

# **GEOFYSISCHIE STROMINGSLEER**



**A.J. VAN DELDEN**

INSTITUUT VOOR MARIEN EN ATMOSFERISCH ONDERZOEK  
UNIVERSITEIT UTRECHT  
PRINCETONPLEIN 5  
3584 CC UTRECHT  
THE NETHERLANDS  
[a.j.vandelden@phys.uu.nl](mailto:a.j.vandelden@phys.uu.nl)



APRIL 2003



| Inhoud                                                                                  | blz. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <hr/>                                                                                   |      |
| 0. Inleiding                                                                            | 5    |
| 1. Eigenschappen van geofysische vloeistoffen                                           | 8    |
| 1.1 De atmosfeer                                                                        |      |
| 1.2 De oceanen                                                                          |      |
| 1.3 De cryosfeer                                                                        |      |
| 1.4 De aarde                                                                            |      |
| 1.5 Mechanica: massa en kracht                                                          |      |
| 1.6 Thermodynamica: druk, temperatuur en volume                                         |      |
| 1.7 Elasticiteit                                                                        |      |
| 1.8 Stijfheid                                                                           |      |
| 1.9 Compressie golven                                                                   |      |
| 1.10 Afschuivingsgolven                                                                 |      |
| 1.11 Weerstand tegen spanningen in vloeistoffen (viscositeit)                           |      |
| 1.12 Specifieke warmte en warmtegeleiding                                               |      |
| 2. Beschrijving van de stroming                                                         | 24   |
| 2.1 Stroomlijnen en trajectoriën                                                        |      |
| 2.2 Materiële en lokale afgeleiden                                                      |      |
| 2.3 Natuurlijke coördinaten en relatie tussen trajectoriën en stroomlijnen              |      |
| 2.4 Versnelling in een roterend systeem                                                 |      |
| 2.5 Bolcoördinaten                                                                      |      |
| 3. Beweging                                                                             | 29   |
| 3.1 Inwendige en uitwendige krachten                                                    |      |
| 3.2 Bewegingsvergelijkingen                                                             |      |
| 3.3 Quasi-horizontale bewegingen in de atmosfeer en de oceaan                           |      |
| 3.4 Rossbygetal                                                                         |      |
| 3.5 Corioliskracht en inertiaalbeweging                                                 |      |
| 3.6 Reynoldsgetal                                                                       |      |
| 4. Massa                                                                                | 35   |
| 4.1 Continuïteitsvergelijking                                                           |      |
| 4.2 Geluidsgolven                                                                       |      |
| 5. Energie                                                                              | 39   |
| 5.1 Mechanische energie                                                                 |      |
| 5.2 De eerste hoofdwet van de thermodynamica                                            |      |
| 5.3 Adiabatisch temperatuurprofiel                                                      |      |
| 5.4 Potentiële temperatuur                                                              |      |
| 5.5 Faseovergangen en de Clausius-Clapeyronvergelijking                                 |      |
| 5.6 De "nat-adiabaat"                                                                   |      |
| 6. Evenwichtstoestanden                                                                 | 49   |
| 6.1 Geldigheid hydrostatische vergelijking voor bewegingen in de oceaan en de atmosfeer |      |
| 6.2 Drukcoördinaten                                                                     |      |
| 6.3 Het geostrofische evenwicht                                                         |      |
| 6.4 Thermisch wind evenwicht                                                            |      |
| 6.5 Het gradient wind evenwicht                                                         |      |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7. Stabiliteitsanalyse</b>                                                    | <b>54</b>  |
| 7.1 Hydrostatische onstabieleit                                                  |            |
| 7.2 Hydrostatische onstabieleit in de atmosfeer                                  |            |
| 7.3 Hydrostatische onstabieleit in de aarde                                      |            |
| 7.4 Kelvin-Helmholtz onstabieleit                                                |            |
| 7.5 Inertiaal oscillaties in een zonale stroming en behoud van impuls            |            |
| 7.6 Stabieleit van het geostrofisch evenwicht                                    |            |
| 7.7 Stabieleit van het gradient wind evenwicht                                   |            |
| <b>8. Circulatie, vorticeit en divergentie</b>                                   | <b>64</b>  |
| 8.1 Divergentie en vorticeit                                                     |            |
| 8.2 Circulatie                                                                   |            |
| 8.3 Vorticeitsvergelijking                                                       |            |
| 8.4 De vertikale component van de vorticeitsvergelijking                         |            |
| <b>9. Vrije Golven in niet visceuze vloeistoffen</b>                             | <b>69</b>  |
| 9.1 Inleiding                                                                    |            |
| 9.2 Golven in ondiep water                                                       |            |
| 9.3 Het effect van rotatie op zwaartekrachtsgolven ( $f=\text{constant}$ )       |            |
| 9.4 Potentiele vorticeitsvergelijking in ondiep water ( $f\neq\text{constant}$ ) |            |
| 9.5 Quasi-geostrofische benadering en Rossby golven                              |            |
| 9.6 Massa-divergentie in Rossby golven in de atmosfeer                           |            |
| 9.7 Depressie-vorming                                                            |            |
| <b>10. Aanpassing aan geostroof evenwicht</b>                                    | <b>79</b>  |
| 10.1 Probleemstelling                                                            |            |
| 10.2 Energie-huishouding van het aanpassingsproces                               |            |
| 10.3 Waarom is er geostrofisch evenwicht?                                        |            |
| <b>11. Effecten van randen en forcering op golven</b>                            | <b>83</b>  |
| 11.1 Golven in een kanaal (Kelvin golven en getijden)                            |            |
| 11.2 Stormvloeden                                                                |            |
| 11.3 Topografische Rossby golven ("continental shelf waves")                     |            |
| <b>12. Potentiële Vorticeit</b>                                                  | <b>91</b>  |
| 12.1 Inleiding                                                                   |            |
| 12.2 Ertel's theorema                                                            |            |
| <b>13. Barocliene onstabieleit</b>                                               | <b>94</b>  |
| 13.1 Inleiding                                                                   |            |
| 13.2 Het thermisch wind evenwicht                                                |            |
| 13.3 Barocliene onstabieleit                                                     |            |
| 13.4 Interpretatie van het stabieleits criterium                                 |            |
| 13.5 Baroclien onstabiele bewegingen in depressies                               |            |
| <b>14. Turbulentie</b>                                                           | <b>100</b> |
| 14.1 Reynoldsgetal                                                               |            |
| 14.2 Reynoldsvergelijkingen                                                      |            |
| 14.3 Gradienthypothese                                                           |            |
| 14.4 Menglengte                                                                  |            |

|                                          |            |
|------------------------------------------|------------|
| <u>15. Grenslagen in roterende media</u> | <u>104</u> |
| 15.1 Oppervlaktelaag                     |            |
| 15.2 Ekmanlaag                           |            |
| 15.3 Ekmanspiraal                        |            |
| 15.4 Ekmanzuiging                        |            |
| Appendix A                               | 109        |
| Referenties                              | 110        |

# 0

## INLEIDING

---

De geofysische stromingsleer houdt zich in principe bezig met alle in de natuur voorkomende vloeistofstromingen. De nadruk zal in dit diktaat liggen bij stromingspatronen in de oceaan en de atmosfeer, al zal de zeer trage stroming van gesteente in het inwendige van de aarde en de stroming van ijsmassa's niet onbesproken blijven.

De karakteristieke effecten in een vloeistofstroming waar de geofysische stromingsleer zich op richt, zijn de effecten van elasticiteit, gelaagdheid, rotatie, viscositeit en turbulentie.

Ruimtelijke verschillen in de warmtebronnen, zoals de straling afkomstig van de zon, geven aanleiding tot gelaagdheid (temperatuurverschillen of dichtheidsverschillen) en, vanwege de zwaartekracht, drukverschillen. Deze drukverschillen zijn verantwoordelijk voor de bewegingen van de atmosfeer en van de oceaan. De beweging van de atmosfeer drijft de beweging van de oceaan aan door de schuifspanning die de lucht uitoefent op het zeeoppervlak. Een belangrijke reden voor het ontstaan van beweging in de atmosfeer is bovendien het vrijkomen van latente warmte bij condensatie van waterdamp en bij het bevriezen van wolkendruppeltjes. In het inwendige van de aarde worden de bewegingen aangedreven door interne warmtebronnen, zoals de warmte die wordt geproduceerd door radioactief verval van langlevende isotopen, of door de warmte die uit de kern naar het aardoppervlak diffundeert.

Vanwege de draaiing van de aarde is het karakter van de bewegingen in de atmosfeer en in de oceaan verre van triviaal. Door schijnkrachten die samenhangen met deze rotatie stroomt lucht of water niet altijd van gebieden waar de druk hoog is naar gebieden waar de druk laag is tot dat de drukgradiënten zijn opgeheven.

De bolvorm van de aarde heeft bovendien tot gevolg dat de aardrotatie-as voor een lokale waarnemer in richting varieert met de breedte. Dit impliceert dat de richting en de sterkte van de schijnkrachten variëren met de breedte. Met andere woorden, de versnelling van het coördinatensysteem waarin de verschijnselen worden beschouwd varieert met de plaats. Dit gegeven heeft vele gevolgen voor de stromingen in de atmosfeer en de oceaan.

Op de trage stromingen van zeer visceuze vloeistoffen zoals ijs of het gesmolten gesteente in het inwendige van de aarde hebben de schijnkrachten echter geen invloed van betekenis. Hier spelen andere complicerende zaken een rol, zoals het feit dat de betreffende media geen "ideaale" (Newtoniaanse) visceuze vloeistoffen zijn zoals lucht of water. Dit manifesteert zich in een vrij ingewikkeld verband tussen vervorming (deformatie) van het medium en de spanning die op medium wordt uitgeoefend.

De oorsprong van het vak geofysische stromingsleer aan de Universiteit Utrecht ligt bij Professor T.J. Simons (de eerste gewoon hoogleraar in de meteorologie aan de Universiteit Utrecht). Veel van het materiaal in dit diktaat komt voort uit het diktaat van T.J. Simons uit 1979. Hoofdstukken 2, 3, 8, 14 en 15 zijn bijna geheel overgenomen uit dit diktaat. De rest van de stof komt voort uit vele boeken waarvan de volgende aanbevolen worden.

A.E. Gill, 1982: **Atmosphere-Ocean Dynamics**. Academic Press. 662 pp.

J.P. Peixoto en A.H. Oort, 1992: **Physics of Climate**. American Institute of Physics, 520 pp.

R.G. Barry and R.M. Chorley, 1987: **Atmosphere, Weather and Climate**#. Fifth edition. Methuen, London, 460 pp.

J.R. Holton, 1992: **An Introduction to Dynamic Meteorology**\*, third edition. Academic Press. 507 pp.

G.J. Haltiner en F.L. Martin, 1957: **Dynamical and Physical Meteorology**. MacGraw-Hill Book Company. 470 pp.

W. Lowrie, 1997: **Fundamentals of Geophysics**\*. Cambridge University Press. 354 pp.

D.L. Turcotte en G Schubert, 1982: **Geodynamics**\*. John Wiley & Sons. 450 pp.

W.S.B. Paterson, 1994: **The Physics of Glaciers**, third edition. Pergamon Press, 480 pp.

J. Lighthill, 1978: **Waves in Fluids**. Cambridge University Press. 504 pp.

G.B. Whitham, 1974: **Linear and Nonlinear Waves**. John Wiley & Sons. 636 pp.

P. Groen, 1974: **De Wateren van de Wereldzee**. Derde druk. Unieboek B.V. Bussum, 362 pp.

S. Pond en G.L. Pickard, 1983: **Introductory Dynamical Oceanography**#, second edition. Pergamon Press, 329 pp.

Open University Course Team, 1989: **Ocean Circulation**#. Pergamon Press. 238 pp.

Open University Course Team, 1989: **Waves, Tides and Shallow-Water Processes**. Pergamon Press. 187 pp.

J. Pedlosky, 1987: **Geophysical Fluid Dynamics**, second edition. Springer Verlag. 710 pp.

Cushman-Roisin, B., 1994: **Introduction to Geophysical Fluid Dynamics**. Prentice Hall, New Jersey, 320 pp.

J.J. von Schwind, 1980: **Geophysical Fluid Dynamics for Oceanographers**. Prentice-Hall, Inc. 307 pp.

Hans J. Lugt, 1983: **Vortex flow in Nature and technology**#. J. Wiley and Sons, New York.

P.K. Kundu, 1990: **Fluid Mechanics**\*. Academic Press, 638 pp.

D.J. Tritton, 1988: **Physical Fluid Dynamics**, second edition. Oxford Science Publications. 519 pp.

G.R. Fowles en G.L. Cassiday, 1993: **Analytical Mechanics**\*, fifth edition. Harcourt Brace and Company, 456 pp.

R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, 1964: **Lectures on Physics**\*. Addison-Wesley Publishing Company.

M. Alonso en E. Finn, 1973: **Fundamentele Natuurkunde (deel 3): golven**. Agon-Elsevier. 312 pp.

W.J. Moore, 1950: **Physical Chemistry**. Longman Group. 977 pp. (fifth edition of 1972)

C.F. Bohren and B.A. Albrecht, 1998: **Atmospheric Thermodynamics**. Oxford University Press. 402 pp.

J.A. Curry and P.J. Webster, 1999: **Thermodynamics of Atmospheres and Oceans**. Academic Press, 471 pp.

D.V. Schroeder, 2000: **An Introduction to Thermal Physics**. Addison-Wesley, 422 pp.

De boeken die zijn gemerkt met een sterretje, worden speciaal aangebevolen. Met name de boeken van Fowles en Cassiday, van Holton en van Kundu zijn didactisch zeer goed. In Fowles en Cassiday (hfst 5) staat de afleiding van de bewegingsvergelijking t.o.v. een versneld assenstelsel (*wordt bekend verondersteld*). Het boek van Kundu bevat een hoofdstuk onder de titel "Geophysical fluid dynamics". De boeken die zijn gemerkt met een hekje zijn meer beschrijvend van aard en daardoor wat minder moeilijk. In de bibliotheek van het Buys Ballot Laboratorium (tweede verdieping) staan nog vele interessante boeken over de dynamica van roterende, gelaagde vloeistoffen.

Tot slot nog een opmerking over notatie: vectoren worden in dit diktaat aangegeven met **vet-gedrukte** en niet cursieve letters. Alle andere grootheden worden in *cursief* gedrukt. Bijvoorbeeld:  $v$  is de  $y$ -component van de stroom-vector,  $\mathbf{v}$ .

