Théorie des nombres/*Number Theory*

Sur les zéros des séries d'Eisenstein de poids q^k-1 pour $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$

Gunther CORNELISSEN

Résumé – Si x est un zéro d'une série d'Eisenstein de poids $q^k - 1$, $k > 0$ pour $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$ dans le demi-plan de Drinfeld, on démontre que son invariant $j(x)$ est de degré q, ou est nul. On peut par suite normaliser x, de telle sorte que son degré soit 0. On obtient que x est elliptique ou transcendant sur $\mathbf{F}_q(T)$, et tous les zéros x sont simples.

On the zeroes of Eisenstein series of weight $q^k - 1$ for $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$

Abstract – *If x is a zero of an Eisenstein series of weight $q^k - 1$, $k > 0$ for $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$ in the Drinfeld upper half plane, we show that its invariant $j(x)$ has degree q, or is zero. One can then normalize x such that its degree is 0. We find that x is elliptic or transcendental over $\mathbf{F}_q(T)$, and all zeroes x are simple.*

1. INTRODUCTION. – Soit $|\,.\,|$ la valeur absolue sur $K = \mathbf{F}_q(T)$, le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans le corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments, déterminée par $|a| = q^{\deg a}$ pour $a \in A = \mathbf{F}_q[T]$. Soient K_∞ et C, le complété de K pour $|\,.\,|$, et le complété d'une clôture algébrique de K_∞. On note encore $|\,.\,|$ l'unique extension de $|\,.\,|$ à C. Soit $\Omega = C - K_\infty$ le « demi-plan » de Drinfeld, qui est muni d'une structure d'espace analytique rigide, *cf.* [2]. Le groupe $\Gamma = GL_2(A)$ agit sur Ω par transformations homographiques. On dit qu'un point $e \in \Omega$ est *elliptique* si son stabilisateur Γ_e dans Γ est $\neq \mathbf{F}_q^*$. Par [5], V.4.5, les points elliptiques constituent une seule Γ-orbite $\mathcal{E}$. Pour $z \in \Omega$, on pose $|z|_A = \inf_{a \in A} |z - a|$. On a alors aisément :

LEMME. – *Chaque $z \in \Omega$ est Γ-équivalent à un point de $\mathfrak{F} := \{ z \in \Omega : |z| = |z|_A \geqq 1 \}$.*

Démonstration. – *Voir* [10], th. 13, en utilisant les propriétés de $|z|_i$ dans [5], V.1.2. □

On pourrait définir le « bord » de $\mathfrak{F}$ par $\partial \mathfrak{F} = \{ z \in \mathfrak{F} : \exists b \neq 0 : |z|_A = |z - b|$ ou $|z| = 1 \}$, puis voir que si deux points de $\mathfrak{F}$ sont $PGL_2(A)$-équivalents, ils se trouvent sur $\partial\mathfrak{F}$.

De l'action de Γ provient une théorie de *formes modulaires*, comme expliqué dans [3], [5] et [7]. Notons : si une forme modulaire f a un zéro d'ordre $n = \mathrm{ord}_x f$ en un point $x \in \Omega$, f a un zéro d'ordre n en tous les points de la Γ-orbite de x. La *série d'Eisenstein*

$$E_k(z) = \sum_{\substack{a,\, b \in A \\ (a,\, b) \neq (0,\, 0)}} (az + b)^{-k}$$

est une forme modulaire de poids k pour Γ. Soit $\phi_T^{\Lambda_x} = T + g(x)\tau + \Delta(x)\tau^2 \in C\{\tau\}$ le *A-module de Drinfeld* de rang 2 sur C associé au réseau $\Lambda_x = xA \oplus A$, alors g et Δ sont des formes modulaires de la variable $x \in \Omega$, de poids $q - 1$, resp. $q^2 - 1$. En outre, g et Δ sont des générateurs pour l'algèbre des formes modulaires pour Γ [7]. En particulier, si l'on note $[i] = T^{q^i} - T$, et on pose formellement $E_0 = -1$, on a (*voir* [5], II.2.11)

$$(1) \qquad [1]E_{q-1} = g \quad \text{et} \quad -[k]E_{q^k-1} = g^{q^{k-1}} E_{q^{k-1}-1} + \Delta^{q^{k-2}} E_{q^{k-2}-1} \quad \text{pour } k > 1.$$

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/95/03210817 $ 2.00 © Académie des Sciences

L'invariant j donne un isomorphisme (analytique)

$$j\ :\quad \Gamma\backslash\Omega \to C\ :\ x \mapsto g^{q+1}(x)/\Delta(x) \tag{2}$$

de C avec l'espace des orbites $\Gamma\backslash\Omega$, qui est l'espace modulaire des A-modules de Drinfeld de rang 2 sur C, et des A-réseaux de rang 2 dans C. Sa compactification se fait par adjonction d'un seul point ∞.

