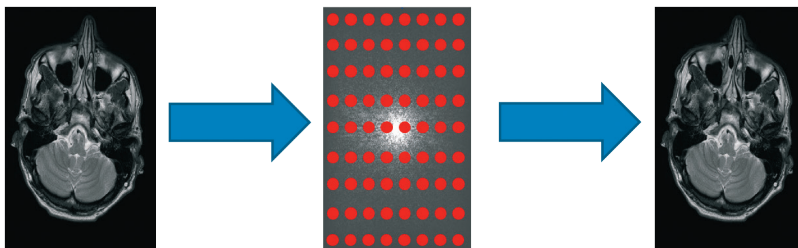
De meeste mensen willen er graag snel weer uit. Daarnaast heeft een korte scantijd nog een bijkomend voordeel: het verkleint de kans dat de patiënt tijdens de scan beweegt, wat de beeldkwaliteit ten goede komt.

De scantijd verkorten kan door simpelweg de algehele resolutie te verlagen, of de afmetingen van de scan. Philips maakt daarnaast gebruik van compressiemethoden, waardoor minder metingen per scan nodig zijn. Het bedrijf heeft het aantal benodigde metingen al behoorlijk terug weten te dringen, maar zou liefst nog een stapje extra doen. Het bedrijf vroeg de studiegroep om mee te denken over een slimme aanpak.

Om bij het begin te beginnen: wat doet een MRI-scanner eigenlijk? MRI staat voor *Magnetic Resonance Imaging*. Het is een beeldtechniek die gebruik maakt van kernspinresonantie. Kernspin is een kwantummechanische eigenschap van de protonen in de atoomkernen. Het maakt deeltjes gevoelig voor magneetvelden. Dat geldt vooral voor waterstof, dat enkel een proton in zijn kern heeft.

18

Een MRI-scan werkt met krachtige magneetvelden en radiogolven. Het magneetveld kwantiseert de kernspin in de atomen en maakt ze gevoelig voor radiogolven. De door radiogolven aangeslagen spins keren vanzelf weer terug naar hun oorspronkelijke toestand. Daarbij zenden ze een radiogolf uit. Dát is het signaal dat de MRI-scanner meet. Zoals gezegd detecteert een MRI-scanner vooral de waterstofatomen in het lichaam. Doordat verschillende typen weefsel verschillende hoeveelheden waterstof bevatten, zijn de structuren in het lichaam te onderscheiden.



Het object in de MRI-scanner (l), k-space (m) en de afbeelding (r) Beeld: Philips

Niet alle spins vallen op hetzelfde moment terug naar hun oorspronkelijke toestand: het meetsignaal is uitgesmeerd over de tijd. “De metingen van de scanner vinden plaats in wat wij *k-space* noemen; je zit dan in het frequentiedomein. Via een Fouriertransformatie worden de data omgezet naar het ruimtelijke domein: zo ontstaat het uiteindelijke beeld”, zo legt Johan van den Brink uit. Hij is *principal scientist* voor MRI bij Philips Healthcare.

Van den Brink vertelt dat Philips al werkt met signaalverwerkingsmethoden, die het mogelijk maken om op basis van een kleiner aantal metingen toch een goed beeld te reconstrueren. Philips bracht deze technologie in 2000 op de markt onder de naam SENSE.

Van den Brink: “We hopen nog een stap te kunnen maken. We werken daarom nu aan een techniek die *random undersampling* heet. We laten daarbij willekeurige metingen weg.” Meestal heeft dat weglaten weinig invloed op de beeldkwaliteit. Maar het is duidelijk dat je hierin niet té ver kan gaan: dan zou er belangrijke informatie uit het beeld kunnen verdwijnen. Van den Brink: “We missen nog een goede basis om te beslissen wat een verstandige aanpak is bij *random undersampling*. Zo voldoet de beeldkwaliteit van de scans niet altijd aan onze eisen, mede onder invloed van meetruis. De scherpte van overgangen en het ruimtelijk oplossend vermogen bij kleinere structuren, daar zit het probleem.”

19

Philips legde de wiskundigen van de studieweek de volgende vraag voor: wat is het beste meetpatroon voor *undersampling*, welke metingen kunnen worden weggelaten? En hangt het ideale patroon voor *undersampling* samen met wát je meet? Zou je bij een opname van de hersenen misschien een ander meetpatroon moeten kiezen dan bij een knie?

“Toen we de literatuur indoken, vonden we dat er al zeker tien jaar is gewerkt aan het toepassen van *compressed sensing*-technieken bij MRI-opnamen. Dat vond ik wel intimiderend. We vroegen ons af, welke draai we daar nog aan konden geven”, vertelt wiskundige Tristan van Leeuwen (UU), die aan het probleem werkte.

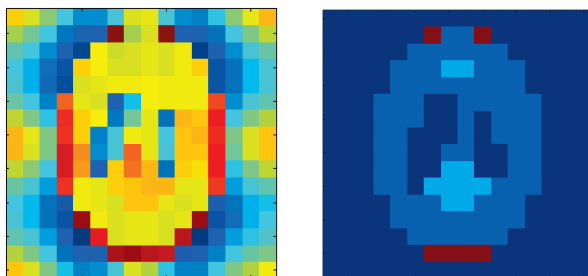
Toch lukte het de wiskundigen om een nieuwe invalshoek te kiezen. Van den Brink: “Wij waren blij verrast met de ideeën. Wij gingen er steeds vanuit dat we

voor optimaal *random undersampelen* de meetstrategie moesten aanpassen. De wiskundigen hebben laten zien dat het ook mogelijk is om de dataverwerking aan te passen. Dat inzicht vond ik een doorbraak.”