Iedereen wordt van harte uitgenodigd om opmerkingen en kritiek op dit diktaat kenbaar te maken aan de docent (Aarnout van Delden, Buys Ballot Laboratorium, kamer 623A, Princetonplein 5 3584 CC Utrecht, tel 030-2533168, e-mail a.j.vandelden@phys.uu.nl). Ik dank Frans Peter Lam voor de vele suggesties voor verbeteringen op een voorgaande druk van dit diktaat.

## 1

## EIGENSCHAPPEN VAN GEOFYSSISCHE VLOEISTOFFEN

## 1.1 De atmosfeer

De atmosfeer is een gasmengsel dat voornamelijk uit stikstof (78%) en zuurstof (21%) bestaat. Andere belangrijke bestanddelen zijn water (in gasfase, in invloerbare fase en in vaste fase) (slechts 0.001 % van de totale hoeveelheid water in het klimaatsysteem van de aarde) kooldioxide en ozon. Dit gasmengsel is door de zwaartekracht aan de aarde gebonden. Ongeveer 99.9% van de massa van de atmosfeer bevindt zich in een schil met een dikte van ongeveer 50 km om de aarde. De atmosfeer kan worden opgedeeld in verschillende lagen met karakteristieke thermische eigenschappen. De onderste laag, de troposfeer, is ongeveer 10 km dik en bevat ongeveer 70% van alle massa (figuur 1.1). De troposfeer eindigt bij de tropopause. Daarboven bevindt zich de stratosfeer. De temperatuur in de troposfeer neemt af met de hoogte, terwijl de temperatuur in de stratosfeer vrijwel constant is. Dit laatste wordt veroorzaakt door de absorptie van zonnestraling door het aanwezige ozon. De stratosfeer eindigt op ongeveer 50 km bij de stratopause. Daarboven bevindt zich de mesosfeer. Hier neemt de temperatuur weer af met toenemende hoogte. Naast het bovengenoemde onderscheid van lagen in de atmosfeer op grond van temperatuursverloop, kan men ook lagen onderscheiden op grond van andere fysische of chemische eigenschappen. Zo kent men bijvoorbeeld de ionosfeer, waar zulke grote hoeveelheden ionen en vrije elektronen voorkomen dat radiogolven worden teruggekaatst, en de exosfeer, van waaruit de lichtere gassen naar de ruimte kunnen ontsnappen.

De dichtheid van lucht varieert van ongeveer  $1,2 \text{ kg m}^{-3}$  nabij het aardoppervlak tot  $10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$  op 100 km boven het aardoppervlak. Deze sterke afname van de dichtheid met toenemende hoogte is een gevolg van het feit dat lucht zich relatief "gemakkelijk" laat samendrukken, een karakteristieke eigenschap van een gas.

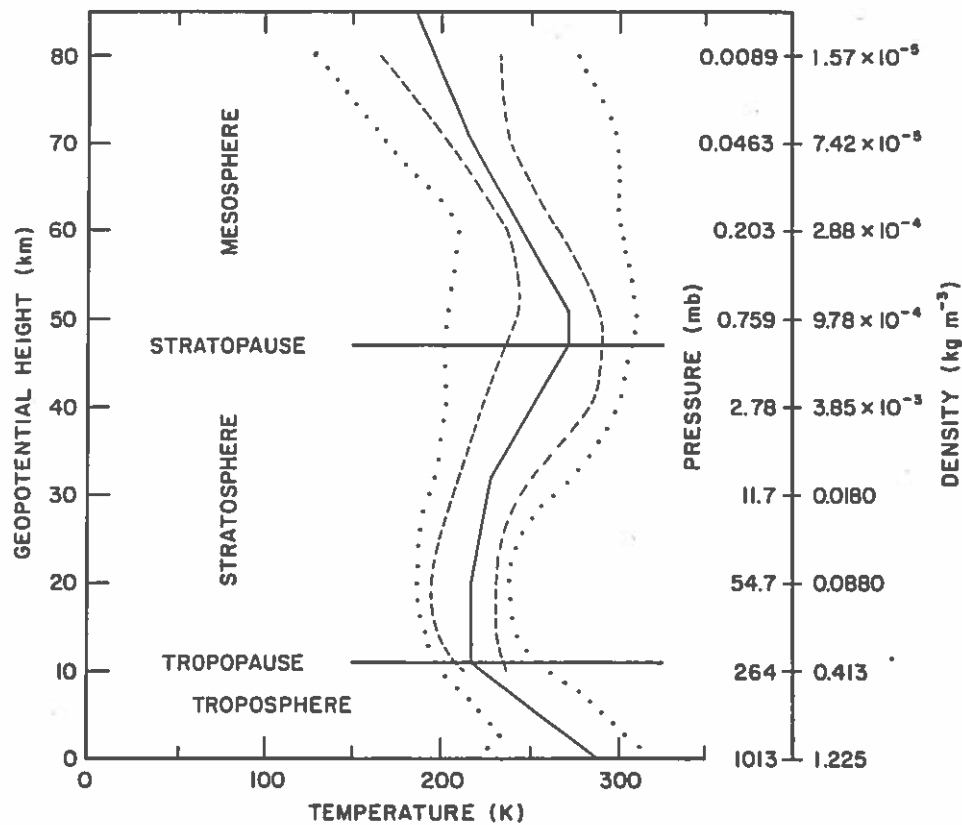
Systematische waarnemingen van de stroming, druk en temperatuur in de atmosfeer werden voor het eerst pas gedaan aan het begin van de twintigste eeuw. Pas toen werd de stratosfeer ontdekt! Sinds de tweede wereldoorlog en het ontstaan van de numerieke weersverwachtingen is er onder regie van de Wereld Meteorologische Organisatie een indrukwekkend meetnet opgebouwd waarmee de driedimensionale structuur van de atmosfeer bijna van uur tot uur in de gaten wordt gehouden.

## 1.2 De oceanen

De oceanen bestaan voornamelijk uit water en opgelost zout. De oceanen bevatten 97% van alle water in het klimaatsysteem van de aarde, de ijskappen en gletsjers ongeveer 2% en het grondwater vertegenwoordigt nog geen 1 % van alle water. De oceanen en zeën bedekken ongeveer 71 % van het aardoppervlak tot een gemiddelde diepte van 3730 m. Dit water vertegenwoordigt tevens een enorme hoeveelheid warmte die kan worden afgegeven aan de atmosfeer.

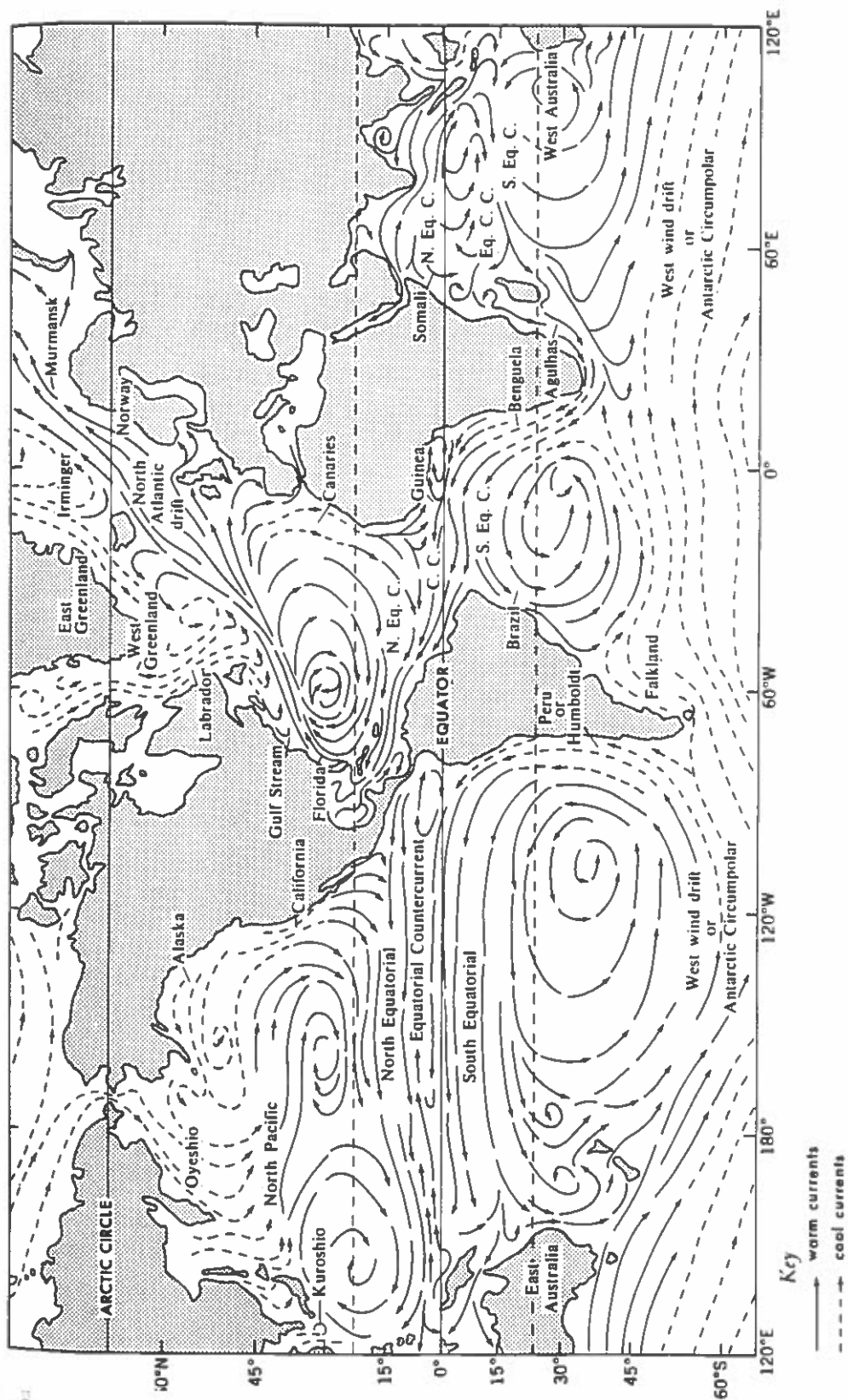
De dichtheid van het oceaانwater varieert relatief weinig. Op geringe diepte in de oceaan is de dichtheid gemiddeld gesproken gelijk aan ongeveer  $1024.5 \text{ kg m}^{-3}$  terwijl de gemiddelde dichtheid op 1000 m diepte (waar de druk ongeveer 100 atmosfeer bedraagt!) ongeveer  $1032 \text{ kg m}^{-3}$  bedraagt.

De oceanografen beschikken nauwelijks over een operationeel (continu werkend) meetnet waarmee de stromingen (zie figuur 1.2) en de thermodynamische structuur van de oceaan wordt bemonsterd. Pas in de jaren



Temperature variation with geopotential height for the U.S. Standard Atmosphere (solid line). This consists of straight-line segments with breaks at 11, 20, 32, 47, 51, and 71 km. The surface temperature is 15°C and the gradients, starting from the surface, are  $-6.5$ ,  $0$ ,  $1.0$ ,  $2.8$ ,  $0$ ,  $-2.8$ , and  $-2.0$  K km<sup>-1</sup>. The dashed line shows the lowest and highest monthly mean temperatures obtained for any location between equator and pole, whereas the dotted line shows estimates of the 1% maximum and minimum temperatures that occur during the warmest and coldest months, respectively, in the most extreme locations. The scale at the right gives pressures and densities at 10-km intervals for the standard profile. [From NOAA/NASA/USAF, 1976.]

Figuur 1.1. Vertikale structuur van de atmosfeer van de aarde (uit Gill).



A map of the major surface currents in the world ocean during northern winter (from Tolmazin, 1985).

Figuur 1.2. (uit Peixoto en Oort)



Figuur 1.3. Morteratschgletsjer, Zwitserland (foto: J. Oerlemans).

tachtig van de twintigste eeuw werd zo'n meetnet in de tropische Stille Oceaan geïnstaleerd met als doel het in de gaten houden van "El Niño".

### 1.3 De cryosfeer

De grootste hoeveelheid ijs bevindt zich in de twee grote ijskappen: Antarctica en Groenland. Voor het klimaat op aarde is dit getal minder van belang dan het oppervlak van de aarde dat is bedekt met ijs of sneeuw, dit omdat ijs of sneeuw de straling afkomstig van de zon zeer effectief reflecteert en op die manier grote invloed heeft op het klimaat op aarde.

De stroming van grote ijsmassa's (een voorbeeld wordt getoond in figuur 1.3) is al honderden jaren onderwerp van discussie. Aanvankelijk dacht men dat een ijsmassa onder invloed van de zwaartekracht als geheel van een helling afglijdt. Vele gletsjers bewegen inderdaad op deze wijze, maar het ijs zelf stroomt ook, soms als een zeer visceuze vloeistof en soms als een plastisch materiaal.

De dichtheid van "ijs" in ijskappen en in gletsjers varieert sterk afhankelijk van de "levensgeschiedenis" van de betreffende ijsmassa. Verse droge sneeuw heeft een dichtheid van 50 tot 70 kg m<sup>-3</sup>, terwijl sneeuw die al een tijd op de grond ligt een dichtheid heeft van ongeveer 200 tot 300 kg m<sup>-3</sup>. De dichtheid van het samengeperste ijs op enige diepte in een gletsjer is ongeveer 900 kg m<sup>-3</sup>. Dit is bijna de dichtheid van puur ijs bij 0°C (917 kg m<sup>-3</sup>). Heel bijzonder is dat ijs minder weegt dan vloeibaar water, waardoor ijs drijft. Het is hoogst ongewoon dat een materiaal in de vaste fase een dichtheid heeft die lager is dan in de vloeibare fase.

### 1.4 De aarde

De vaste aarde bestaat grofweg gezegd uit een viertal lagen (zie figuur 1.4). De buitenste (vaste) laag of schil wordt de *lithosfeer* genoemd. Deze laag is ongeveer 100 km dik. De lithosfeer drijft in zekere zin op de (deels gesmolten en dus vloeibare) *asthenosfeer* die zich uitstrekt tot een diepte van ongeveer 200 km. De asthenosfeer gedraagt zich als een zeer visceuze vloeistof of als een plastische vaste stof, afhankelijk van de temperatuur en precieze samenstelling. Onder de asthenosfeer vinden we de plastische mantel tot een diepte van ongeveer 2900 km en daaronder de vloeibare kern. De straal van de aarde is ongeveer 6370 km.