Cette théorie est analogue au cas de $SL_2(\mathbf{Z})$ agissant sur le demi-plan $\mathfrak{H}$ de Poincaré, dont chaque point est $SL_2(\mathbf{Z})$-équivalent à un point dans $D = \{z \in \mathfrak{H} : |\mathrm{Re}(z)| \leqq 1/2$ et $|z| \geqq \mathbf{1}\}$. Dans [9], Rankin et Swinnerton-Dyer ont démontré que les zéros $x \in D$ des séries d'Eisenstein pour $SL_2(\mathbf{Z})$ satisfont $|x| = 1$. Dans le cas de $GL_2(\mathbf{F}_q[T])$, notre résultat principal (théorème 2) implique pareille conséquence (théorème 3).

2. L'invariant j des zéros et les invariants supersinguliers.

THÉORÈME 1. – *La série E_{q^k-1} s'annule aux points $e \in \mathcal{E}$ si et seulement si k est impair, et ces zéros sont simples. La suite de polynômes $k \mapsto \phi_k(j) \in A[j]$ définie par les relations de récurrence $\phi_0(j) = \phi_1(j) = 1$, et pour $k > 1$*

$$\phi_k(j) = j^{d(k)}\,\phi_{k-1}(j) - [k-1]\,\phi_{k-2}(j), \qquad où \quad d(k) = \frac{q^{k-1} + (-1)^k}{q+1}, \tag{3}$$

est telle que $x \in \Omega\backslash\mathcal{E}$ est un zéro de E_{q^k-1} si et seulement si $j(x)$ est un zéro de ϕ_k.

Démonstration. – Soit $x \in \Omega$ tel que $g(x) = 0$, on a alors $j(x) = 0$, d'après la définition de j (remarquons que Δ, comme coefficient principal d'un module de Drinfeld, ne s'annule pas dans Ω). Mais d'après (2) on a $j(x) = 0$ pour un seul x (modulo Γ). L'invariant $j(x) = 0$ correspond au module de Drinfeld $\phi_T = T + \tau^2$, dont le groupe d'automorphismes est $\mathrm{Aut}(\phi_T) \cong \mathbf{F}_{q^2}^*$. On a $\Gamma_x \cong \mathrm{Aut}(\Lambda_x) = \{c \in C : c\Lambda_x = \Lambda_x\}$ et en outre $\mathrm{Aut}(\Lambda_x) \cong \mathrm{Aut}(\phi_T^{\Lambda_x})$ ([4], (2.4)). Donc $\Gamma_x \cong \mathbf{F}_{q^2}^*$, et $x \in \mathcal{E}$.

Si k est impair, toute forme f de poids $q^k - 1$ s'annule aux points $e \in \mathcal{E}$; en effet soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_e$ un élément non-trivial ($c \neq 0$), alors $f(e) = f(\gamma.e) = (ce+d)^{q^k-1} f(e)$. Si $(ce+d)^{q^k-1} = 1$, on aurait $e \in \mathbf{F}_{q^k} \otimes K$, ce qui ($k$ impair) contredit $e \in \mathbf{F}_{q^2} \otimes K$ ([5], V.4). Donc $f(e) = 0$. La simplicité du zéro est une généralisation immédiate de [5], VII.3.3. Soit $L_k = \prod_{i \leq k} [i]$. On pose

$$\Phi_k = \begin{cases} -\,L_k\,E_{q^k-1}\,\Delta^{-(q^k-1)/(q^2-1)} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ L_k\,E_{q^k-1}\,g^{-1}\,\Delta^{-q(q^{k-1}-1)/(q^2-1)} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