Om van de metingen een beeld te maken, wordt een vaste set wavelets gebruikt. Van Leeuwen vergelijkt wavelets met bouwstenen: “Om met minder metingen toch een beeld op te kunnen bouwen, heb je een set bouwstenen nodig waarmee dat beeld kan worden opgebouwd. De wavelets zijn die bouwstenen. Stel dat je een beeld van 100 bij 100 pixels wilt opbouwen. Als je dat punt voor punt doet, heb je 10.000 metingen nodig. Maar zeg dat je het uit 50 wavelets op kan bouwen, dan heb je ineens nog maar zo’n 100 metingen nodig.” Hij vervolgt: “Maar als je wilt *undersampelen* en je kiest voor het willekeurig weglaten van metingen, dan is de set wavelets die normaal wordt gebruikt, niet langer optimaal.” In de literatuur staat een oplossing beschreven voor dat probleem. “Het probleem zou zijn opgelost door het aanbrengen van een willekeurige verstoring in de patiënt – of eigenlijk dus in het magnetisch veld, dat de MRI gebruikt. Dan zou de normale set wavelets wel goed bruikbaar zijn.” Maar deze oplossing is niet haalbaar; het is technisch te ingewikkeld om uit te voeren.

Toen bedachten we, dat we die verstoring dan misschien ergens anders aan konden brengen. “In de wavelets zelf”, vertelt Van Leeuwen enthousiast. Dat klinkt misschien niet meteen logisch, maar vanuit wiskundig oogpunt bleek het precies hetzelfde. “Dat was de cruciale denkstap.” Dankzij de verstoorde wavelets kon er met minder metingen toch een goed beeld worden opgebouwd. “Volgens onze schatting konden we met een factor vier tot acht minder meetpunten toe”, vertelt Van Leeuwen. Helaas was er één maar: het opbouwen van het beeld ging niet zo efficiënt als met de oorspronkelijke set wavelets. Om in Van Leeuwens termen te praten: er waren meer bouwblokken nodig om het plaatje op te bouwen. “We zaten hier dus in een spanningsveld”, zo omschrijft Van Leeuwen de situatie. “Zonder verstoring kan je efficiënt een plaatje maken, maar heb je veel metingen nodig. En met verstoring heb je maar weinig metingen nodig, maar kun je niet zo efficiënt een plaatje maken.” Hij verwacht tussen die uitersten een gulden middenweg, waarbij er met aardig wat minder metingen toch nog aardig efficiënt een plaatje te maken valt.

De wiskundigen experimenteerden met een oefenplaatje, een soort MRI-opname van 16 bij 16 pixels, dat vaag deed denken aan een MRI van een hoofd. “Toen we berekenden hoe de optimale verstoring van de wavelets eruit zou zien, kwamen we uit op een verstoringsmasker dat verdacht veel op het plaatje leek”, vertelt Van Leeuwen. “Toen we daar over nadachten, was dat ook wel logisch. Met zo’n verstoring is het verstoorde beeld veel simpeler, en dus makkelijker te representeren met wavelets. Je haalt dus de beste resultaten als de verstoring van de wavelets matcht met het MRI-beeld.”



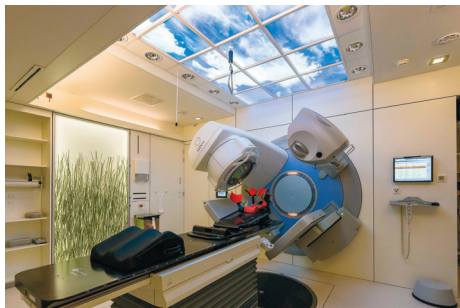
Oefenplaatje en optimale verstoringsmasker.

Maar wacht, dat klinkt als een kip-ei-verhaal. Hoe de optimale wavelets eruit zien, wordt bepaald door het MRI-beeld. Maar om dat MRI-beeld te maken, heb je de wavelets nodig. “Klopt”, zegt Van Leeuwen, “Maar je hebt vooraf al wel informatie over dat MRI-beeld. Je weet bijvoorbeeld dat je een knie in de scanner hebt, en geen hoofd.” Hij kan zich voorstellen dat Philips op basis van honderden MRI-scans van knieën een set wavelets maakt, die optimaal zijn voor knie-opnamen. “De grote overgebleven vraag is nu, hoe kritisch de vorm van de verstoring is. Hoe goed moet het verstoringsmasker lijken op het uiteindelijke plaatje om goed resultaat te boeken?” Oftewel: is een set wavelets voor de gemiddelde knie goed genoeg om het beeld van de knie van mevrouw Jansen te reconstrueren? “Die cruciale vraag hebben we niet meer kunnen beantwoorden”, vertelt Van Leeuwen. “Daar zal Philips zelf mee aan de slag moeten.” En dat gaat Philips zeker doen, benadrukt Van den Brink. “Deze aanpak biedt in mijn ogen enorme kansen. Ik ben ervan overtuigd dat het realiseerbaar is.”

NKI wil maatwerk bij bestraling

Bij bestralingen wordt niet alleen de tumor, maar ook een rand van gezond weefsel intensief bestraald. Dat is om kleine veranderingen in vorm en positie van de tumor op te vangen. Het Nederlands Kanker Instituut wil die marge graag verkleinen. Dat kan mogelijk door de bestraling aan te passen als de tumor verandert.

De helft van de kankerpatiënten krijgt radiotherapie, ook wel bestraling genoemd. Het DNA in de kankercellen sneuvelt door de ioniserende straling. Er zijn meerdere manieren van bestralen, de meest gebruikte is uitwendige bestraling. Tijdens de behandeling draait het toestel om de patiënt heen. Door de straling vanuit verschillende hoeken toe te dienen, wordt het gezonde weefsel zo min mogelijk belast, terwijl de tumor de volle lading krijgt.