De lithosfeer is opgedeeld in "platen" die t.o.v. elkaar bewegen (figuur 1.5). Op de plaatsen waar verschillende platen elkaar raken kunnen zich spanningen opbouwen die vanwege de brose eigenschappen van het materiaal van de lithosfeer plotseling in bewegingen worden omgezet, waarmee een aardbeving een feit is. Figuur 1.6 toont dat aardbevingen alleen voorkomen in de grensgebieden tussen lithosferische platen.

De dichtheid in de aarde is voornamelijk afhankelijk van de samenstelling en verandert sprongsgewijs. In de mantel is de dichtheid 4500-5500 kg m<sup>-3</sup>; in de kern is deze 10000-12000 kg m<sup>-3</sup>.

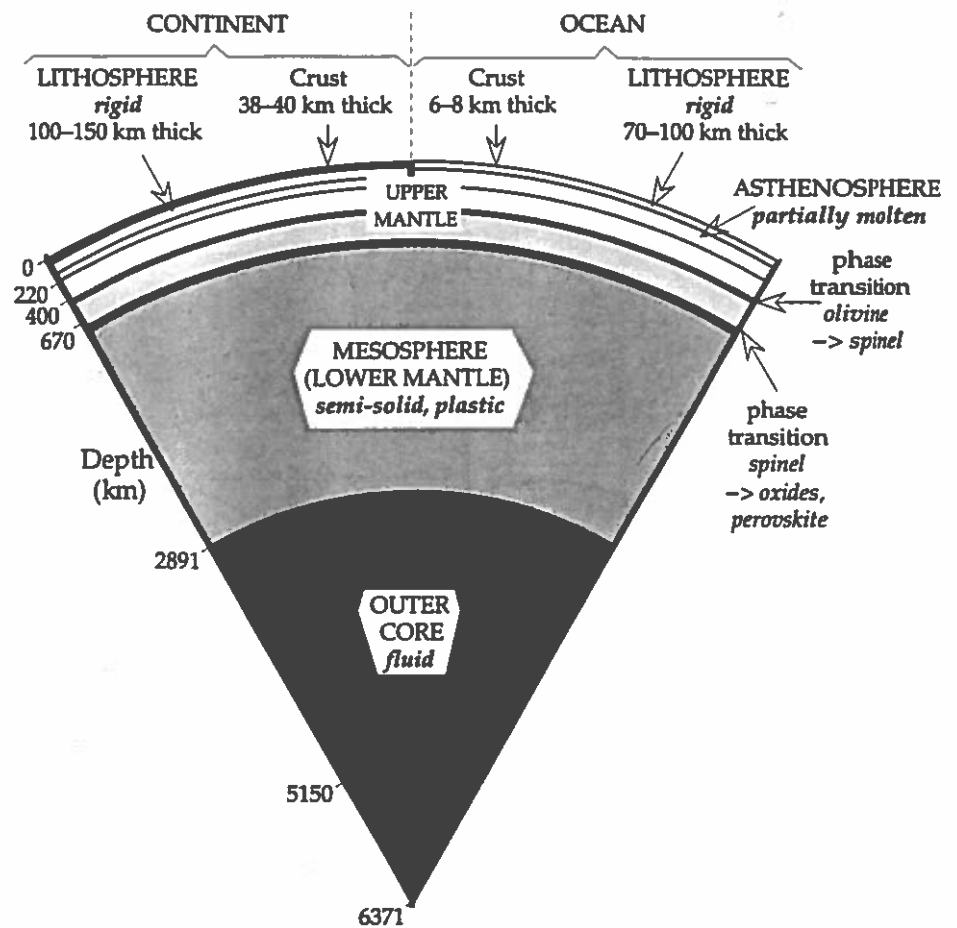
De structuur van de aarde wordt met behulp van "remote sensing" technieken bestudeerd. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de theoretisch en experimenteel bekende eigenschappen van seismische golven. Deze golven zijn het gevolg van de elasticiteit en de stijfheid van het medium. Geluidsgolven zijn hier een voorbeeld van. In dit hoofdstuk zullen we enige aandacht schenken aan dit soort golven.

### 1.5 Mechanica: massa en kracht

De geofysische stromingsleer (in het Engels: *Geophysical Fluid Dynamics*) is een vak dat voortkomt uit, en inmiddels de basis is van, de vakgebieden Dynamische Meteorologie en Dynamische Oceanografie. Het vak gaat kennelijk over *dynamica*. Dit is een tak van de Mechanica die zich bezig houdt met *stoffen in beweging*.

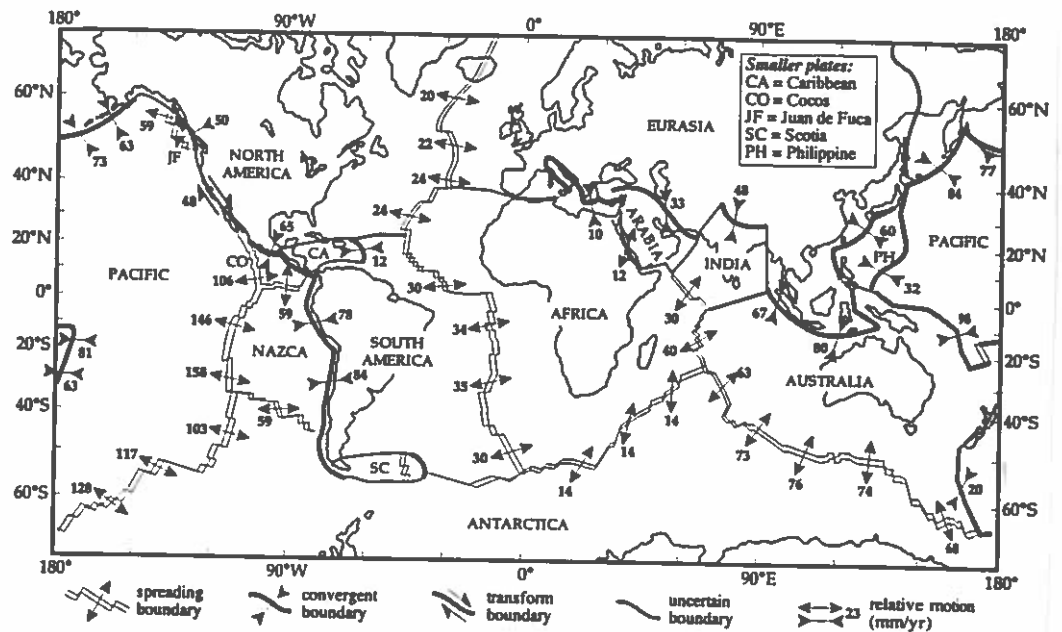
Figuur 1.4. (uit Lowrie)

Simplified layered structure of the Earth's interior showing the depths of the most important seismic discontinuities.

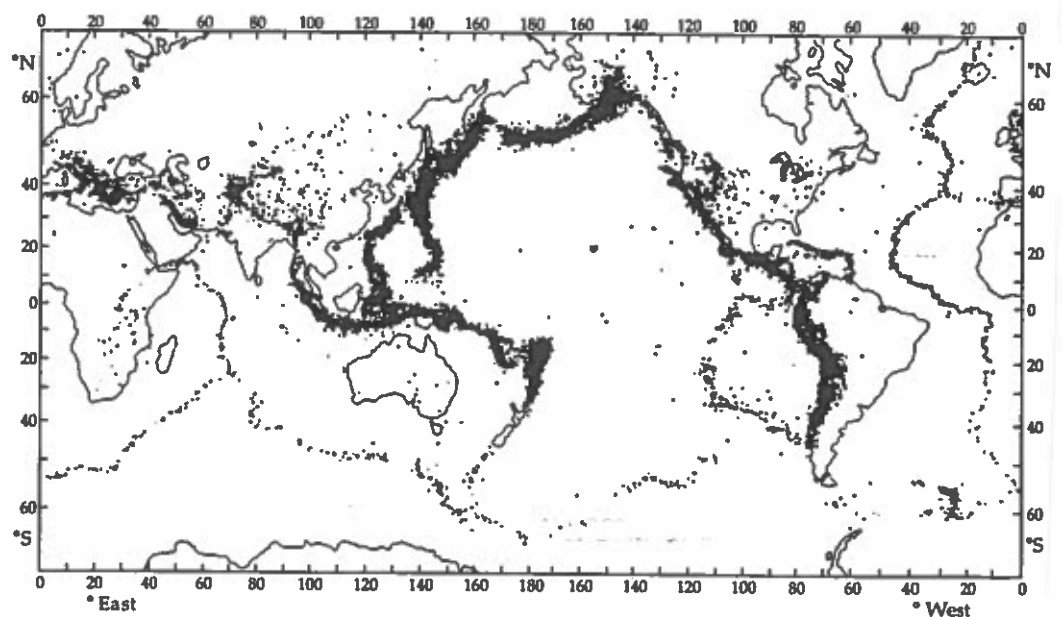


Figuur 1.5. (uit Lowrie)

The major and minor lithospheric plates. The arrows indicate relative velocities in  $\text{mm yr}^{-1}$  at active plate margins, as deduced from the model NUVEL-1 of current plate motions (data source: DeMets *et al.*, 1990).



The geographical distribution of epicenters for 30,000 earthquakes for the years 1961–1967 illustrates the tectonically active regions of the Earth (after Barazangi and Dorman, 1969).



Mechanica is gegrondvest in het werk van Isaac Newton (1642-1727) en begint meestal met de vergelijking

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (1.1)$$

met

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} . \quad (1.2)$$

Hierin is  $\mathbf{a}$  de vernelling,  $\mathbf{v}$  de snelheid en  $\mathbf{r}$  de plaats. Vergelijking (1.1) is eigenlijk een definitie van *kracht*,  $\mathbf{F}$ . De evenredigheidsfactor,  $m$ , wordt aangeduid met de term *massa*. De SI-eenheid van kracht is Newton (N).

Het begrip massa komt voort uit de gravitatiewet van Newton,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} . \quad (1.3)$$

Deze wet zegt dat er een aantrekkende kracht bestaat tussen twee voorwerpen, die evenredig is met het product van de massa's ( $m_1m_2$ ) en omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tussen de voorwerpen ( $r_{12}$ ). De constante,  $G$ , heeft de volgende waarde:

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}. \quad (1.4)$$

Het gewicht,  $W$ , van een object is de kracht waarmee het wordt aangetrokken tot de aarde:

$$W = mg. \quad (1.5)$$

Hierin is  $g$  de versnelling van vrije val in vacuüm.

## 1.6 Thermodynamica: druk, temperatuur en volume

De thermodynamica geeft een macroscopische beschrijving van de toestand van de materie in termen van een klein aantal variabelen. Dit zijn de massa, het volume, de dichtheid, de druk en de temperatuur. Thermodynamica is het vakgebied dat relaties geeft tussen deze variabelen zonder zich te bekommeren om het bestaan van moleculen.

We beschouwen een stof die geïsoleerd is van zijn omgeving. De "thermodynamische toestand" van deze stof wordt weergegeven door de massa,  $m$ , de druk  $p$ , het volume  $V$  en de temperatuur  $T$ .

De druk is hetzelfde als *kracht per oppervlakteenheid*, ook wel aangeduid met de term *spanning*. De drukkracht staat per definitie loodrecht op het beschouwde voorwerp. Als het voorwerp in evenwicht is, is er geen netto drukkracht op het voorwerp. Voor een vloeistof in rust en buiten de invloed van de aantrekkingskracht van de aarde is de druk overal gelijk. Als we de invloed van de aantrekkingskracht van de aarde meenemen, dan geldt voor vloeistof in evenwicht dat de druk moet toenemen met toenemende diepte, waardoor er sprake is van een zogenaamde *hydrostatische* drukgradientkracht die precies in evenwicht is met de gravitatiekracht. De gemiddelde atmosferische luchtdruk bij het aardoppervlak op zeeniveau is gelijk aan  $101325 \text{ N m}^{-2}$  (of  $101325 \text{ Pascal}$ ). Op 5 km hoogte in de atmosfeer is de luchtdruk ongeveer de helft hiervan.

Volgens Robert Boyle en zijn tijdgenoten is luchtdruk het gevolg van *elasticiteit* van lucht (men sprak over "*the spring of air*"). Dit is een vrij naïve interpretatie van druk. De wet van Boyle zegt dat het volume van een gasmonster omgekeerd

evenredig is met de druk. In wiskundige termen wordt dit  $p=C/V$ , waarin  $C$  de evenredigheidsconstante die afhankelijk is van de temperatuur<sup>1</sup>.

Met een "constant-volume gasthermometer" kan de waarde van de evenredigheidsconstante,  $C$ , worden bepaald. Met dit apparaat wordt de druk gemeten van een gasmonster (bijvoorbeeld waterstof) waarvan het volume constant wordt gehouden bij een tweetal ijkpunten, namelijk het kookpunt van water en het vriespunt van water. Het resultaat is dat de verhouding  $p(\text{kookpunt})/p(\text{smeltpunt})$  ongeveer gelijk is aan 1.366.

Joseph Gay-Lussac was de eerste die rond 1800 dit soort experimenten deed. Hij werkte met o.a. stikstof, zuurstof en waterstof en ontdekte dat de relatie tussen temperatuur en volume voor alle gassen dezelfde is. De experimentele resultaten van Gay-Lussac kunnen worden samengevat in de wet van Gay-Lussac

$$V = V_0(1 + \alpha_0 T), \quad (1.6)$$

waarin  $V_0$  het volume van het gasmonster bij een temperatuur van  $0^\circ\text{C}$  (dus  $T$  wordt uitgedrukt in  $^\circ\text{C}$ ) en  $\alpha_0$  de thermische uitzettingscoëfficiënt (later zullen we hier het symbool  $\alpha_T$  voor gebruiken).