La forme Φ_k est de poids 0, donc appartient au corps des fonctions $C(j)$ de $\Gamma\backslash\Omega \cup \{\infty\}$. En utilisant (1), on obtient que Φ_k, *comme fonction rationnelle en j*, satisfait (3), donc est le polynôme $\phi_k(j)$. Pour $x \in \Omega$, $\Delta(x) \neq 0$, et on a $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{E}$. Donc $\mathrm{ord}_x E_{q^k-1} = \mathrm{ord}_x \Phi_k = \mathrm{ord}_{j(x)} \phi_k$ pour tout $x \in \Omega$ si k est pair, et pour tout $x \in \Omega - \mathcal{E}$ si k est impair [on utilise (2) pour la deuxième égalité]. Il reste à démontrer que, pour k pair et $e \in \mathcal{E}$, on a $E_{q^k-1}(e) \neq 0$. Mais ceci est équivalent à $\phi_k(0) \neq 0$, ce qui est clair par récurrence sur k. □

Dans [6], (12.2), Gekeler a considéré le polynôme $A_k \in A[g, \Delta]$ défini par $E_{q^k-1} = A_k(g, \Delta)$, dont notre ϕ_k est une version deshomogénéisée. Le résultat (12.3) de [6] se traduit comme suit : *Soit $P \in A$ un élément premier de A de degré k. La réduction de ϕ_k modulo P a comme zéros les invariants supersinguliers non-nuls des A-modules de*

Drinfeld en caractéristique P; autrement dit les ϕ_k sont des relèvements des polynômes de Deuring H, *voir* [4], (5). Comme le polynôme réduit de H modulo P n'a pas de zéros multiples ([6], (11.7), (12.3)), on a le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. – *Les zéros de* E_{q^k-1} *sont simples; en particulier le nombre de* Γ-*orbites* $\neq \mathcal{E}$ *où* E_{q^k-1} *s'annule est égal à* $\deg(\phi_k)$. □

THÉORÈME 2. – *Si* $E_{q^k-1}(x) = 0$ *pour* $x \in \Omega$, *on a* $x \in \mathcal{E}$ *ou* $|j(x)| = q^q$.

Démonstration. – Supposons $E_{q^k-1}(x) = 0$ mais $x \notin \mathcal{E}$. Soit

$$\phi_k(j) = \sum_{i=0}^{\deg(\phi_k)} c_i^{(k)} j^{\deg(\phi_k)-i}.$$

On va démontrer par récurrence que $|c_i^{(k)}| = q^{qi}$ pour tout $k > 1$. Le résultat est clair pour $k = 2, 3$. Supposons que ce soit vrai pour $k < l$. On a

$$(q^2 - 1)\deg(\phi_l) = \begin{cases} q^l - 1 & \text{si } l \text{ est pair} \\ q^l - q & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases} \tag{4}$$

et donc $d(l) > \deg(\phi_{l-2})$. Donc par la formule (3)

$$c_i^{(l)} = \begin{cases} c_i^{(l-1)} & \text{pour} \quad i < \deg(\phi_{l-2}) \\ -[l-1]\, c^{(l-2)}_{\deg(\phi_{l-2})-\deg(\phi_l)+i} & \text{pour} \quad i \geqq \deg(\phi_{l-2}) \end{cases}$$

Mais $\deg(\phi_{l-2}) - \deg(\phi_l) = -q^{l-2}$, d'où le résultat. Le polygone de Newton de ϕ_k est donc une droite de coefficient angulaire q, et on conclut que tous les zéros j_0 de ϕ_k satisfont $|j_0| = q^q$ (*voir* ex. [8], IV.3). Comme les points elliptiques ont un invariant nul, le résultat découle du théorème 1. □

COROLLAIRE 2. – *Pour* q *impair, les zéros de* E_{q^k-1} *dans* Ω *sont transcendants sur* K, *ou elliptiques.*

Démonstration. – Si $E_{q^k-1}(x) = 0$, $j(x)$ est algébrique d'après le théorème 1. Si x n'est pas transcendant sur K, il est de degré 2 sur K ([11], th. 5.6). Donc Λ_x est à multiplication complexe. On peut supposer $|x| \geqq 1$ par le lemme. Un calcul utilisant les résultats de [1], (2.8.2) montre que $|j(x)| \neq q^q$ pour q impair et, d'après le théorème 2, x est elliptique. □

3. NORMALISATION DES ZÉROS.

THÉORÈME 3. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *comme dans le lemme. Si* $x \in \mathfrak{F}$ *est un zéro de* E_{q^k-1}, *on a* $|x| = 1$.