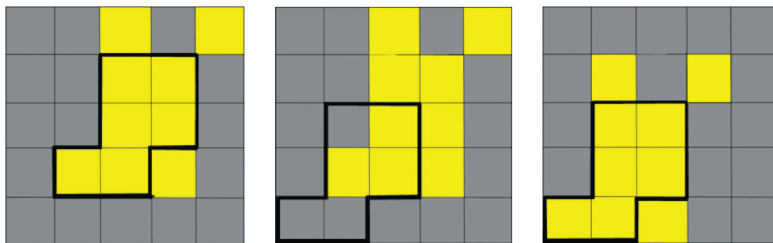
Bestralingstoestel NKI
Beeld: René Tielenburg

Radiotherapie duurt veelal meerdere weken, waarbij de patiënt dagelijks wordt bestraald. Zo krijgt het gezonde weefsel tussendoor tijd om te herstellen. Een radiotherapeut maakt voor iedere patiënt een persoonlijk behandelplan, waarin wordt bepaald onder welke hoek en met welke dosis hij wordt bestraald. “Dat plan maakt de radiotherapeut bij de start van de behandeling, op basis van een gedetailleerde CT-scan. Maar in die paar weken dat de behandeling duurt, kunnen er dingen veranderen”, vertelt Simon van Kranen, als onderzoeker verbonden aan het Nederlands Kanker Instituut. Zo verschuiven organen in het lichaam, kan een patiënt afvallen, of ontwikkelt hij misschien oedeem. Ook kan de tumor groeien,

of - hopelijk - juist sterk slinken door de behandeling. Van Kranen: “Kortom, de tumor is halverwege de behandeling anders van vorm dan aan het begin. En hij zit ook niet meer precies op de dezelfde plek.”

Om te voorkomen dat de tumor hierdoor ‘wegglipt’ uit de bundel van de bestraling, wordt bij het inplannen van de bestraling een marge rond de tumor meegenomen. Die regio wordt ook intensief bestraald. “Die veiligheidsmarge willen we graag zo klein mogelijk maken, zodat zo min mogelijk gezond weefsel wordt behandeld”, legt Van Kranen uit. “De patiënt wordt nu met allerlei trucs al heel precies op de tafel gepositioneerd, om die marge klein te houden. Maar we willen nog nauwkeuriger. Daarvoor is adaptieve radiotherapie, ART, in opkomst.”

Het idee van adaptieve radiotherapie is dat het bestralingsplan tijdens de behandeling wordt aangepast aan de nieuwe vorm of positie van de tumor. Van Kranen: “Het toestel maakt nu al voor iedere bestraling een scan, waarmee wordt gecontroleerd of de patiënt goed ligt. De kwaliteit van die scan is toegenomen.” Wanneer de scan vooraf goed genoeg wordt om de locatie en vorm van de tumor met precisie vast te stellen, wordt het mogelijk om de bestraling ter plekke aan te passen. “Dan verander je de vorm en richting van de bundel zo, dat de ingeplande dosis alsnog netjes in de veranderde tumor belandt.”



Zwart omlijnd de tumor, in geel de bestralingsdosis. Links de oorspronkelijke tumor en de bijpassende dosis. Midden de verschoven tumor, de geplande stralingsdosis sluit niet meer aan. Rechts: de bestraling is aangepast aan de nieuwe positie van de tumor.

Het Nederlands Kanker Instituut (NKI) heeft een grote radiotherapieafdeling. Jaarlijks worden in het Antoni van Leeuwenhoekziekenhuis, waar het NKI bij hoort, ruim 4000 patiënten bestraald. Het NKI doet ook onderzoek om radiotherapie te verbeteren; er werken 56 onderzoekers bij radiotherapie, waarvan Van Kranen er een is. Adaptief bestralen is een belangrijk onderzoeksthema.

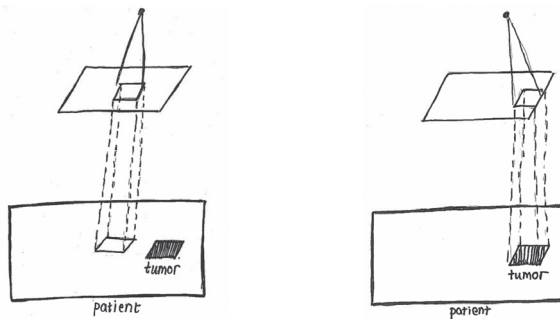
Het onderzoek naar adaptief bestralen zit in de verkennende fase. Het leek Van Kranen een goed idee om de Studiegroep Wiskunde met de Industrie te vragen mee te denken. “Ik wilde graag weten hoe zij dit probleem te lijf zouden gaan. Het principe van adaptief bestralen is niet moeilijk. Je hebt twee scans, één van de oude en één van de nieuwe situatie. Je weet dus de geometrische vervorming van de tumor. Vervolgens moet de oorspronkelijke bundel voor de bestraling zó worden aangepast, dat ieder element in de tumor de geplande dosis krijgt. Maar hoe bereken je die aanpassingen zo snel mogelijk?”

De venijnigheid van het probleem zit hem vooral in de tijdsdruk: de berekening moet goed zijn, maar ook snel gebeuren. De patiënt ligt immers al op het toestel te wachten op de behandeling. “Hoe sneller, hoe beter, maar vijf minuten is echt de bovengrens”, vertelt Van Kranen. Daarnaast moet er rekening worden gehouden met kwetsbare delen in het lichaam, die niet bestraald mogen worden. Die mogen door de veranderingen niet ineens toch in de bundel terecht komen.

KaYin Leung was een van de wiskundigen, die met de vraag van het NKI aan de slag ging. “Ik heb de maandag pas besloten, ik vond Simons presentatie goed. En het maatschappelijk nut is ook meteen duidelijk.”