Nauwkeurige experimenten tonen aan dat de wetten van Boyle en Gay-Lussac het beste opgaan bij hoge temperatuur en lage druk. Voor sommige gassen, zoals helium, gaan deze wetten beter op dan voor anderen, zoals kooldioxide. Vandaar dat het begrip *ideaal gas* is ingevoerd. Een ideaal gas beantwoordt exact aan de wetten van Boyle en Gay-Lussac. Aangezien deze wetten het best gelden voor lage druk, kunnen de eigenschappen van een ideaal gas worden bepaald door extrapolatie van de experimentele resultaten naar  $p=0$ . Dit levert een schatting op voor  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = 36.61 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (1.7)$$

of

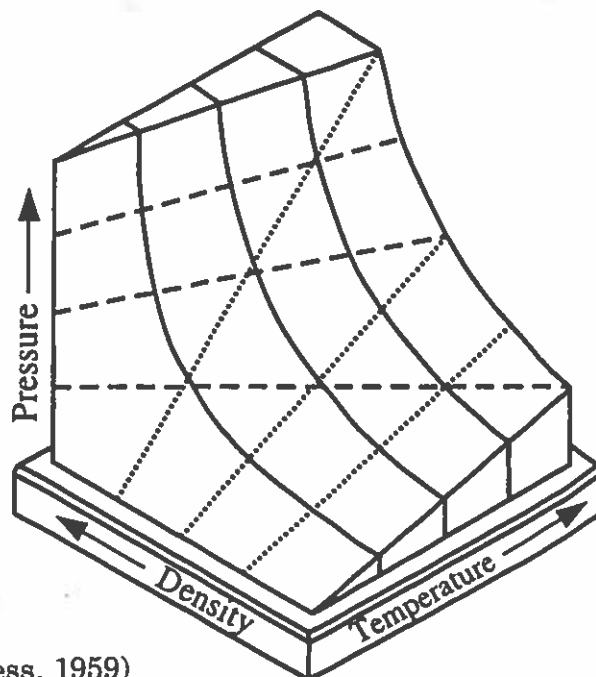
$$\frac{1}{\alpha_0} = 273.15 \text{ } ^\circ\text{C} \pm 0.02 \text{ } ^\circ\text{C} = T_0. \quad (1.8)$$

Dit is de basis van de Kelvin (K) temperatuurschaal waarbij

|                               | temperatuur in Kelvin |
|-------------------------------|-----------------------|
| kern van heetste ster         | $10^9$                |
| kern van exploderende H bom   | $10^8$                |
| hoogste temp. gemeten in lab. | $6 \times 10^7$       |
| kern van de zon               | $1,5 \times 10^7$     |
| oppervlakte van de zon        | $4,5 \times 10^3$     |
| kern van de aarde             | $4 \times 10^3$       |
| smeltpunt ijzer               | $1,8 \times 10^3$     |
| smeltpunt lood                | $6 \times 10^2$       |
| kokend water                  | 373                   |
| menselijk lichaam             | 310                   |
| aardoppervlak (gemiddeld)     | 287                   |
| bevriezend water              | 273                   |
| kookpunt stikstof             | 77                    |
| kookpunt waterstof            | 20                    |
| kookpunt helium               | 4,2                   |
| interstellaire ruimte         | 3                     |
| laagste temp. gemeten in lab. | $3 \times 10^{-8}$    |

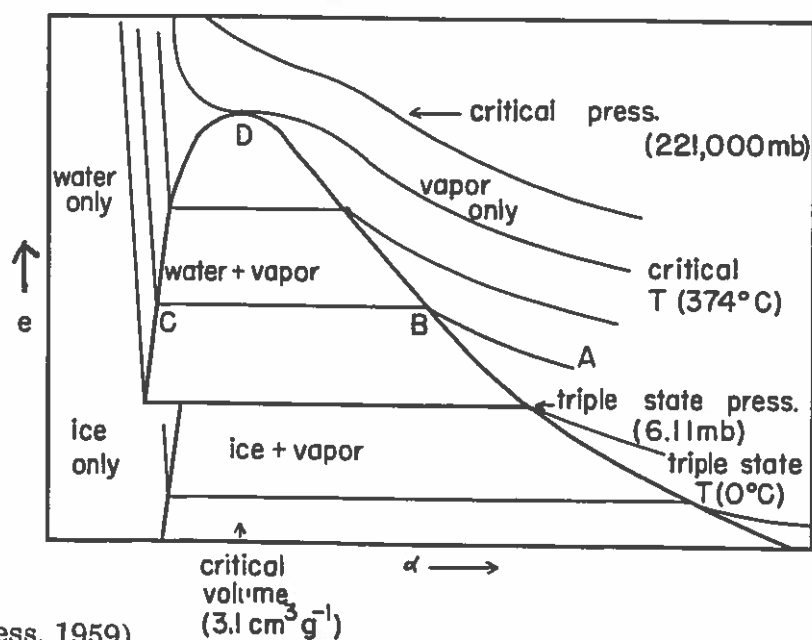
Tabel 1.1. Enkele temperaturen.

<sup>1</sup>Merk op dat hieruit is af te leiden dat  $p=\text{const.}$  in een onsamendrukbaar isotherm gasmonster.



(uit Hess, 1959)

Figuur 1.7a. Grafische representatie van de gaswet voor een ideaal gas. De getrokken lijnen in de figuur zijn isothermen. De gestippelde lijnen zijn isopycnen (lijnen van gelijke dichtheid). De onderbroken lijnen zijn isobaren (lijnen van gelijke druk).



(uit Hess, 1959)

Figuur 1.7b. Fasediagram van water met een specifiek volume,  $\alpha$ , en druk,  $e$ . De dikke lijn scheidt de verschillende fases. Zie de tekst voor verdere uitleg.

$$T[\text{K}] = T_0 + T[^\circ\text{C}]. \quad (1.9)$$

Tabel 1.1 geeft een lijstje van gemeten temperaturen. Temperaturen lager dan 0 K zijn theoretisch niet mogelijk.

Met Kelvin als eenheid van temperatuur wordt de wet van Gay-Lussac:

$$V = \frac{V_0 T}{T_0}. \quad (1.10)$$

De wetten van Boyle en van Gay-Lussac kunnen worden gecombineerd in de zogenaamde toestandsvergelijking

$$\frac{pV}{T} = \text{constant}. \quad (1.11)$$

of

$$p = \rho R T. \quad (1.12a)$$

Hierin is  $\rho$  de dichtheid ( $\text{kg m}^{-3}$ ) en  $R$  de gasconstante per massaeenheid ( $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$ ).  $R$  is voor elk gas anders. De gaswet wordt dikwijls ook uitgedrukt als volgt:

$$pV = nR^*T. \quad (1.12b)$$

waarin  $n$  het aantal mol<sup>1</sup> en  $R^*$  de universele gasconstante ( $=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$ ). Vergelijking 1.12b) is de basis voor de definitie van temperatuur.

Aangezien het volume een functie is van temperatuur en druk kunnen we het volgende schrijven:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \equiv \alpha_T V dT - \alpha_p V dp. \quad (1.13)$$

Hierin zijn  $\alpha_T$  en  $\alpha_p$ , respectievelijk, de thermische uitzettingscoëfficiënt en de isotherme samendrukbaarheid.

Voor een ideaal gas is de isotherme samendrukbaarheid een constant positief getal. Met andere woorden, voor een ideaal gas zijn de isothermen in een grafiek van de druk  $p$  versus het specifiek volume  $\alpha$  hyperbolen ( $p/\rho = p\alpha = \text{constant}$ ). In figuur 1.7a zien we zo'n grafiek. Droge lucht gedraagt zich als een ideaal gas bij de temperatuur en druk die wordt waargenomen op aarde. Voor water geldt dit niet. Figuur 1.7b toont dit aan. In deze grafiek zijn de hyperbolen nauwelijks terug te vinden. Dit komt omdat water in de atmosfeer van de aarde in drie fases kan bestaan, als damp (gas), als vloeistof ("liquid")<sup>2</sup> en als vaste stof (ijs). Neem bijvoorbeeld het punt A in figuur 1.7b. Hier bestaat alle water als damp. Als we de druk op het monster opvoeren en de temperatuur constant houden, dan zal het specifieke volume afnemen in overeenstemming met de ideaale gaswet totdat een toestand wordt bereikt (punt B) waarbij een kleine toename van de druk aanleiding geeft tot de condensatie van alle damp. Als alle damp is gecondenseerd wordt de toestand van het monster weergegeven door punt C. De constante druk waarbij condensatie plaatsvindt is de verzadigingsdruk voor die specifieke temperatuur. In

<sup>1</sup>1 mol staat gelijk aan  $6,0225 \times 10^{23}$  moleculen, evenveel als in 0,012 kg koolstof.

<sup>2</sup>De term "vloeistof" wordt in dit diktaat gebruikt voor alles wat vloeit, maar soms wordt daarmee uitsluitend bedoeld: een "gecondenseerde vloeistof". In het Engels wordt de term "fluid" gebruikt voor alles wat vloeit, waardoor de term "liquid" overblijft als geschikte term voor "gecondenseerde vloeistof".

punt C is het monster geheel gecondenseerd. Een verdere afname van het specifiek volume bij constante temperatuur vereist een forse toename van de druk.

Een speciaal geval is de  $0^\circ\text{C}$  isotherm. Bij een druk van 6.11 hPa is water in alle drie de fases in evenwicht. Voor een temperatuur en een druk lager dan de bovengenoemde waarden bestaat water alleen in dampvorm en in vaste vorm.

Een tweede speciaal geval is die waarbij  $T=374^\circ\text{C}$ . Deze isotherm gaat door het punt D in figuur 1.7b. Links van dit punt bestaat water alleen als "liquid"; rechts van dit punt alleen als damp. Op punt D verdwijnt het onderscheid tussen damp en "liquid". Punt D staat bekend als het kritische punt. Voor water vinden we dit punt bij  $374^\circ\text{C}$  en 221000 hPa (ongeveer 220 atm.). Boven het kritische punt (figuur 1.7b) zal water altijd als gas bestaan. Behalve van  $\text{CO}_2$  ( $T_{\text{crit}}(\text{CO}_2)=31^\circ\text{C}$ ), is de kritische temperatuur van de andere bestanddelen in de atmosfeer zo laag dat deze bestanddelen altijd als gas bestaan.  $\text{CO}_2$  condenseert ook niet vanzelf in de atmosfeer omdat de  $\text{CO}_2$ -inhoud zo laag is dat de atmosfeer nooit verzadigd is met  $\text{CO}_2$ . Het water op aarde neemt dus een speciale plaats in.

De mate waarmee een materiaal uitzet (of krimpt) bij een verandering van de temperatuur kan worden uitgedrukt in termen van een thermische uitzettingscoëfficiënt,  $\alpha_T$  (zie 1.13). De toename in het volume van het monster is evenredig met de temperatuuroptoe name en met het oorspronkelijke volume:

$$\Delta V = \alpha_T V \Delta T.$$

De waarde van uitzettingscoëfficiënten voor verschillende vaste stoffen en vloeistoffen wordt gegeven in tabel 1.2. We zien dat vloeistoffen veel sterker uitzetten dan vaste stoffen. Verder valt het op dat beton en ijzer even sterk uitzetten bij een gegeven toename van de temperatuur. Dit is een gelukkig toeval waardoor gewapend beton bestand is tegen dagelijkse temperatuur veranderingen.

| stof          | $\alpha_T$ |
|---------------|------------|
| aluminium     | 72         |
| brons         | 57         |
| beton         | 36         |
| koper         | 51         |
| glas (gewoon) | 33         |
| glas (pyrex)  | 10         |
| ijzer         | 36         |
| lood          | 87         |
| alcohol       | 1010       |
| benzine       | 950        |
| olijf olie    | 680        |
| kwik          | 180        |

Tabel 1.2: thermische uitzettingscoëfficiënten (in eenheden van  $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ).

Verder zien we dat water niet in het lijstje voorkomt. Water gedraagt zich nogal afwijkend. Tussen  $0^\circ\text{C}$  en  $3,98^\circ\text{C}$  neemt het volume niet-lineair af bij toenemende temperatuur. In de vaste (ijs) fase heeft water een lagere dichtheid dan in de vloeibare fase, waardoor ijs drijft. Dit heeft tot gevolg dat de temperatuur in de diepste gedeeltes van meren en vijvers die bedekt zijn met een dikke ijslaag niet veel afwijkt van  $4^\circ\text{C}$ . Dit is een relatief aangename temperatuur voor de overwintering van waterdieren. De ijslaag fungeert bovendien als een isolatielaag, vooral als er sneeuw op ligt.

Voor de vloeibare ("liquid") fase van water kan bij benadering de volgende toestandsvergelijking worden opgeschreven.

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_p(p - p_0)) . \quad (1.14)$$

Hierin zijn  $T_0$  en  $p_0$  referentiewaarden van, respectievelijk, de temperatuur en de druk. Voor zeewater moet de invloed van opgelost zout op de dichtheid worden meegenomen. Dus:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_p(p - p_0) + \alpha_s(s - s_0)) . \quad (1.15)$$

Hierin is  $s$  de saliniteit (gewoonlijk uitgedrukt in ‰)  $s_0$  een referentiewaarde van de saliniteit en  $\alpha_s$  (net als  $\alpha_T$  en  $\alpha_p$ ) een experimenteel bepaalde coefficient.

## 1.7 Elasticiteit

Alle materialen deformeren onder invloed van inwendige spanningen. Als de spanning loodrecht op het oppervlak van het voorwerp staat, spreken we van druk. Netto drukkrachten (figuur 1.8a) op een voorwerp geven aanleiding tot rek of krimp van het voorwerp. Naast samendrukking is ook afschuiving mogelijk (figuur 1.8b). Afschuiving wordt veroorzaakt door schuifspanningen. Bij een vaste stof is de rek of krimp evenredig met de druk en de deformatie is evenredig met de schuifspanning. Als de spanningen of netto drukkrachten worden weggenomen zal een vaste stof, mits de spanningen niet te groot zijn geweest, zijn oorspronkelijke vorm weer aannemen, m.a.w. de rek of krimp verdwijnt. Dit betekent dat het voorwerp perfect elastisch is. Bij elastische voorwerpen is ook de deformatie onder invloed van schuifspanningen omkeerbaar. Deze eigenschap noemt men stijfheid (rigidity). Vloeistoffen bezitten geen stijfheid. We behandelen in deze sectie enkele aspecten van het begrip elasticiteit.

