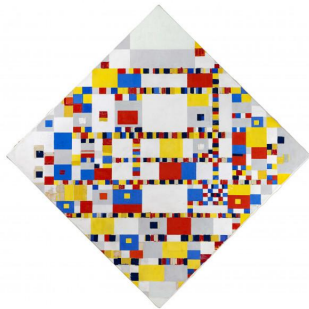


Wiskunde in Stijl: van Mondriaan tot matrix

Rob H. Bisseling

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Lunchlezing Imaginary, 8 februari 2017



Victory Boogie Woogie, 1944

Introductie

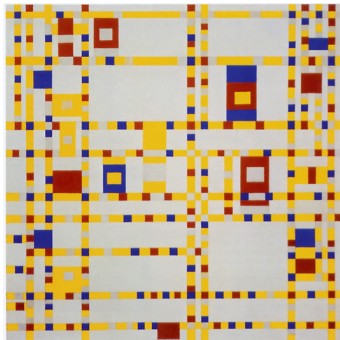
Parallel

Optimaal

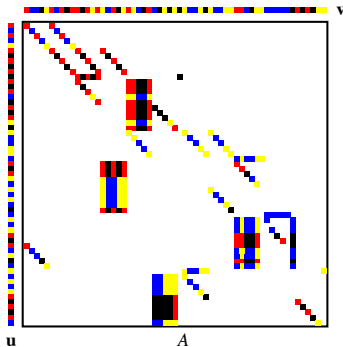


Universiteit Utrecht

Mondriaan, matrix en vector



Broadway Boogie Woogie
Piet Mondriaan, 1942-43



impcol_b (Imperial College)

59×59 **ijle matrix** A

3481 elementen:

- ▶ 3169 nullen
- ▶ 312 niet-nullen

u, v **vectoren** van lengte 59



Universiteit Utrecht

Introductie

Parallel

Optimaal

100 jaar De Stijl: 1917–2017



Gemeentehuis Den Haag, februari 2017

Foto: Jerry Lampen

- ▶ De Stijl is een Nederlandse kunstbeweging opgericht in 1917 en actief tot rond 1930.
- ▶ Prominente leden: schilders Piet Mondriaan en Theo van Doesburg, architect Gerrit Rietveld.

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Rietveld Schröderhuis, Utrecht



Foto: Ernst Moritz

- Woning van Truus Schröder en atelier/woning van Gerrit Rietveld, gebouwd in 1924.

Introductie

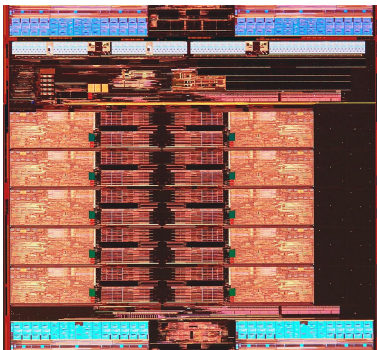
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Parallele computerarchitectuur



- ▶ Intel Core i7 6950X chip met 10 rekenkernen, uitgebracht in 2016.

Introductie

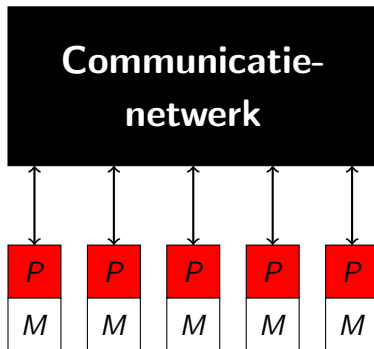
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Abstracte parallele computer



Introductie

Parallel

Optimaal

- ▶ Vereenvoudigde versie voor wiskundigen: Bulk-Synchroon Parallelle (BSP) computer.
- ▶ P = processor, M = geheugen (memory).
- ▶ Samen lossen de processoren een probleem op, liefst met **eerlijke werkverdeling** en **weinig communicatie**.