Démonstration. – Soit $E_{q^k-1}(x) = 0$ et $x \in \mathfrak{F}$, donc $|x| = |x|_A \geqq 1$. Si d'abord $x \in \mathcal{E} \cap \mathfrak{F}$, on a $j(x) = 0$ et $|x|_A > q^{-1}$, et donc $|x| = 1$, par [1], (2.6.10). Sinon, $|j(x)| = q^q$ par le théorème 2. Soit $s(z)$ une uniformisante de $\Gamma\backslash\Omega \cup \{\infty\}$ au point ∞ [normalisée par $s(z) = t(z)^{q-1}$, où $t(z)$ est comme dans [1], (2.5.7)]. Si $|s(x)| < q^{-q}$, et comme $|x|_A > q^{-1}$, on aurait ([1], (2.6.11)) que $|j(x)| = |s(x)|^{-1} > q^q$; une contradiction. Soit n le plus petit entier $\geqq \log_q|x| \geqq 0$. On a

$$q^{-q} \leqq |s(x)| = q^{-q^{n+1}+nq^n(q-1)}|x|^{-q^n(q-1)}. \tag{5}$$

L'égalité dans (5) résulte de [1], (2.6.3). En prenant le $\log_q$ de l'inégalité (5), et en utilisant $n - 1 < \log_q|x|$, on trouve que $q^{n-1} < 1$, donc $n = 0$, c'est-à-dire $|x| = 1$. □

Ce théorème nous permet de donner une autre démonstration du corollaire 1.

Autre démonstration du corollaire 1. – Soit $E_{q^k-1}(x) = 0$, et supposons $|x| = |x|_A = 1$ (*cf.* théorème 3). On a

$$|u + vx| = \max\{\,|u|,\ |v|\,\} \qquad \text{si} \quad u,\, v \in K. \tag{6}$$

En effet, on peut supposer que $v = 1$. Supposons que $|u| = |x| = 1$ mais $|u + x| < 1$. Comme le corps résiduel de K_∞ est $\mathbf{F}_q$, on peut trouver $u' \in \mathbf{F}_q$ tel que $|u - u'| < 1$, donc $|x|_A \leqq |u' + x| \leqq \max\{\,|u - u'|,\ |u + x|\,\} < 1$, une contradiction. La formule (6) nous permet alors de reprendre la démonstration de [5], VII.3.3. □

On peut se demander si le théorème 2 reste valable pour les séries d'Eisenstein de poids quelconque. Notons que le corollaire 1 peut être en défaut; par exemple $E_{q(q-1)} = E_{q-1}^q$.

L'auteur est aspirant du NFWO-FNRS belge.

Note remise le 28 avril 1995, acceptée après révision le 9 août 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. L. BROWN, Singular moduli and supersingular moduli of Drinfeld modules, *Invent. Math.*, 110, 1992, p. 419-439.

[2] P. DELIGNE et D. HUSEMÖLLER, Survey of Drinfeld modules, *Contemp. Math.*, 67, 1987, p. 25-91.

[3] V. G. DRINFELD, Elliptic modules, *Math. USSR Sb.*, 23, 4, 1976, p. 561-592, en russe = *Mat. Sb.*, 94, 1974, p. 594-627.

[4] E.-U. GEKELER, Zur Arithmetik von Drinfeld-Moduln, *Math. Ann.*, 262, 1983, p. 167-182.

[5] E.-U. GEKELER, *Drinfeld modular curves*, Lecture Notes in Math., 1231, Springer, 1986.

[6] E.-U. GEKELER, On the coefficients of Drinfeld modular forms, *Invent. Math.*, 93, 1988, p. 667-700.

[7] D. GOSS, Modular forms for $F_r[T]$, *J. Reine Angew. Math.*, 31, 1980, p. 16-39.

[8] N. KOBLITZ, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Graduate Text in Math., 58, Springer, 1977.

[9] F. K. C. RANKIN et H. P. F. SWINNERTON-DYER, On the zeroes of Eisenstein series, *Bull. London Math. Soc.*, 2, 1970, p. 169-170.

[10] B. SCHOENEBERG, *Elliptic modular functions*, Grundlehren Math. Wiss., 203, Springer, 1974.

[11] J. YU, Transcendence and Drinfeld modules, *Invent. Math.*, 83, 1986, p. 507-517.

Université de Gand, Département de Mathématiques Pures et Algèbre Computationelle, Galglaan 2, 9000 Gand, Belgique.