De vervorming van vaste stoffen onder invloed van een normale spanning  $\sigma$  (kracht per oppervlakte-eenheid loodrecht op het oppervlak) kan worden beschreven in termen van een lengteverandering  $\Delta L$  als volgt

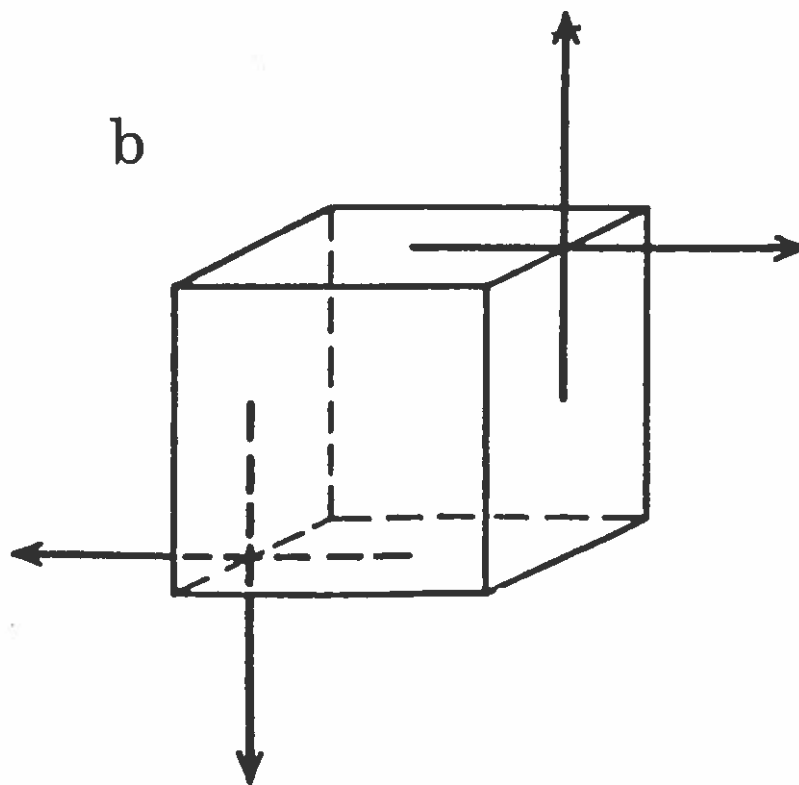
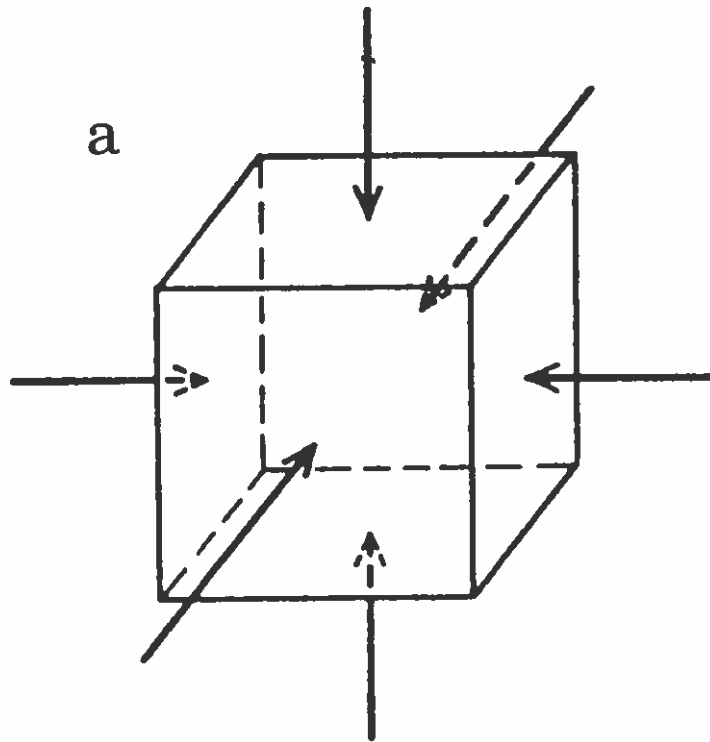
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{Y} \quad (1.16)$$

Dit is de wet van Hooke. Deze wet stelt dat, *binnen de elasticiteitsgrens van het materiaal, de normale spanning evenredig is met de normale rek*. De evenredigheidsconstante,  $Y$  is de zogenaamde elasticiteitsmodulus (of ook Young's modulus) van het materiaal. Tabel 1.3 geeft enkele waarden van  $Y$  voor verschillende materialen

|           | $Y$ in $\text{N m}^{-2}$ |
|-----------|--------------------------|
| aluminium | $7 \times 10^{10}$       |
| koper     | $11 \times 10^{10}$      |
| goud      | $8 \times 10^{10}$       |
| lood      | $1,6 \times 10^{10}$     |
| staal     | $20 \times 10^{10}$      |
| brons     | $10,5 \times 10^{10}$    |
| nylon     | $0,36 \times 10^{10}$    |

Tabel 1.3. Young's modulus.

De wet van Hooke is een goede benadering voor het elastisch gedrag van een vaste stof, zolang de vervorming klein is. Voor grote spanningen en vervormingen geldt de wet van Hooke niet. Bij overschrijding van een kritische waarde van de opgelegde spanning (de "yield stress" of zwichspanning) zal het materiaal blijven vervormen bij een constante spanning. Dit noemen we plastisch gedrag. De deformatie bij plastisch gedrag is deels onomkeerbaar.



Figuur 1.8. (zie de tekst)

De deformatie van een stof onder invloed van normale spanningen wordt ook beschreven in termen van een volumeverandering  $\Delta V$  als volgt (bij vloeistoffen kan dit niet anders)

$$\frac{-\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{K} \quad (1.17)$$

Hierin is  $K$  de Bulk modulus. De inverse van  $K$  ( $1/K$ ) wordt de samendrukbaarheid genoemd. Tabel 1.4 geeft enkele waarden van  $K$  voor verschillende vaste stoffen en de vloeistof, water.

|           | $K$ in $\text{N m}^{-2}$ |
|-----------|--------------------------|
| aluminium | $7,5 \times 10^{10}$     |
| koper     | $13,5 \times 10^{10}$    |
| goud      | $16,5 \times 10^{10}$    |
| lood      | $4,1 \times 10^{10}$     |
| staal     | $17 \times 10^{10}$      |
| brons     | $9 \times 10^{10}$       |
| nylon     | $0,59 \times 10^{10}$    |
| water     | $0,22 \times 10^{10}$    |

Tabel 1.4. Bulk modulus,  $K$ .

Als voorbeeld beschouwen wij een blok onder invloed van een uniforme drukverdeling. Er zal dan kracht op elke kant van het blok worden uitgeoefend. Aangezien de druk uniform is, zal de spanning (kracht per oppervlakte-eenheid) op elke kant hetzelfde zijn. We beschouwen eerst de verandering van de lengte in één specifieke richting t.g.v. deze spanningen. Deze lengteverandering kunnen we opvatten als een som van drie onafhankelijke effecten (zie figuur 1.9).

De relatieve lengteverandering t.g.v. de comprimerende drukkrachten is negatief. Volgens de wet van Hooke kunnen we dit schrijven als

$$\frac{\Delta L_1}{L} = \frac{-\sigma}{Y} \quad (1.18)$$

De druk die wordt uitgeoefend op de zijkanten van het blok (figuur 1.9b) leidt meestal ook tot een relatieve lengteverandering. Het verband tussen de contractie in de zijwaartse richting t.g.v. comprimerende krachten loodrecht op de zijkanten (dus in de zijwaartse richting) en de bijbehorende expansie in de lengterichting,  $\Delta L_2$ , wordt beschreven met de volgende formule:

$$\frac{\Delta W}{W} = -\frac{1}{\nu} \frac{\Delta L_2}{L} \quad (1.19)$$

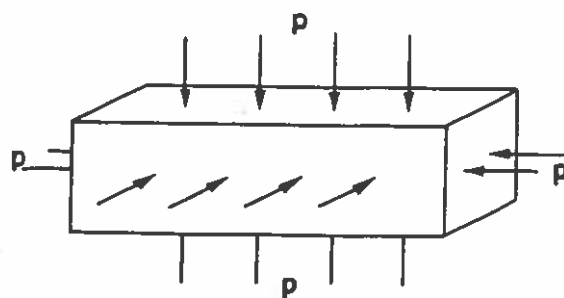
De constante  $\nu$  staat bekend als Poisson's verhouding (ook wel dwardscontractiemodulus) en  $W$  is de breedte van het blok. Poisson's verhouding is een eigenschap van het materiaal.

De hydrostatische druk op de zijkanten brengt een lengteverandering met zich mee die uit twee bijdragen bestaat (t.g.v. respectievelijk de druk in de breedte- en in de hoogte-richting). Aangezien

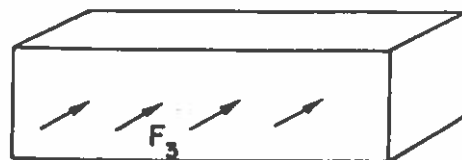
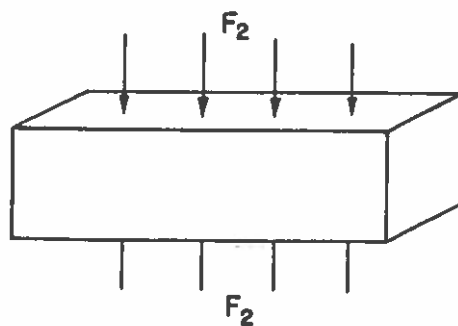
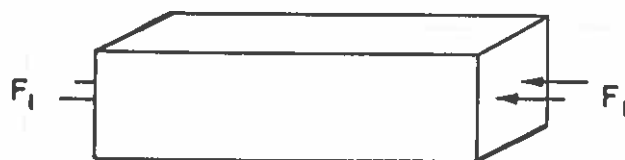
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{1}{\nu} \frac{\Delta L_3}{L} \quad (1.20)$$

waarin  $\Delta H$  de relatieve hoogteverandering t.g.v. de druk in hoogterichting is en

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta H}{H} = \frac{-\sigma}{Y} \quad (1.21)$$



Figuur 1.9. Een blok onder invloed van uniforme druk. Het probleem kan in drie deelproblemen worden opgesplitst (uit Feynman).



(de wet van Hooke), is de totale lengteverandering t.g.v. de hydrostatische druk

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = \frac{-\sigma L}{Y}(1 - 2\nu) \quad (1.22)$$

Het probleem is natuurlijk symmetrisch in alle drie de richtingen, waardoor wij concluderen dat

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta H}{H} = \frac{-\sigma}{Y}(1 - 2\nu) \quad (1.23)$$

De verandering in het volume onder invloed van de hydrostatische druk is ook van belang. Aangezien het volume,  $V = LWH$ , kan voor kleine verplaatsingen ( $\Delta L \ll L$ ;  $\Delta W \ll W$ ;  $\Delta H \ll H$ ) worden geschreven dat

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta H}{H}. \quad (1.24)$$

Met (1.23) volgt nu

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3\sigma}{Y}(1 - 2\nu) \quad (1.25)$$

In het licht van (1.17) concluderen we hieruit dat

$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.26)$$

Met (1.26) is het dus mogelijk om Poisson's verhouding te berekenen uit  $Y$  en  $K$  (zie bijvoorbeeld tabel 1.3 en tabel 1.4). We zien uit (1.26) dat Poisson's verhouding,  $\nu < 0,5$ . De waarde van Poisson's verhouding ligt in de praktijk tussen 0 (geen transversale krimp) en 0,5 (geen volume verandering). In het inwendige van de aarde ligt Poisson's verhouding in het algemeen tussen 0,24 en 0,27. Echter, voor zeer hard en stijf gesteente, zoals graniet, is Poisson's verhouding ongeveer 0,05.

## 1.8 Stijfheid

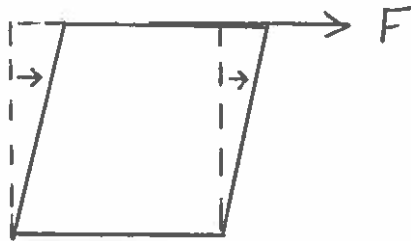
Werken op twee zijvlakken van een kubus met oppervlakte  $S$  schuifkrachten, dan ontstaat een deformatie zoals aangegeven in figuur 1.10. De vierkante doorsnede wordt vervormd tot een ruit. Deze deformatie heet *afschuiving*.

Om te begrijpen wat er precies gebeurt bij afschuiving beschouwen wij het probleem van de deformatie van een *kubus* onder invloed van de spanningen zoals geschetst in figuur 1.11. De krachten of spanningen zijn van identieke grootte in alle richtingen. Voor de relatieve verandering van de lengte van de kubus kan worden opgeschreven:

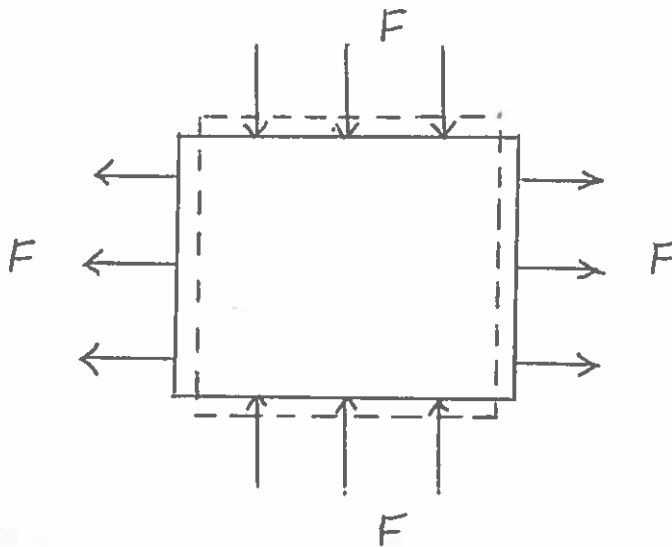
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{Y} + \nu \frac{\sigma}{Y} = \frac{\sigma}{Y}(1 + \nu). \quad (1.27)$$

De relatieve verandering in de (verticale) hoogte is, afgezien van een min-teken, identiek.