De groep vereenvoudigde het probleem om het behapbaar te maken. Leung: “Die hele machine met al zijn settings hebben we teruggebracht tot twee gradaties: één vaste kop waar de straling vertrekt, en een tweedimensionale tumor die wat verschoof of slonk. Dat kon niet moeilijk zijn, dachten we, en daarna zouden we uitbreiden naar ingewikkeldere scenario’s.” Ze lacht: “Zover zijn we dus niet gekomen, die week was zo voorbij. Zo hadden we ons verkeken op de tijd die al het programmeren kost.”

De wiskundigen beschreven de vraag als een minimalisatieprobleem. Leung: “Je weet de nieuwe vorm van de tumor en daarmee ook de stralingsdosis die de tumor moet krijgen. Je wilt de juiste instellingen van het toestel vinden om die stralingsdosis te kunnen toepassen. In het minimalisatieprobleem vind je de instellingen die ervoor zorgen dat je zo dicht mogelijk bij de juiste stralingsdosis terecht komt. Bij elke instelling van de machine hoort een bepaalde dosis. Wiskundig gezien wil je instellingen van de machine vinden, zodat het verschil tussen de bijbehorende dosis en de gewilde dosis zo klein mogelijk is.”



Schets van het minimalisatieprobleem: welke nieuwe toestelinstellingen passen bij de juiste stralingsdosis?

25

In de analyse keken de wiskundigen eerst naar een tumor, die wat verschoven was. De groep onderzocht twee methoden om het minimalisatieprobleem aan te pakken. “De eerste was met hulp van het Gauss-Newton algoritme, de tweede met een deeltjeszwerm”, aldus Leung. Gauss-Newton is een methode waarmee iteratief nietlineaire minimalisatieproblemen worden opgelost. “De aanpak met Gauss-Newton is vrij eenvoudig, het algoritme wordt veel gebruikt. De berekening was ook best snel”, vertelt Leung. Maar de aanpak heeft een nadeel. “Het algoritme is niet geschikt voor hele ‘heuvelachtige’ functies. Het blijft soms hangen in een lokaal minimum, terwijl verderop het echte minimum ligt.”

Dus besloot de groep nog een tweede aanpak te proberen, met hulp van PSO: *particle swarm optimization*. Die methode is rekenintensiever, maar heeft als voordeel dat ze niet in lokale minima belandt. “PSO is een methode, waarbij je als het ware met een heleboel deeltjes de oplossingsruimte verkent”, zo legt Leung uit.

Ook deze methode is iteratief. “De zwerm waaiert eerst breed uit voor een globale verkenning: ieder deeltje berekent ergens een minimum. Daarna gaat de zwerm naar de meest veelbelovende punten om te kijken of er daar in de buurt nog een dieper minimum te vinden is.”

Leung vertelt dat deze methode goed werkt, maar waarschijnlijk voor het NKI-probleem te rekenintensief is. “We hadden als oefenvoorbeeld een tweedimensionale tumor genomen, die wat opgeschoven was. We namen een zwerm van tien deeltjes, en lieten die in 50 stappen naar het minimum zoeken. Om een idee te geven, dat duurde anderhalf uur.” Ter vergelijking: de Gauss-Newtonmethode was in twee-en-een-halve minuut klaar. Leung: “Je zou dus liever het Gauss-Newtonalgoritme gebruiken. Een belangrijke vraag is dus of dat probleem met die lokale minima in de praktijk ook echt speelt.” Van Kranen denkt dat het mee kan vallen: “Ik denk dat er niet zoveel lokale minima in de kostfunctie zitten.”

De waarde van de studiegroep zat hem volgens Van Kranen vooral in terloopse opmerkingen, die hem nieuwe inzichten gaven. “Zo suggereerde iemand dat je die lokale minima misschien kan vermijden door de verandering van de tumor in - zeg vijf - kleinere stappen op te delen. Je gebruikt dan wel gewoon Gauss-Newton, maar doordat de verandering iedere keer maar klein is, zal je niet zomaar in een verkeerd minimum terecht komen. Je neemt het algoritme eigenlijk aan de hand en leidt hem in kleine stapjes van de oude naar de nieuwe tumor.” Er was geen tijd meer om dit idee nog in de studiegroep uit te proberen, maar Van Kranen verwacht dat deze aanpak zeker succesvol kan zijn.

Nog zo’n terloops idee was de opmerking dat een aantal berekeningen misschien vooraf kan worden gedaan. Van Kranen: “Dat vond ik echt een slim idee. Er zit een tijdsintensieve stap in de Gauss-Newton-methode; het zou veel tijd schelen als je die vooraf al kan doen. Gauss-Newton heeft de afgeleide van de kostfunctie nodig om snel naar een optimum te itereren. Die afgeleide moet je natuurlijk eigenlijk in de nieuwe scan berekenen, maar misschien is het ook goed genoeg als je daar de oude scan voor gebruikt. Die lijkt immers behoorlijk op de nieuwe, de tumor gaat niet ineens van je hoofd naar je tenen.” Dat idee wil Van Kranen zeker uitproberen: “Als het werkt, zou dat de berekening veel sneller maken.”

Leung geeft toe dat ze had gehoopt dat de groep nog verder was gekomen. “Ik had graag nog naar andere algoritmen gekeken. We hebben ook met een heel simpel model gewerkt. Een tumor is natuurlijk niet twee-dimensionaal. Donderdagavond hebben we pas de stap gezet van een verschoven naar een gekrompen tumor, ik had verwacht dat we dat allemaal veel sneller zouden doen.” Waarschijnlijk is ze te kritisch: Van Kranen is namelijk wél tevreden. “Je kan niet alles in die paar dagen. De oplossingen die de studiegroep aandroeg, lagen in de richting waarin we zelf ook hadden gedacht. Niet verrassend misschien, maar voor ons wel een bevestiging dat onze ideeën hout snijden. Bovendien hebben de wiskundigen veel dieper naar de details gekeken dan ik zelf zou doen. Dit helpt zeker bij het schrijven van een nieuw projectvoorstel voor verder onderzoek naar adaptieve bestraling.”