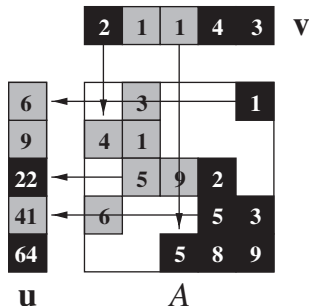
Universiteit Utrecht

Optimaal

- $$\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 22 \\ 41 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Universiteit Utrecht

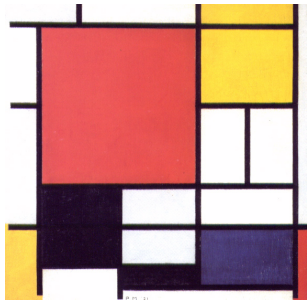
Parallele matrix-vector vermengvuldiging



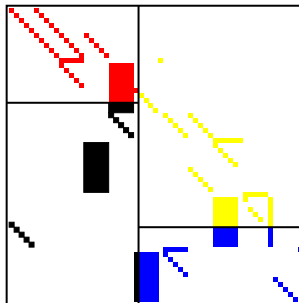
- ▶ 2 processoren: zwart en grijs.
- ▶ Voor het gemak: teken de input vector $\mathbf{v}$ boven de matrix.
- ▶ **Werkbalans**: zwart heeft 7 niet-nullen, grijs heeft er 6.
- ▶ 5 **communicaties** nodig. Kan het nog minder?



Mondriaan matrixverdeling



Compositie met rood,
geel, blauw en zwart
Piet Mondriaan, 1921



Blokverdeling van matrix
`impcol_b`, 4 processoren

- ▶ Mondriaanpakket versie 1.0 verschijnt in mei 2002, ontwikkeld door Brendan Vastenhouw en Rob Bisseling.
- ▶ Publiek-domein software voor het **partitioneren** van ijle matrices voor parallele berekeningen.



Verdeel eerlijk over 4 processoren en heers

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Matrix 1ns_3937, Navier–Stokes, vloeistofstroming

Introductie

Parallel

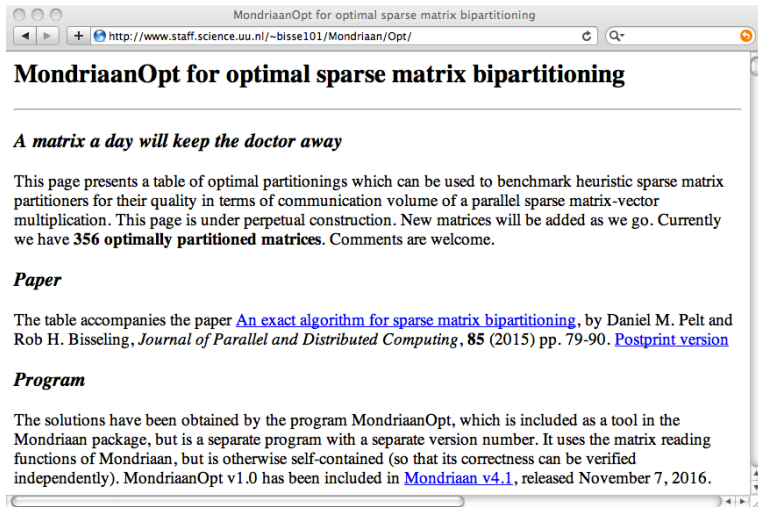
Optimaal

Filmpje gemaakt met MondriaanMovie
(Bas Fagginger Auer 2009)



Universiteit Utrecht

Collectie van optimal matrixverdelingen



MondriaanOpt for optimal sparse matrix bipartitioning

http://www.staff.science.uu.nl/~bisse101/Mondriaan/Opt/

MondriaanOpt for optimal sparse matrix bipartitioning

A matrix a day will keep the doctor away

This page presents a table of optimal partitionings which can be used to benchmark heuristic sparse matrix partitioners for their quality in terms of communication volume of a parallel sparse matrix-vector multiplication. This page is under perpetual construction. New matrices will be added as we go. Currently we have **356 optimally partitioned matrices**. Comments are welcome.