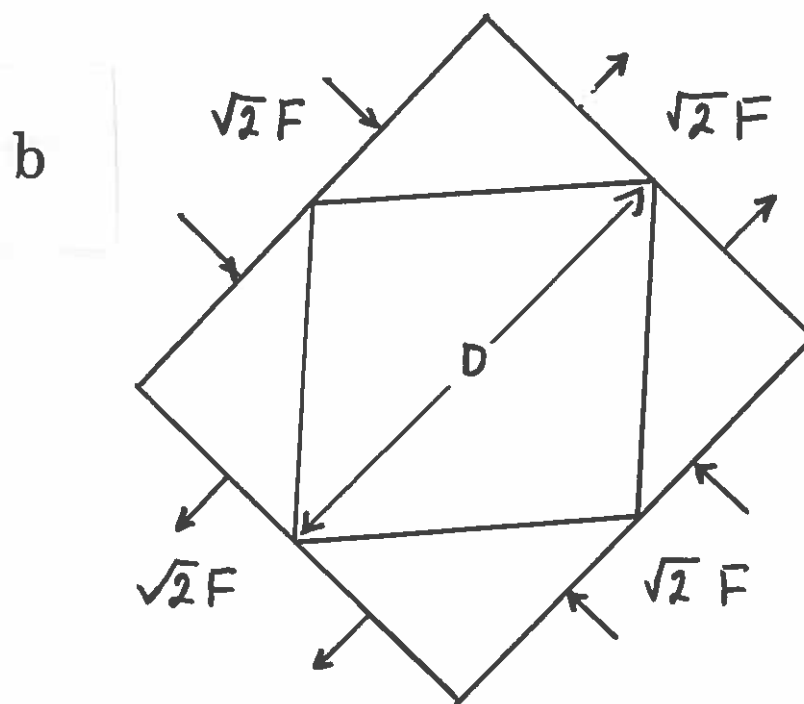
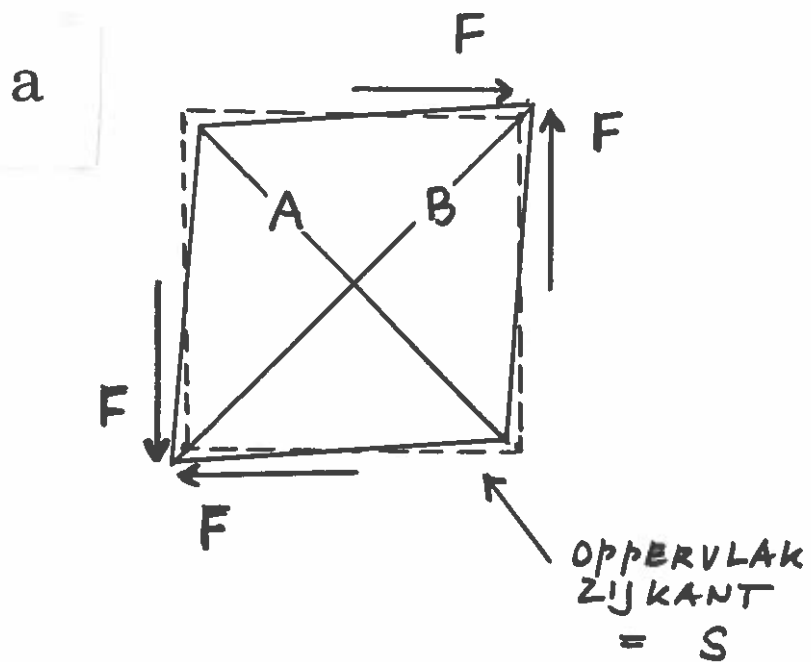
Stel nu dat wij dezelfde kubus onderwerpen aan de schuifspanning,  $\tau (=F/S)$  zoals aangegeven in figuur 1.12a. Merk op dat netto schuifkrachten op elk zijvlak van de kubus gelijk moeten zijn, waardoor er geen netto koppel is. Wij maken nu een denkbeeldige doorsnede van de kubus langs de lijn aangegeven met de letter A. De totale kracht loodrecht op dit vlak is gelijk aan  $\sqrt{2}F$ . Het oppervlak van de doorsnede is echter  $\sqrt{2}$  maal het oppervlak van één zijde van de kubus, waardoor de normaalspanning op de doorsnede (A) weer gelijk is aan  $\tau$ . Op grond van een analoog argument geldt dat de normaalspanning op de doorsnede aangegeven met de letter B in figuur 1.12a gelijk is aan  $-\tau$ . Hiermee is aangetoond dat afschuiving



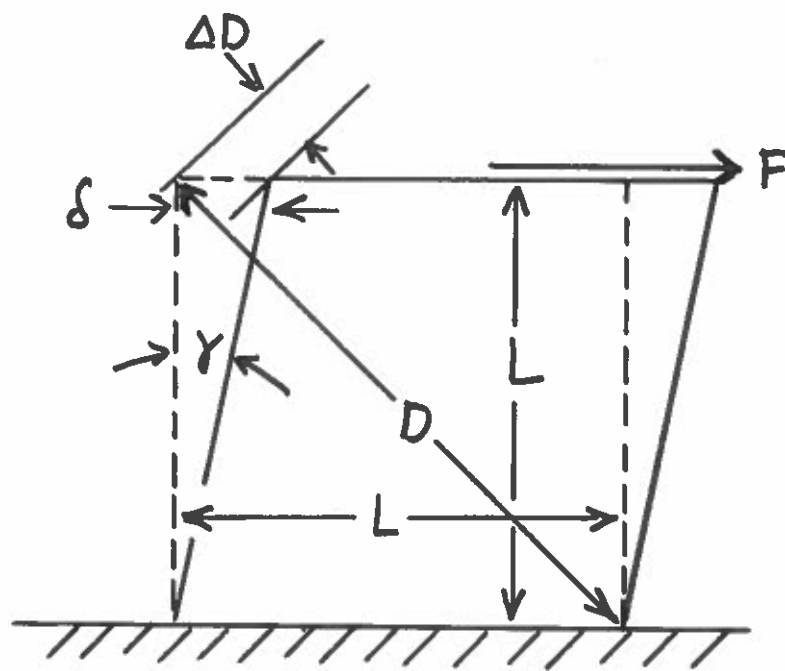
Figuur 1.10. Kubus onder invloed van schuifspanningen



Figuur 1.11. Kubus onder invloed van comprimerende krachten op de boven en onderkant en even grote rekkende krachten op de zijkanten



Figuur 1.12. De twee paar schuifspanningen in (a) hebben hetzelfde effect als de comprimerende en rekkende krachten in (b).



Figuur 1.13. De deformatie t.g.v. de schuifspanning is  $\gamma = \delta/L$ .

kan worden beschouwd als rek of krimp (figuur 1.12). Wij mogen (1.27) gebruiken om de relatieve verandering van de diagonaal in figuur 1.12b te berekenen:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\tau}{Y}(1+\nu). \quad (1.28)$$

De lengte van één diagonaal wordt kleiner terwijl de lengte van de andere diagonaal groter wordt. Afschuiving wordt in het algemeen gekwantificeerd in termen van de zogenaamde afschuivingshoek  $\gamma$ , waarvoor geldt dat (zie figuur 1.12)

$$\gamma = \frac{\delta}{L} = \frac{\sqrt{2} \Delta D}{L} = \frac{2 \Delta D}{D}. \quad (1.29)$$

Met (1.28) en (1.29) volgt: de schuifspanning  $\tau$  is evenredig met de afschuivingshoek (analoog aan de wet van Hooke):

$$\gamma = 2 \frac{(1+\nu)}{Y} \tau. \quad (1.30)$$

Als we dit schrijven zoals in de wet van Hooke, dan resulteert

$$\tau = G\gamma. \quad (1.31)$$

De evenredigheidsconstante,  $G$ , wordt glijdingsmodulus ("shear modulus") of stijfheidsmodulus ("rigidity modulus") genoemd. Een vaste stof gedraagt zich dus ook elastisch t.a.v. schuifkrachten. Bij een vloeistof daarentegen is  $G=0$ . Blijkbaar is er een relatie tussen stijfheid en elasticiteit die zich manifesteert in een relatie tussen de elasticiteitsmodulus,  $Y$ , en de glijdingsmodulus,  $G$ :

$$G = \frac{Y}{2(1+\nu)}. \quad (1.32)$$

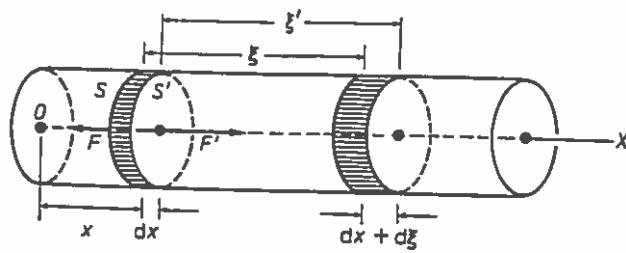
Hieruit volgt direct dat  $\nu > -1$ . In de praktijk is  $\nu > 0$ , zodat  $Y > G$ , zoals blijkt uit een vergelijking van tabel 1.3 en tabel 1.5 waarin de waarden van  $G$  voor enkele materialen zijn opgenomen.

|           | $G$ in $\text{N m}^{-2}$ |
|-----------|--------------------------|
| aluminium | $2,5 \times 10^{10}$     |
| koper     | $4,4 \times 10^{10}$     |
| goud      | $2,8 \times 10^{10}$     |
| lood      | $0,6 \times 10^{10}$     |
| staal     | $7,5 \times 10^{10}$     |
| brons     | $3,7 \times 10^{10}$     |
| nylon     | $0,12 \times 10^{10}$    |
| water     | 0                        |

Tabel 1.5. glijdingsmodulus.

## 1.9 Compressie golven

Ter illustratie van het begrip elasticiteit beschouwen wij een staaf zoals afgebeeld in figuur 1.14. Laten wij veronderstellen dat een bepaald punt van de staaf een verplaatsing  $\xi$  evenwijdig met de as heeft ondergaan. Als deze verplaatsing in alle punten van de staaf dezelfde zou zijn, was er geen vervorming, maar alleen een verschuiving van de staaf in de asrichting. Wij willen echter het geval beschouwen waarin er wel een vervorming is, d.w.z. dat  $\xi$  van  $x$  afhangt. Beschouw twee doorsneden  $S$  en  $S'$  op een afstand  $dx$  in de ongestoorde toestand (figuur 1.14), en stel dat door de opgetreden krachten de doorsnede  $S$  zich over een afstand  $\xi$  verplaatst en



*Longitudinale golf in een staaf.*

Figuur 1.14. (uit Alonso en Finn)

de doorsnede  $S'$  zich over een afstand  $\xi'$  verplaatst. De afstand tussen  $S$  en  $S'$  is nu geworden

$$dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi \quad (1.32)$$

en de vervorming van de staaf in dat gebied  $d\xi$ . De *normale rek*  $\varepsilon$  in de staaf wordt gedefinieerd als de vervorming langs de as per lengte-eenheid, dus in dit geval

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1.33)$$

Als er geen vervorming is, is  $\xi$  constant en de normale rek  $\varepsilon$  is nul. De rek is een dimensieloos getal. De wet van Hooke geeft een relatie tussen de normale spanning  $\sigma$  en de normale rek  $\varepsilon$ :

$$\sigma = \frac{F}{S} = Y\varepsilon. \quad (1.34)$$

Hierin is  $S$  het oppervlak van de doorsnede en de evenredigheidsfactor  $Y$  de elasticiteitsmodulus van het materiaal. Substitutie van (1.33) in (1.34) levert

$$F = YS \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1.35)$$

Stel dat de kracht,  $F$ , in de staaf niet overal gelijk is, zodat op een deel van de staaf met dikte  $dx$  een resulterende kracht werkt. In figuur (1.14) werkt bijvoorbeeld op vlak  $S'$  een kracht  $F'$  naar rechts als gevolg van de trek van het rechterdeel van de staaf, terwijl op vlak  $S$  een kracht  $F$  naar links uitgeoefend wordt als gevolg van het trek van het linkerdeel van de staaf. Voor de resulterende kracht naar rechts op een stukje van de staaf met dikte  $dx$  kan dan met (1.1) geschreven worden

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho S dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (1.36)$$

Hierin is  $\rho$  de soortelijke massa (dichtheid) van het materiaal van de staaf. Wij nemen aan dat  $\rho$  constant is. Voor een vaste stof is dit een redelijk goede benadering omdat de rek of krimp ( $\varepsilon$ ) relatief klein is. Voor een gas is dit geen goede benadering. Met (1.35) levert dit

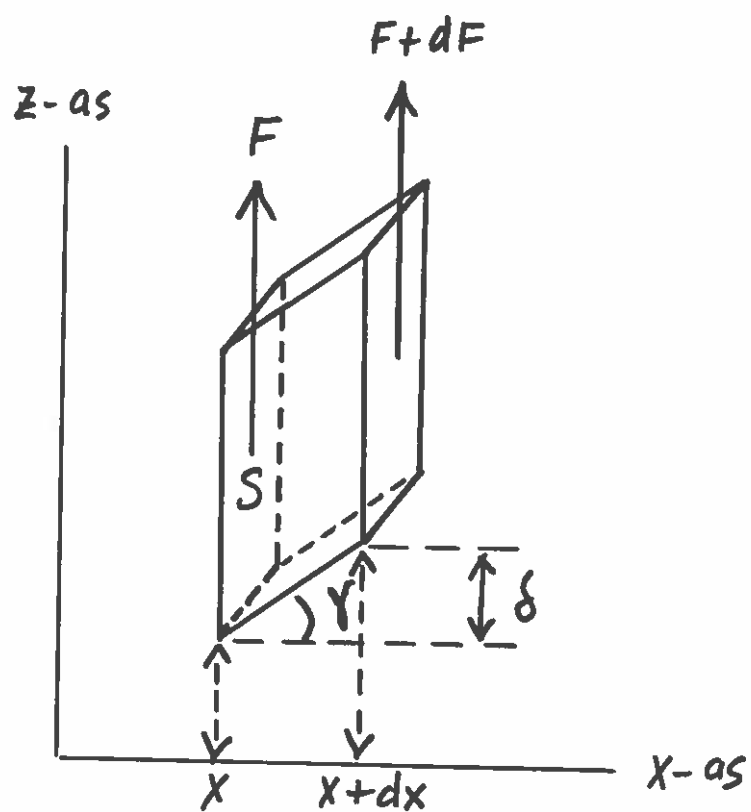
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.37)$$

Deze differentiaalvergelijking wordt de *golfvergelijking* genoemd. Men kan aantonen dat de algemene oplossing van vergelijking (1.37) de volgende vorm heeft

$$\xi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct). \quad (1.38)$$

met, in dit geval,  $c^2 = Y/\rho$ . Deze oplossing kan worden opgevat als een superpositie van twee golven die zich met een snelheid  $c$  in tegengestelde richtingen voortplanten. De vervorming van de staaf plant zich voort door de staaf met een snelheid  $c$ . Dit verschijnsel staat bekend als een elastische compressie golf. Een compressie golf is een voorbeeld van een *longitudinale* golf, waarbij de bewegingen van de deeltjes plaatsvinden in dezelfde richting als de voortplanting van de golf. Een geluidsgolf is een voorbeeld van longitudinale elastische golf.