Laveren tussen burgers en ondergrond

We willen wel stroom, maar geen elektriciteitslijn in onze achtertuin. En dat is slechts één van de vele aspecten waar NM Group rekening mee houdt als het een nieuwe elektriciteitslijn ontwerpt. Het Britse bedrijf kwam naar Nederland voor advies over het optimaliseren van de routes.

Nee, het was niet omdat Nederlandse wiskundigen zoveel beter staan aangeschreven dan hun Engelse collega's. "Via een wiskundige bij Leeds University hoorden we van het bestaan van dit soort studiegroepen. Utrecht was toevallig de eerstvolgende in Europa", zo verklaart Chris Williams de aanwezigheid van een Brits bedrijf bij de Utrechtse Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Williams is softwareontwikkelaar bij NM Group, een bedrijf dat 'Innovation in Infrastructure' als bedrijfsslogan heeft. Het bedrijf is expert in de planning van nieuwe infrastructuur, zoals nieuwe spoorwegen of pijpleidingen. Het bedrijf gebruikt daarvoor onder meer satellietdata en 3D-metingen van het landschap. NM Group is specialist op het gebied van elektriciteitsnetwerken; zo helpt NM Group bij het bepalen van de beste route voor nieuwe elektriciteitslijnen. En dat is ook, wat Williams en zijn collega Paul Richardson naar Nederland bracht.

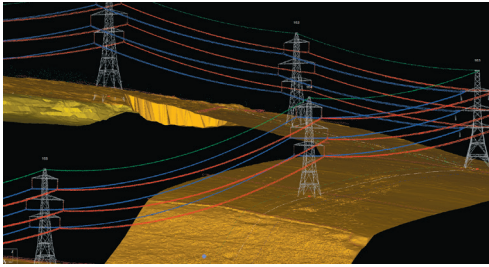


Beeld Peter Kaminski, Flickr

Door de opkomst van alternatieve energiebronnen verandert overal ter wereld het energielandschap. Vroeger werd alle stroom door een klein aantal centrales opgewekt. Nu komen daar andere bronnen bij, zoals windparken en de stroom van zonnecellen. Er zijn nieuwe lijnen nodig om al die bronnen te bereiken, en bestaande lijnen moeten worden aangepast aan de nieuwe situatie. Werk genoeg voor NM Group, zo verzekert Richardson de wiskundigen tijdens zijn presentatie op maandag.

Aan de bouw van een nieuwe hoogspanningslijn gaat een periode van intensieve planning vooraf. Tal van belangen moeten in die fase tegen elkaar worden afgewogen. Zo willen mensen niet graag een hoogspanningsleiding in hun achtertuin, maar liever ook niet in een natuurgebied. Bestaande infrastructuur, de ondergrond, de vegetatie, het hoogteverschil dat moet worden overbrugd; al die factoren spelen mee. NM Group probeert om de elektriciteitslijn zo kort mogelijk te houden en toch tussen alle probleempunten door te laveren. Daarbij heeft het bedrijf ook technische eisen: de afstand tussen twee masten kan niet oneindig groot zijn. Er moet van tijd tot tijd een plek zijn een mast neer te zetten: om 'te landen', zoals dat in jargon heet. Het aantal masten en hun plaatsing is alweer een optimalisatieprobleem. Hoge masten kunnen grotere afstanden overbruggen, maar kosten meer en zijn over grotere afstanden zichtbaarder. Daarnaast heeft een 'recht-toe-recht-aan-route' de voorkeur. Masten waarbij de draden rechtdoor lopen, zijn namelijk het goedkoopst. De trekkrachten houden elkaar in evenwicht. Als de kabels een hoek maken, is een sterkere mast nodig.

Bij de planning moeten alle factoren tegen elkaar worden afgewogen, iets wat met de hand bijna niet te doen is. NM Group gebruikt daarom planningssoftware voor het uitstippelen van de beste route. Het bedrijf deelt het terrein daarvoor op in een rooster van zeshoeken van twee kilometer doorsnee. Williams: "Om het probleem behapbaar te maken, drukken we alles uit in geld. Als een zeshoek in de buurt van een woonwijk ligt, wordt de prijs voor die zeshoek hoger, omdat de sociale kosten daar hoog zijn. Een stevige effen ondergrond drukt de prijs van een zeshoek, en zo kun je allerlei factoren meenemen."



Beelden van de planning van een nieuwe hoogspanningslijn. Beeld NM Group.

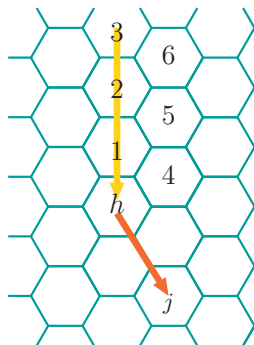
Het bedrijf heeft uitgebreide tabellen, waarin al die kosten staan. Daarmee kan de software berekenen wat – noem eens wat – een zeshoek van zandgrond bij een industriegebied en naast een doorgaande weg kost. “Voor de studiegroep doet het er niet toe wat een zeshoek duur of goedkoop maakt. Het gaat er om dat iedere zeshoek zijn eigen prijskaartje heeft”, zo benadrukt Richardson. De software berekent de goedkoopste route door het rooster. Daarna doet NM Group aanvullend grondonderzoek om de optimale lijn van de masten binnen de zeshoeken te bepalen. Williams: “We doen de berekening dan nog een keer, met een grid van kleinere zeshoekjes.”

“Onze software is best goed, maar af en toe komen er routes met rare hoeken uit”, vertelt Williams. “We begrepen niet goed, wat we daar aan moesten doen.” NM Group besloot daarom een Studiegroep Wiskunde met de Industrie te vragen, hoe zij de beste route zouden berekenen.