Paper

The table accompanies the paper [An exact algorithm for sparse matrix bipartitioning](#), by Daniel M. Pelt and Rob H. Bisseling, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **85** (2015) pp. 79-90. [Postprint version](#)

Program

The solutions have been obtained by the program MondriaanOpt, which is included as a tool in the Mondriaan package, but is a separate program with a separate version number. It uses the matrix reading functions of Mondriaan, but is otherwise self-contained (so that its correctness can be verified independently). MondriaanOpt v1.0 has been included in [Mondriaan v4.1](#), released November 7, 2016.

Introductie

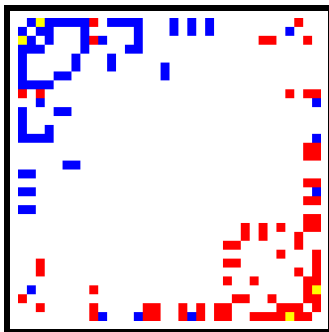
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

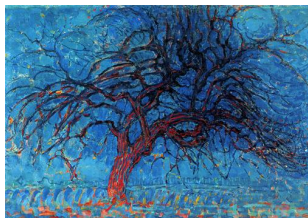
De karateclub van Zachary uit 1977



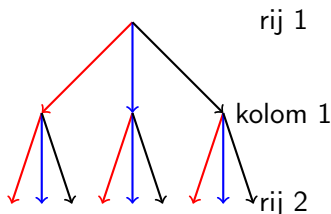
- ▶ 34×34 matrix karate met 156 niet-nullen.
- ▶ $a_{ij} \neq 0$: persoon i ontmoet persoon j ook buiten de club.
- ▶ 2 processoren: rood en blauw.
- ▶ 8 communicaties nodig. Geel betekent: rood of blauw maakt niet uit voor communicatie.



Algoritme voor optimale partitionering



Avond: de rode boom
Piet Mondriaan, 1908
vóór De Stijl



Ternaire zoekboom

- ▶ *Branch-and-bound* methode: construeer een zoekboom met alle mogelijke oplossingen.
- ▶ Elke knoop in de boom heeft 3 takken (*branch*), met een keus voor een matrixrij of -kolom:
 - helemaal toegekend aan de **rode processor**,
 - helemaal toegekend aan de **blauwe processor**,
 - gesplitst, met communicatie.
- ▶ De groei van de boom wordt beperkt (*bound*).

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Snoeimethode: onvermijdbare splitsing

$\hat{B}$	0	1	-	-	-
c	red	blue	white	white	gray
0	white	white	red	red	red
-	red	blue	gray	gray	white
-	white	blue	white	gray	white
-	red	blue	white	gray	gray

- ▶ Kolom 1 en rij 2 zijn **rood** gekleurd en kolom 2 **blauw**.
- ▶ Rij 1 was gesplitst (*cut*).
- ▶ We weten nu al dat er in totaal minstens 3 communicaties nodig zijn: rijen 3 en 5 moeten ook gesplitst worden.

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Eerlijke werkverdeling

- ▶ Oplossing zonder communicatie: **kleur alles rood!**
- ▶ *No pain, no gain*: dan ook geen winst uit parallelisme.
- ▶ We moeten een eis aan de werkverdeling opleggen:

$$nz(\text{rood}), nz(\text{blauw}) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{nz(A)}{2},$$

waarbij nz het aantal niet-nullen (*nonzeros*) is.

- ▶ ε is de Griekse letter epsilon, die in de wiskunde staat voor 'een klein ding'. Wij eisen vaak $\varepsilon = 3\%$.
- ▶ De beroemde wiskundige Paul Erdős (1913–1996) had een eigen terminologie: kinderen waren *epsilons*, vrouwen *bosses* en mannen *slaves*.