De snelheid van een longitudinale elastische golf door bijvoorbeeld een stalen staaf kan gemakkelijk worden bepaald als de waarde van  $Y$  voor staal



Figuur 1.15. (zie de tekst)

experimenteel bekend is. In tabel 1.3 zien we dat  $Y=2.0 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$  en verder is  $\rho=7.8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Hieruit volgt  $c=5.06 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ .

In de werkelijkheid is een elastische golf drie-dimensionaal. De rek in één richting gaat gepaard met krimp in de andere richting. De krimp in de transversale richting gedeeld door de rek in de longitudinale richting wordt *Poisson's verhouding* genoemd (zie sectie 1.7).

### 1.10 Afschuivingsgolven

Schuifspanningen in een vaste stof kunnen ook aanleiding geven tot oscillaties. Dit verschijnsel analyseren wij nader voor een vereenvoudigde situatie. Beschouw de vervorming van een element tussen twee verticale vlakken (ieder met een oppervlak  $S$ ) op een afstand  $dx$  van elkaar (figuur 1.15). Op positie  $x$  is de kracht in de  $z$ -richting gelijk aan  $F$ . Op een afstand  $dx$  hiervandaan is de verschuiving van het vlak  $\delta$  en de schuifkracht is  $F+dF$ . De massa van het element is  $\rho S dx$ . De netto kracht in de  $z$ -richting op het element is (wij gebruiken het symbool  $\tau$  om een schuifspanning aan te geven)

$$dF = S d\tau = S dx \frac{\partial \tau}{\partial x} . \quad (1.39)$$

Als we gebruik maken van (1.31) en van Newton's tweede wet, dan wordt dit

$$(\rho S dx) \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = S dx \frac{\partial \tau}{\partial x} = G S dx \frac{\partial \gamma}{\partial x} \equiv G S dx \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} . \quad (1.40)$$

Hierin is aangenomen dat  $\gamma$  voldoende klein zodat  $\tan \gamma \approx \gamma$ . Hieruit volgt direct de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \equiv \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} . \quad (1.41)$$

De algemene oplossing van vergelijking (1.41) is

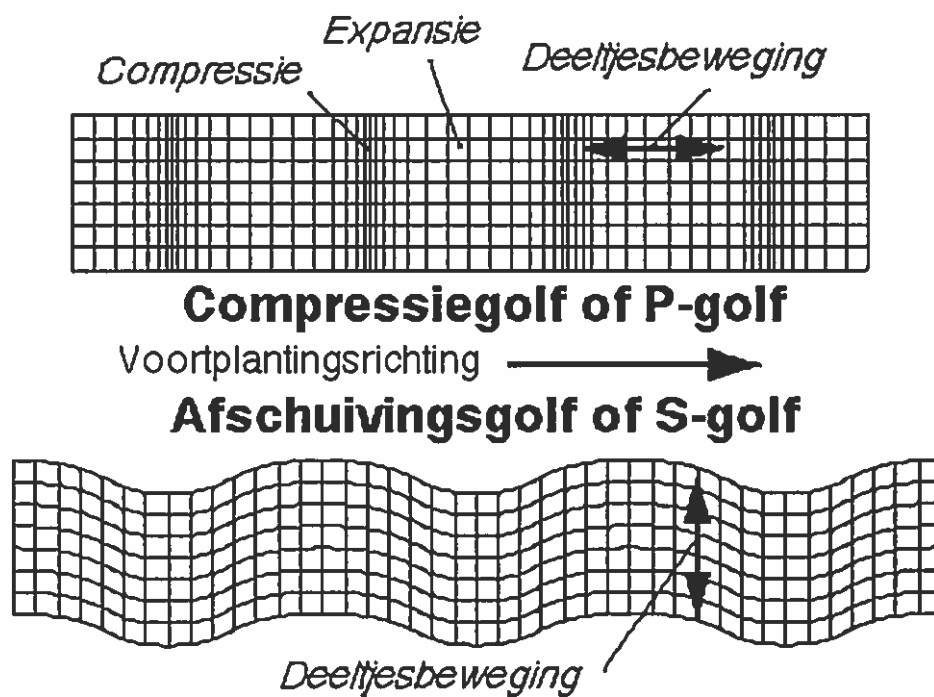
$$\delta(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) . \quad (1.42)$$

met  $c^2=G/\rho$ . Dit zijn zogenaamde *afschuivingsgolven* ("shear waves"). Deze golven komen niet voor in vloeistoffen (water en lucht).

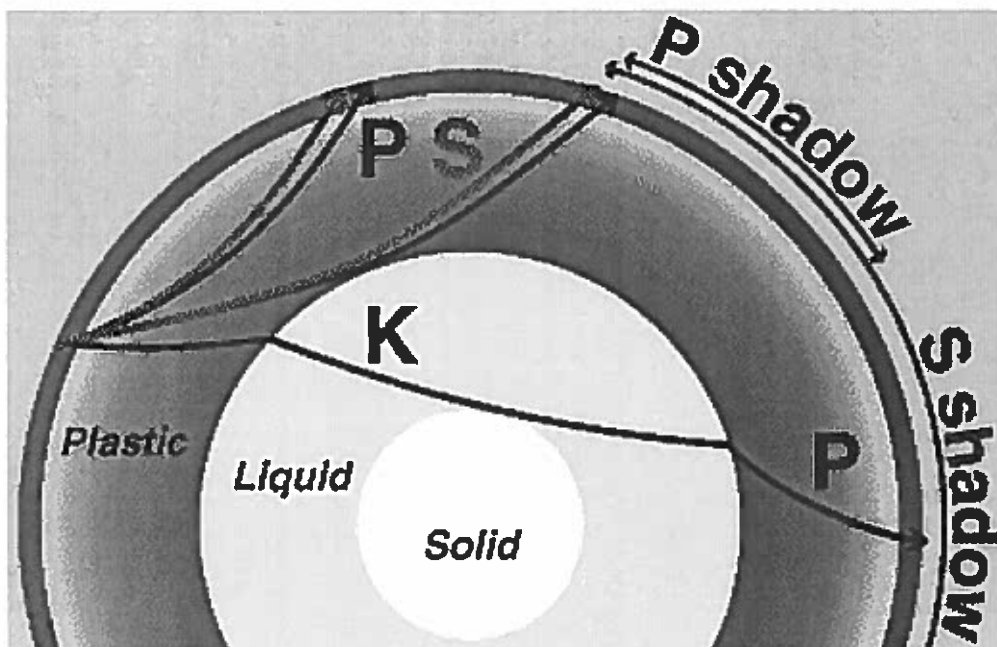
Ook deze beschouwing is sterk gesimplificeerd. De passage van een afschuivingsgolf wordt gekarakteriseerd door roterende bewegingen van volume-elementen in het vlak loodrecht op de voortplantingsrichting. Daarom worden deze golven ook wel *torsiegolven* genoemd.

Compressiegolven en afschuivingsgolven (zie figuur 1.16) in de aarde (zogenaamde seismische golven) worden opgewekt door aardbevingen. Omdat in het algemeen  $Y > G$  zijn compressiegolven sneller dan afschuivingsgolven. Daarom wordt de compressiegolf ook wel "*Primary wave*" of *P-golf* genoemd. De afschuivingsgolven worden aangeduid als "*Secondary wave*" of *S-golf*. Omdat *P*-golven hun bestaan danken aan samendrukbaarheid, komen deze golven voor in zowel vaste stoffen als in vloeistoffen zoals water en lucht. De theoretische analyse van de voortplanting van compressiegolven door gassen (zoals lucht) is echter gecompliceerder dan hierboven weergegeven, omdat de benadering van constante dichtheid niet kan worden gemaakt (zie sectie 4.3).

Uit de registraties van seismische golven veroorzaakt door aardbevingen tezamen met o.a. de kennis dat *S*-golven zich niet in een vloeistof voortplanten kunnen seismologen afleiden dat een deel van de kern gesmolten moet zijn. Dit wordt in figuur 1.17 geïllustreerd.

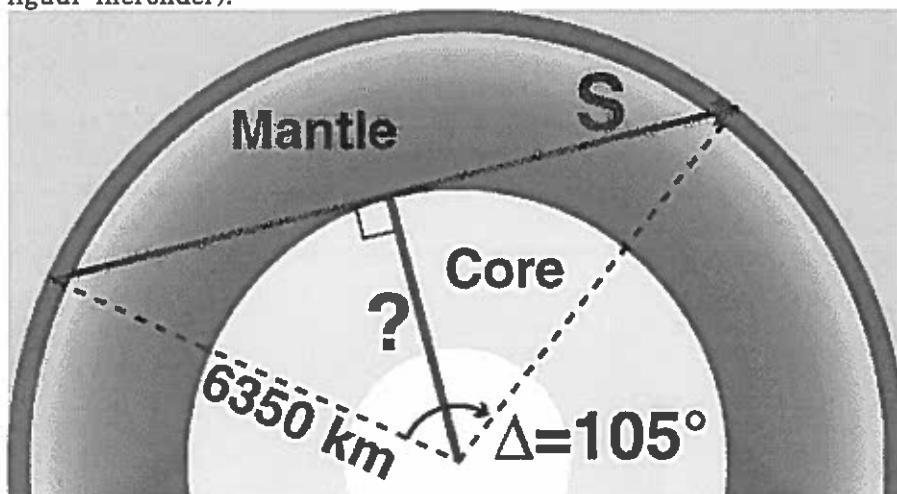


Figuur 1.16. Zie de tekst.



Figuur 1.17. De voortplanting van P- en S-golven door de aarde.

Opgave. 1.1. Het karakter van de registratie van seismische golven, veroorzaakt door een aardbeving, verandert drastisch als de aardbeving meer dan een zekere afstand van het seismograaf ligt. In graden bedraagt deze afstand ongeveer  $105^\circ$ . Op afstanden groter dan  $105^\circ$  worden er geen S-golven meer geregistreerd. Men kan hieruit een eerste schatting maken van de grootte van de kern van de aarde. Maak deze schatting (zie de figuur hieronder).



Illustratie bij opgave 1.1.

### 1.11 Weerstand tegen spanningen in vloeistoffen (viscositeit)

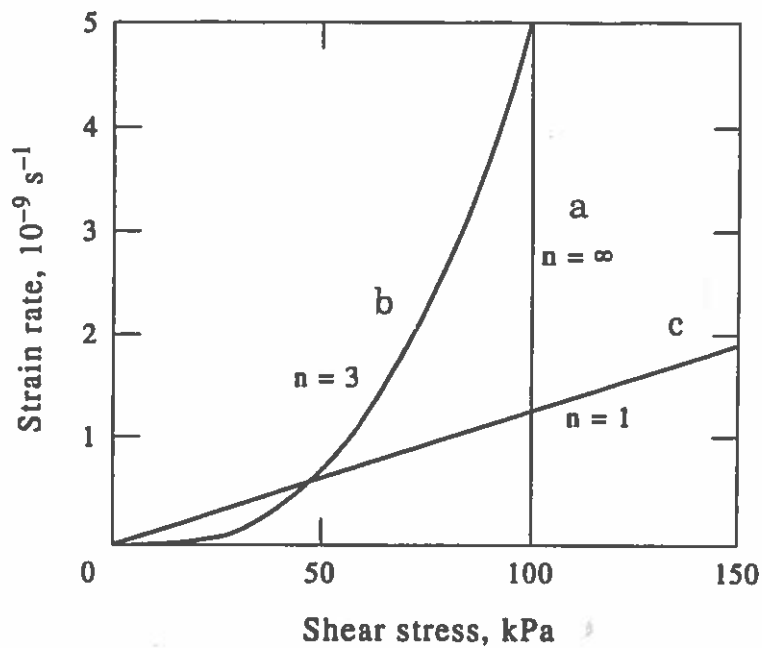
Een materiaal dat vloeit (dus continu deformeert) onder invloed van een aangebrachte spanning is een vloeistof. In vaste stoffen is de deformatie evenredig met de spanning. In vloeistoffen is de deformatiesnelheid ("rate of deformation" of "strain rate") evenredig met de spanning ("stress"). Een deformatiesnelheid in een vloeistof hangt samen met een verschil in snelheden van vloeistofelementen, ofwel met ruimtelijke snelheidsgradiënten. De vergelijking die de snelheidsgradient relateert aan de spanning (die het gevolg is van de weerstand die het ene vloeistof element uitoefent op het andere), wordt aangeduid als de *rheologische wet* voor de vloeistof. De meest eenvoudige *rheologische wet* is die van Newton.

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \quad (1.43)$$

waarin  $\tau$  de schuifspanning t.g.v. de schering van vloeistoflagen,  $v$  de snelheid,  $r$  de coördinaat loodrecht op de snelheid en de evenredigheidsconstante  $\eta$  de viscositeitscoëfficiënt. Lucht en water beantwoorden in zeer goede benadering aan de rheologische wet van Newton, en worden daarom ook *Newtoniaanse vloeistoffen* genoemd. Op ijs is de rheologische wet van Glen van toepassing. Deze luidt

$$(\tau)^n = \eta \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (1.44)$$

Voor een Newtoniaanse vloeistof geldt  $n=1$ . Voor ijs is  $n=1.5-4.2$  en  $\eta$  (ook wel aangeduid als de *hardheidsparameter*) hangt af van de temperatuur, de orientatie van de ijskristallen en van vele andere factoren. Voor theoretische ijsstroomstudies wordt vaak  $n=3$  gekozen. Ook wordt weleens aangenomen dat  $n=-\infty$  voor  $\tau < \tau_0$  en  $n=\infty$  voor  $\tau > \tau_0$ . Dat wil zeggen dat ijs zich gedraagt als een *perfect plastische* materiaal. Zo'n materiaal begint pas te deformeren als de aangebrachte spanning een zwichtspanning ("yield-stress"),  $\tau = \tau_0$ , overschreidt. In dat geval zal het materiaal blijven vervormen bij een constante spanning. Figuur 1.18 toont het verband tussen



Figuur 1.18. De relatie tussen schering en schuifspanning voor (a) een plastisch materiaal met zwichtspanning = 100 kPa, (b) een niet Newtoniaanse vloeistof waarvoor  $n=3$  en  $A=1/\eta=5 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1} (\text{kPa})^{-3}$ , (c) een Newtoniaanse vloeistof met viscositeit,  $\eta=8 \times 10^{18} \text{ Pa s}$  (uit Paterson).

schuifspanning en deformatiesnelheid voor de verschillende materialen. De rechte lijn in de grafiek geldt voor een zeer visceuze vloeistof met een viscositeitscoëfficiënt van  $8 \times 10^{13}$  Pa s. Ter vergelijking: de viscositeitscoëfficiënten van, respectievelijk, lucht, water en olijfolie zijn  $1.78 \times 10^{-5}$  Pa s,  $1.14 \times 10^{-3}$  Pa s en  $0.99 \times 10^{-1}$  Pa s. De mantel van de aarde is, voorzover vloeibaar, nog veel visceuzer dan ijs. De lithosfeer is elastisch terwijl de asthenosfeer "met moeite" vloeit want de viscositeitscoëfficiënt van dit deel van de mantel (zie figuur 1.4) wordt geschat op  $10^{20}$  Pa s.