De groep ging niet aan de slag met de software van het bedrijf, maar besloot bij nul te beginnen. De indeling met de zeshoeken hielden ze wel aan. “Het probleem was wiskundig gezien eenvoudig geweest, als de kosten van de lijn alleen zouden hebben afgehangen van de kosten van de zeshoeken zelf. Het zijn de bijkomende kosten voor de masten, die het probleem ingewikkelder maken”, aldus Erik Bruin, een van de wiskundigen die aan het probleem werkte. Want voor de lijn zelf zijn ook weer tal van scenario’s denkbaar: hoe groot maak je de masten – en dus de

sprongen – en waar zet je ze neer? “Al die opties vergroot het aantal mogelijkheden voor een nieuwe lijn enorm”, benadrukt Bruin. “Het is de kunst uit al die scenario’s de beste te vissen.”

Omdat het zoeken van de optimale route door een rooster van zeshoeken met verschillend gewicht wiskundige gezien zo eenvoudig is, besloten de wiskundigen dat het probleem tot die vorm terug moest worden gebracht. De zeshoeken kregen van hen niet langer één prijs, maar een hele lijst met prijzen, voor ieder denkbaar scenario. Bruin: “We stopten alle kosten voor de lijn in de zeshoeken.” Naast de vaste ‘oppervlaktekosten’ kende de groep ‘sprongkosten’ en ‘hoekkosten’ toe aan de zeshoeken. “De sprongkosten zijn de kosten om met een mast in een zeshoek te landen. De hoekkosten zijn de meerkosten als de mast onder een hoek staat.” De sprongkosten hangen af van de afstand. “Ook hier splits je uit naar alle mogelijke scenario’s. Als de lijn uit de naastgelegen zeshoek komt, hoeft de mast niet hoog te zijn en zijn de kosten laag. De sprongkosten zijn dan lager dan wanneer de lijn van een verder weg gelegen zeshoek komt.”



$$(h, 3) \rightarrow (j, h)$$

Voor iedere hoek $(h,i) \rightarrow (j,h)$ is de kostprijs van de zeshoek de som van de landingskosten in h , de sprongkosten van i naar h en de hoekkosten voor h , gegeven door i , h en j .

Om de hoekkosten goed mee te kunnen nemen, namen de wiskundigen ook hier alle scenario’s mee voor alle ingaande en uitgaande lijnen. “Stel dat je een zeshoek A hebt. De lijn kan uit de aangrenzende zeshoeken komen, maar ook een grotere

sprong maken. Dan komt ze uit verderop gelegen zeshoeken.” De afstand die met één sprong te overbruggen is, is beperkt, dus dat beperkt de straal N waarbinnen de volgende mast moet staan. “Vanuit zeshoek A gaat de lijn daarna weer verder. Ook nu kan je een sprong met maximaal afstand N maken. Ook nu nemen we alle uitgaande mogelijkheden mee. Zo heb je alle mogelijke hoeken te pakken waarbij een mast binnen een straal N verbonden is met een mast in zeshoek A – en daarmee alle mogelijke hoekkosten.”

Het mooie van deze methode is dat alle informatie over alle mogelijke scenario's uiteindelijk wordt vastgelegd. Bruin: “Samen vormt dit alles een grote graaf, waardoor je met Dijkstra's kortstepad algoritme het optimale pad kunt berekenen. We hebben bewijzen dat ieder mogelijk pad bestaande uit zeshoeken, is verwerkt in de graaf en dat de bijbehorende kosten corresponderen. Een kortste pad bestaande uit zeshoeken correspondeert dus met een kortste pad in onze graaf.”

Het minder goede nieuws is dat de aanpak een botte-bijl-methode is. “Alle opties in de computer proppen en rekenen maar”, zo vat Bruin het bondig samen. “In theorie werkt het uitstekend, maar of het ook praktisch haalbaar is?” Bruin twijfelt daarover, maar Williams denkt dat het kan: “De wiskundigen hebben aangegeven hoeveel rekenkracht dit kost, en volgens mij is dat geen probleem.” Hij is blij met de gekozen aanpak: “Ik vind het concept van dit systeem heel goed. Bovendien treedt dat probleem met die rare hoeken hierin niet op.”

Williams mocht dan al tevreden zijn, de wiskundigen waren dat nog niet. Ze wilden graag een elegantere algoritme om uit alle scenario's de beste keus te maken. “Wij wilden iets snellers dan Dijkstra”, aldus Bruin. Dus maakte de groep aan het eind van de week nog een start met een ander zoekalgoritme, A^* , dat op basis van heuristiek werkt. Net als Dijkstra's kortstepad-algoritme zoekt A^* de kortste weg tussen twee punten van een graaf, maar de aanpak is net even anders. Waar Dijkstra begint te rekenen vanaf het beginpunt van de route, gebruikt het algoritme A^* een *short cut*: het maakt eerst een schatting, welke zeshoeken met de meeste waarschijnlijkheid op de route liggen. Dat zijn vaak de zeshoeken die halverwege het begin en eindpunt liggen. Vanuit daar begint het een route te zoeken. Zo heeft het algoritme al snel de kosten voor een eerste route te pakken, die bovendien niet onwaarschijnlijk is. Daarmee zijn alternatieven dan snel te vergelijken.

Williams: “Dat zoekalgoritme is een verbetering ten opzichte van Dijkstra. Je hoeft niet meer alle scenario’s helemaal door te lopen om de beste te vinden.” Hij ging tevreden naar huis. “Ik vind dat de wiskundigen goed werk hebben geleverd, zeker wanneer je bedenkt hoe weinig tijd ze hadden. Het was een productieve week.” Het werk zal ook niet verstoffen op de plank. Williams zegt de ideeën snel te willen testen en implementeren.

Lagers: stop de test?