Nog meer snoeien, als een Sudoku

$\hat{B}$	0	1	-	-	-
c					
0					
-					
-					
-					

- ▶ Totaal 16 niet-nullen. Bij $\varepsilon = 3\%$ mag **rood** maximaal 8.24 niet-nullen hebben, dus maximaal 8.
- ▶ **Rood** heeft er al 6, dus kolom 4 moet ook gesplitst worden.
- ▶ Er zijn dus minstens 4 communicaties nodig.
- ▶ Als we al een oplossing met slechts 4 communicaties hebben, kunnen we stoppen met zoeken in dit deel van de zoekboom.

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Optimale verdeling

B	c	c	1	c	0
0					
c					
1					
1					
0					

- ▶ Werk is perfect verdeeld.
- ▶ 4 communicaties nodig.

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Conflict tussen rij en kolom

	$\hat{B}_0$	$\hat{B}_1$	$\hat{B}_c$	P_0	P_1	I_c	–
$\hat{B}_0$				  			
$\hat{B}_1$							
$\hat{B}_c$				  			
P_0							
P_1				  			
I_c	 	 		  			
–							

- ▶ De rijen en kolommen zijn in categorieën ingedeeld, o.a:
 - P_0 : gedeeltelijk (partiël) toegekend aan **rood**,
 - P_1 : gedeeltelijk toegekend aan **blauw**.
- ▶ We hebben een conflict voor de niet-nul in rijcategorie P_1 en kolomcategorie P_0 : ofwel zijn rij ofwel zijn kolom moet gesplitst worden.
- ▶ We hebben dus minstens 1 communicatie.

Introductie

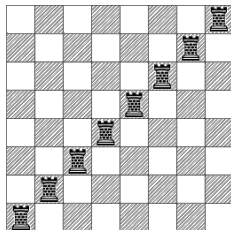
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Conflicten als torens op een schaakbord



Bron: Wolfram MathWorld

- ▶ Probeer torens in de conflictzone te plaatsen, maximaal 1 toren per rij en 1 per kolom, en alleen op de plaats van een niet-nul.
- ▶ Elke toren levert 1 communicatie op.
- ▶ Dit heet ook wel een **matchingprobleem**: je matcht rijen met kolommen.

Introductie

Parallel

Optimaal



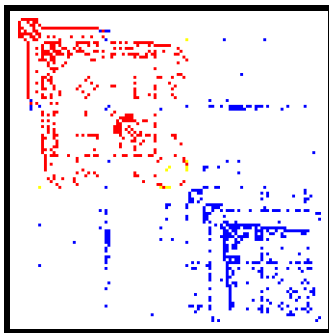
Universiteit Utrecht

De galerij van optimale matrixverdelingen groeit

MondriaanOpt for optimal sparse matrix bipartitioning											
http://www.staff.science.uu.nl/~bisse101/Mondriaan/Opt/										mondriaanopt	
Name	Rows	Columns	Nonzeros	Volume	Imbalance	Solution	Date	Version	Time	Picture	
Trec3	1	2	1	0	1	solution	24-06-2015	1.0β	second		
Trec4	2	3	3	1	1	solution	24-06-2015	1.0β	second		
GL7d10	1	60	8	1	0	solution	04-08-2015	1.0β	second		
Trec5	3	7	12	2	0	solution	06-08-2015	1.0β	second		
bl_ss	7	7	15	3	1	solution	23-06-2015	1.0β	second		
rel3	12	5	18	3	0	solution	23-06-2015	1.0β	second		
ch3-3-b2	6	18	18	0	0	solution	15-12-2015	1.0β	second		
cage3	5	5	19	4	1	solution	19-06-2015	1.0β	second		
lpi_galenet	8	14	22	2	0	solution	10-08-2015	1.0β	second		



Matrixgalerij: polbooks



- ▶ Political books in the USA (2001). A divided, great country.
- ▶ 105×105 matrix met 882 niet-nullen.
- ▶ Perfecte balans: $\varepsilon = 0\%$. 18 communicaties.
- ▶ $a_{ij} \neq 0$: klanten die boek i kochten bij Amazon, kochten ook boek j
- ▶ **Rode boeken** zijn liberaal of soms neutraal, **blauwe boeken** conservatief of neutraal.