Sébastien Blachère van lagerfabrikant SKF legde de Studiegroep Wiskunde met de Industrie een optimalisatievraag voor. Hij is op zoek naar de efficiëntste manier om lagers te testen. Wiskundige Martin Bootsma: “Het leek me een overzichtelijk probleem, tot we ermee aan de slag gingen.”

De Svenska Kullager Fabriken, SKF, is een grote leverancier van lagers en bijbehorende producten. Het bedrijf maakt lagers van minder dan een centimeter doorsnee, maar ook gigantische lagers voor windturbines en vliegtuigen. De grootste lager in het assortiment is 14 meter in doorsnee. Het Zweedse bedrijf heeft wereldwijd 47.000 medewerkers. In Nieuwegein staat een onderzoekscentrum van SKF.

In een grote hal in Nieuwegein staan talloze machines om de kwaliteit van de lagers te testen. Metaalmoeheid is de belangrijkste oorzaak voor het falen van een lager. “Lagers zijn net mensen. Hoe ouder ze zijn, hoe groter de kans dat ze stuk gaan”, zo vergelijkt Martin Bootsma (UU), een van de wiskundigen die met de vraag van SKF aan de slag ging. “Maar net als bij mensen, weet je van tevoren niet precies wanneer het ophoudt.”

Voor SKF een nieuw type lager op de markt brengt, doet het bedrijf kwaliteitstests om de verwachte levensduur van de lager te bepalen. Met die testen bepaalt het bedrijf de zogeheten L_{10} ; de tijd waarin 10 procent van de lagers stuk gaat. L_{10} wordt ook wel *basic life* genoemd. Het is een soort minimaal verwachte levensduur: de kans is immers 90 procent dat een lager het langer volhoudt. Daarnaast wil SKF graag de spreiding van de levensduur weten: gaan de lagers allemaal rond dezelfde tijd stuk, of varieert de levensduur aanzienlijk?

“Computersimulaties geven ons een eerste benadering van de verwachte levensduur”, vertelt Sébastien Blachère. Hij is senior onderzoeker in Nieuwegein. Hij analyseert testdata, en het is zijn taak om de beste teststrategie te bepalen. Na de computersimulaties komt het echte werk: de proef op de som komt van de testmachines. Op iedere machine worden twee identieke lagers gemonteerd.

De machines draaien de lagers rond en rond. Na verloop van tijd zal de eerste lager sneuvelen, en daarna volgen er meer.



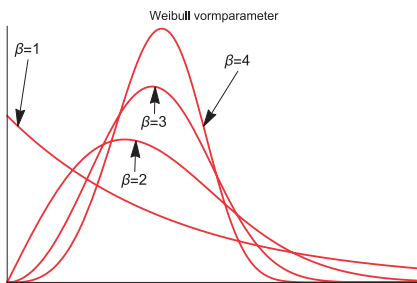
Testmachines voor lagers. Beeld: SKF

Nu gaan de lagers van SKF niet zomaar stuk. Blachère: “De testen duren al snel een paar maanden.” Het testen van de beste lagers kan zelfs wel een jaar duren. Dat maakt het testen prijzig. SKF wil de testen daarom efficiënt uitvoeren. Het bedrijf zou graag meer inzicht willen in de beste teststrategie.

Nu zijn er meerdere teststrategieën denkbaar. Zo kan een test na een vaste looptijd worden afgebroken. Een tweede strategie is om de test te stoppen, zodra een vooraf bepaald aantal lagers is versleten. Een derde strategie is een mix: de test wordt gestopt na een vaste looptijd, mits er dan een bepaald aantal lagers zijn stukgegaan. Welke strategie is de beste? En wat te doen als een lager stuk gaat? Op één machine zitten twee lagers, en die moeten ook van hetzelfde type zijn. Wanneer één lager kapot gaat, moet je dan een nieuwe monteren, zodat de ander door kan draaien? Of is het beter de machine te stoppen, zodat hij kan worden ingezet voor een andere test? SKF werkt zelf veel met simulaties, maar het zou graag meer algemeen inzicht willen in de beste ‘stopcriteria’ voor een test.

“De optimale teststrategie bepalen, dat leek me op het eerste gezicht een overzichtelijk probleem. Maar toen we aan de slag gingen, bleek het ingewikkelder dan gedacht”, zo blikt Bootsma terug. De wiskundigen begonnen natuurlijk zoals wiskundigen altijd beginnen: eerst maar eens kijken naar een versimpelde vorm van het probleem. “We dachten eerst aan drie machines met zes lagers”, vertelt Bootsma. “Maar dat bleek al behoorlijk ingewikkeld, vooral doordat er op één machine twee lagers zitten. Dus hebben we besloten om die koppeling voorlopig weg te laten. We keken eerst naar één type test op één type lager – zonder rekening te houden met het feit, dat er in werkelijkheid twee lagers per testmachine zijn.”

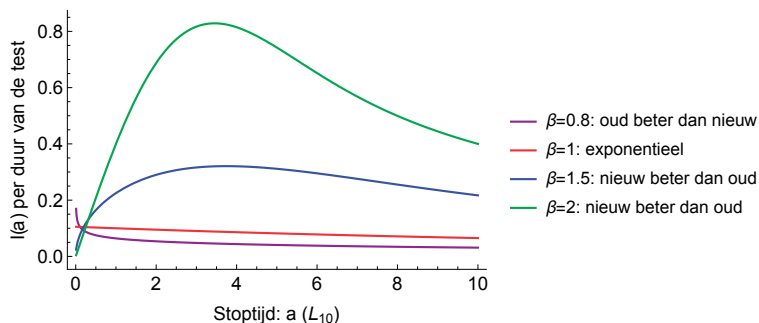
Het langer doorlopen van een test levert altijd extra informatie op – óók als er in de resterende testtijd geen lagers meer kapot gaan. “In eerste instantie denk je misschien dat alleen gesneuvelde lagers informatie geven. Maar het feit dat de lagers lang heel zijn gebleven, geeft je ook waardevolle informatie voor het bepalen van de verwachte levensduur”, zo vertelt Bootsma. SKF gebruikt voor het uitrekenen van *basic life* L_{10} de Weibullverdeling. De Weibullverdeling is een veelgebruikte manier om de levensduurverwachting van technische apparaten te modelleren. Hoe langer de testen lopen, hoe meer data er zijn om de verdeling zo nauwkeurig mogelijk vast te nagelen. “Lang laten lopen is voor het bepalen van je Weibullverdeling de beste strategie”, benadrukt Bootsma. “En als je moet kiezen, kun je beter een paar machines lang laten lopen, dan veel machines kort.”



De Weibullverdeling, model voor de levensduurverwachting van lagers, voor verschillende vormparameters β .

Maar SKF wil natuurlijk juist zo kort mogelijk testen. Machinetijd is kostbaar, de lagers moeten de markt op, en er staan meer tests in de wachtlijst. De kortst mogelijke testtijd, daar gaat het dus om. Om daar grip op te krijgen,

introduceerden de wiskundigen de Fisherinformatie. Fisherinformatie is een veelgebruikte methode in de statistiek om de hoeveelheid informatie te kwantificeren, die een test oplevert. “Eerst hebben we de Fisherinformatie bepaald voor verschillende typen tests. Je kan dan de extra informatie uitrekenen die het oplevert om de test niet na drie, maar na vier kapotte lagers te stoppen.” Om vervolgens de optimale stoptijd te kunnen berekenen, introduceerde de groep een nieuwe eenheid. De Fischerinformatie werd gedeeld door de looptijd. Bootsma: “Zo krijg je de hoeveelheid informatie die een test je gemiddeld per minuut oplevert.” Voor tests met een vooraf vastgestelde stoptijd loopt de informatie per tijdseenheid snel op tot ongeveer vier keer L_{10} . Iedere minuut die de test doorloopt, levert dus meer informatie op dan de minuut ervoor. Na vier keer L_{10} vlakkt dat af of daalt de informatie per minuut zelfs. De grafieken geven SKF houvast bij het bepalen van de optimale testtijd: het geeft een waarde aan het langer door laten lopen, die SKF vervolgens kan afwegen tegen de kosten. Blachère: “Met dit resultaat ben ik heel blij. Zo hadden wij het probleem nog niet benaderd.”



De Fisherinformatie voor een test met een vaste looptijd.

Behalve tests met een vaste looptijd, en tests die stoppen na een vast aantal kapotte lagers, doet SKF ook gemengde testen. Dat zijn de tests die na een vooraf vastgestelde tijd stoppen, mits er dan voldoende lagers gesneuveld zijn. Zijn er op de stoptijd nog te weinig lagers kapot, dan loopt de test door tot dat aantal wel is gehaald. “Het is moeilijk om analytisch de Fisherinformatie voor zo’n gemengde test uit te rekenen”, vertelt Bootsma. “Dat was dan ook het punt dat we begonnen zijn met Monte Carlo-simulaties.” Na de gezamenlijke start op dinsdag deelde de groep zich de rest van de week in tweeën: er stonden mensen voor het bord

na te denken over de grote ideeën en er zaten mensen achter de computer code te schrijven. “We zijn begonnen aan het schrijven van code voor verschillende stopcriteria. Die code zou het ook makkelijker moeten maken om complexe situaties uit te rekenen, bijvoorbeeld de beste strategie als je meerdere tests in de wachtrij hebt.”

Die simulaties waren nog niet af aan het eind van de week. “Ze kosten behoorlijk wat rekenkracht. We lieten de simulaties ’s nachts lopen, maar helaas hadden we maar twee nachten”, lacht Bootsma. De resultaten van de simulaties, die hij op vrijdag presenteerde, waren nog niet optimaal. “We hadden allemaal het gevoel dat dit met weinig extra werk beter moest kunnen, dus daar heeft een aantal mensen na de studiegroep nog wat verder aan gesleuteld. SKF zou daar een afstudeerproject van kunnen maken.”

Een ander idee van de wiskundigen is om in simulaties soms van de Weibullfunctie af te stappen. Bootsma: “De vorm van de Weibull wordt bepaald door de vormfactor, β . Dat is een maat voor de spreiding waarmee de lagers kapot gaan. Wanneer β groot is, piekt de Weibullverdeling heel sterk rond één waarde. Alle lagers gaan dan ongeveer tegelijkertijd stuk. Maar als β in de buurt van 1 zit, lijkt de Weibull sterk op een exponentieel afvallende functie. En omdat je daarmee makkelijker kan rekenen, adviseren we om de Weibullverdeling voor β in de buurt van 1 te benaderen met een exponentiële functie.” De studiegroep heeft dit idee niet meer uit kunnen werken, maar geeft Blachère dit idee als suggestie mee. Die zegt er zeker naar te gaan kijken.

Blachère was zelf de hele week in Utrecht aanwezig. Bootsma: “Dat was prettig. Het voorkomt dat we gingen rekenen aan dingen, die SKF niet interessant vindt. Wij hadden bijvoorbeeld een teststrategie bedacht, waarbij je tijdens de test lagers verplaatst. Als er twee lagers kapot zijn gegaan, zet je de overgebleven twee lagers samen op één machine. Maar Sébastien vertelde ons meteen dat je lagers tijdens een test niet opnieuw mag monteren, omdat de montage een grote factor is in de testresultaten.” Blachère zelf vond het een groot voordeel om met experts over zijn vraag te kunnen praten. “De wiskundigen in de groep hadden een brede kennis over statistische methoden. Ik heb er mensen ontmoet, met wie ik in de toekomst graag samen wil werken.”