Introductie

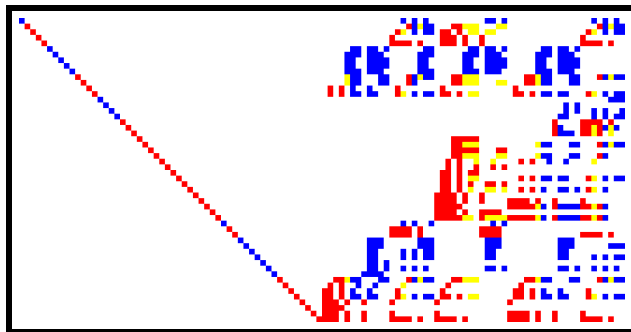
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Matrixgalerij: lpi_klein1



- ▶ Lineair Programmeringsprobleem.
- ▶ 54×108 matrix met 750 niet-nullen.
- ▶ Perfecte balans: $\varepsilon = 0\%$. 33 communicaties.

Introductie

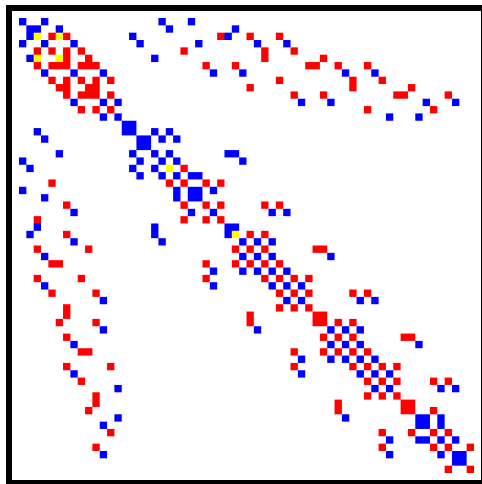
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Matrixgalerij: bwfb62



- ▶ Elektromagnetisch probleem.
- ▶ 62×62 matrix met 342 niet-nullen.
- ▶ Onbalans is $\varepsilon = 0,6\%$. 8 communicaties.

Introductie

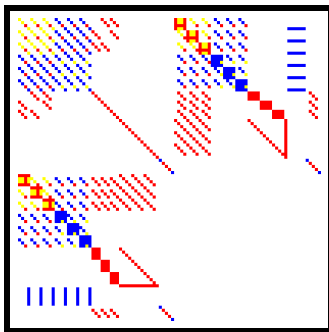
Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht

Tot slot

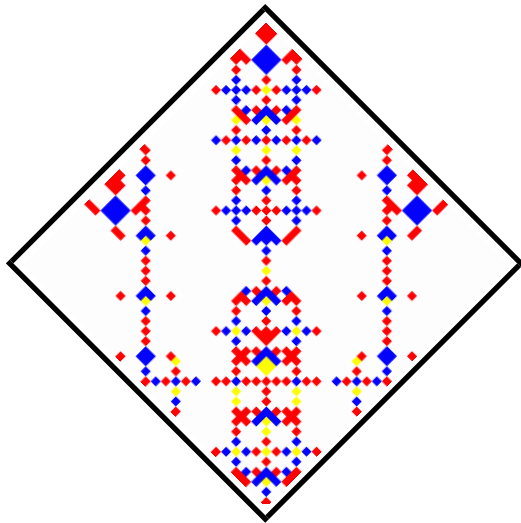


Matrix spaceStation_1

- ▶ **Parallel rekenen** is overal, op laptop en desktop, en leidt tot uitdagende verdelingsproblemen.
- ▶ Het Utrechtse **Mondriaanpakket** vindt optimale oplossingen voor kleine problemen en goede oplossingen voor zeer grote problemen.
- ▶ **Lineaire algebra** leidt tot mooie abstracte kunst.



Dank u!



Matrix bcsstk01

Introductie

Parallel

Optimaal



Universiteit Utrecht