In plaats van de viscositeit wordt bijna altijd gesproken over de kinematische viscositeit,  $\nu = \eta/\rho$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ] (niet verwarren met Poisson's verhouding). De kinematische viscositeit van, respectievelijk, olijfolie, water en lucht is ongeveer  $10^{-4} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$  en  $10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ .

### 1.12 Specifieke warmte en warmtegeleiding

Als twee monsters ( $a$  en  $b$ ) van verschillende samenstelling en van verschillende temperatuur ( $T_a$  en  $T_b$ ) met elkaar in direct contact worden gebracht, bepaalt de massa van elk monster en de zogenaamde *specifieke warmte* van elk monster wat de temperatuur van het systeem als geheel zal zijn als thermisch evenwicht is hersteld. Stel dat de massa van elk monster identiek is ( $m_a = m_b$ ). De temperatuurverandering die elk monster ondergaat tijdens de overgang naar een nieuw thermisch evenwicht (waarbij geen fase-overgangen plaatsvinden) wordt beschreven door de volgende eenvoudige vergelijking:

$$\frac{\Delta T_a}{\Delta T_b} = \frac{-c_b}{c_a} . \quad (1.45)$$

Hierin zijn de parameters  $c_a$  en  $c_b$  de specifieke warmte capaciteit van, respectievelijk, monster  $a$  en monster  $b$ . De inverse van de specifieke warmte van een monster is een maat voor de "gewilligheid" waarmee het monster temperatuurveranderingen ondergaat als het in contact wordt gebracht met een ander monster dat een andere temperatuur heeft. Experimenten tonen aan dat

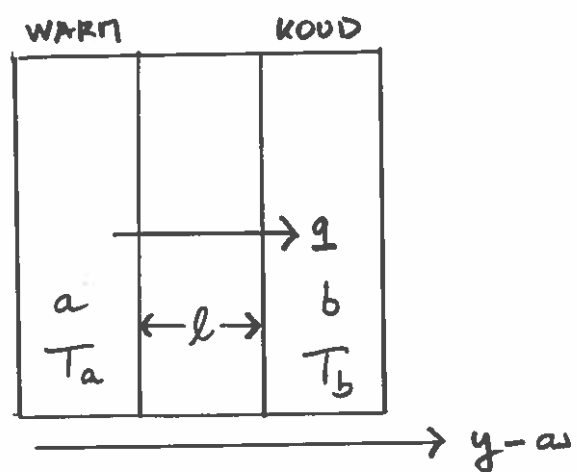
$$m_a c_a \Delta T_a = -m_b c_b \Delta T_b . \quad (1.46)$$

Deze vergelijking suggereert dat monster  $a$  evenveel aan "warmte" verliest als monster  $b$  aan "warmte" wint. Warmte is een vorm van energie (*thermische energie*). Vergelijking (1.46) is dus een uitdrukking van de wet van behoud van thermische energie. In hoofdstuk 5 zal verder worden ingegaan op de uitwisselbaarheid van mechanische en thermische energie.

Stel nu dat monster  $a$  en monster  $b$  niet direct contact hebben, maar in contact staan via een ander medium (zie figuur 1.19). Door de wanordelijke beweging van individuele moleculen in dit medium zal er transport van warmte (ofwel warmtegeleiding) plaatsvinden tussen monster  $a$  en monster  $b$ . Dit transport van warmte wordt beschreven door de "*Wet van Fourier*". Stel bijvoorbeeld dat  $a$  en  $b$  op afstand  $l$  worden gehouden, en dat  $T_a - T_b = \Delta T$ . De Wet van Fourier stelt dat het warmte transport  $q$  evenredig is met het temperatuur verschil  $\Delta T$  en omgekeerd evenredig is met de afstand  $l$ . Dit leidt tot de formule

$$q = -k \frac{\Delta T}{l} = -k \frac{dT}{dy} . \quad (1.47)$$

Hierin is  $k$  de thermische geleidingscoëfficiënt, die een eigenschap is van het materiaal dat  $a$  en  $b$  scheidt. De grootte  $q$  wordt ook *warmteflux* genoemd. Het min-teken verschijnt omdat de warmtestroom van hoge naar lage temperaturen plaatvindt. In de vaste lithosfeer is moleculaire diffusie van warmte het belangrijkste mechanisme voor warmtetransport.



Figuur 1.19. (zie de tekst)

Beschouw nu het process van warmtegeleiding door een blok met een dikte  $\delta y$  (figuur 1.20). De warmteflux door het vlak  $y=y$  is  $q(y)$ ; de warmteflux door het vlak  $y=y+\delta y$  is  $q(y+\delta y)$ . De warmtefluxdivergentie is dus  $q(y+\delta y)-q(y)$ . Met een Taylorreeks benadering wordt dit

$$q(y+\delta y) - q(y) = \delta y \frac{dq}{dy} + \dots \quad (1.48)$$

Als we de hogere orde termen verwaarlozen (dus voor kleine  $\delta y$ ) wordt dit met de Wet van Fourier

$$q(y+\delta y) - q(y) = \delta y \frac{d}{dy} \left( -k \frac{dT}{dy} \right). \quad (1.49)$$

De divergentie van de warmteflux gaat gepaard met een temperatuurverandering. In dat geval is de temperatuur niet alleen een functie van  $y$ , maar ook een functie van  $t$  (de tijd). De warmtecapaciteit per oppervlakte-eenheid van het blok is  $\rho C \delta y$  ( $C$  is de specifieke warmtecapaciteit [ $J K^{-1} Kg^{-1}$ ] (zie ook sectie 5.2);  $\rho$  is de dichtheid van het materiaal). Dus

$$\rho C \delta y \frac{\partial T}{\partial t} = -\delta y \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (1.50)$$

Met  $k$  een constante wordt dit

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (1.51)$$

of ook

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (1.52)$$

Hierin is  $\kappa$  de thermische diffusiviteit. De waarde van  $\kappa$  in respectievelijk de aardkorst, de atmosfeer en de oceaan is ongeveer  $10^{-6} m^2 s^{-1}$ ,  $2 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$  en  $10^{-7} m^2 s^{-1}$ . Vergelijking (1.52) wordt ook wel aangeduid als de *diffusievergelijking*.

De warmte in de aarde wordt geproduceerd door radioactief verval van bijvoorbeeld uranium en wordt door diffusie (of geleiding) naar buiten getransporteerd. Het effect van een interne warmtebron levert een bronterm op in de temperatuurvergelijking als volgt

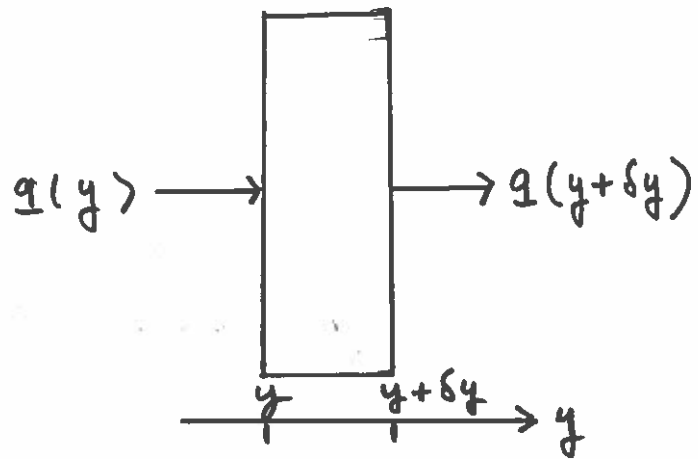
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{H}{C}, \quad (1.53)$$

waarin  $H$  de interne warmteproductie per massa-eenheid en per tijdseenheid. De temperatuurvergelijking. Deze warmteproductie  $H$  wordt in de mantel geschat op  $7 \times 10^{-12} W kg^{-1}$ . In een stationaire toestand wordt dit

$$C \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + H = 0. \quad (1.54)$$

Integratie van deze vergelijking geeft een parabolische temperatuurprofiel als  $H \neq 0$  en een lineair temperatuurprofiel als  $H=0$ .

Vergelijking (1.52) is ook van toepassing op het process van warmtegeleiding in de bovenste tientallen meters van de aarde of van een ijskap waarin geen smelt plaatsvindt. Als het medium homogeen is, oneindig diep en de temperatuur aan de



Figuur 1.20. Warmtestroom door een voorwerp.

bovenkant onder invloed van de dagelijkse gang van de temperatuur in de atmosfeer varieert als

$$T(0,t) = T_0 + T_S \sin(\omega t), \quad (1.55)$$

waarin  $T_S$  de amplitude en  $\omega$  de frequentie, dan is de oplossing van vgl. (1.52) met (1.55) als randvoorwaarde ( $y > 0$ )

$$T(y,t) = T_0 + T_S \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) \sin\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right). \quad (1.56)$$

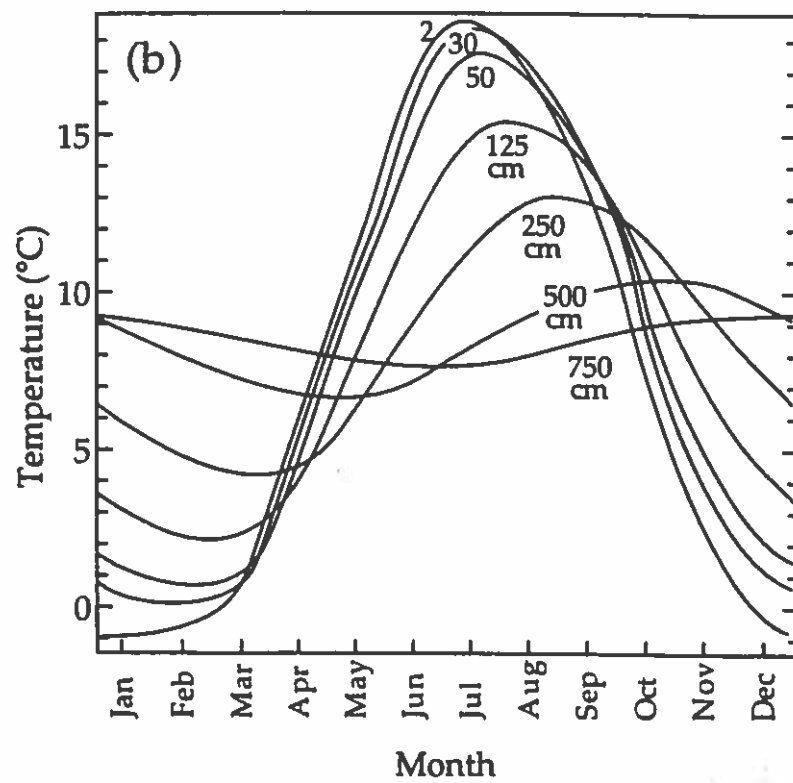
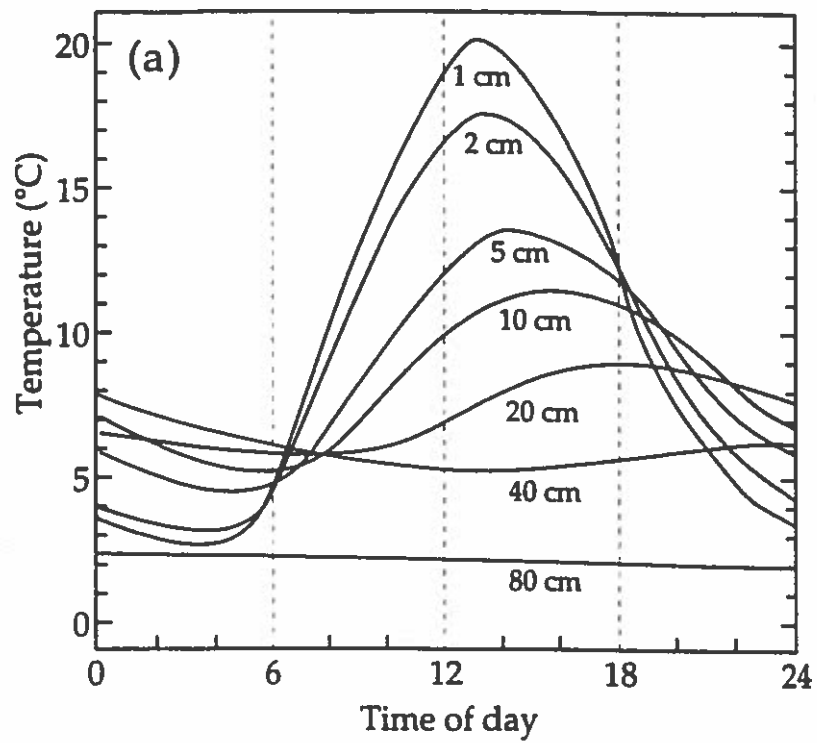
We zien dat de oscillatie met een zekere vertraging in het medium doordringt. We zien ook dat de amplitude van de oscillatie exponentieel afneemt over een karakteristieke afstand,

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}. \quad (1.57)$$

Hiermee kan de penetratie in de bodem van de temperatuuroscillatie, die aan het aardoppervlak wordt geïnduceerd door de dagelijkse gang ( $\omega = 0.73 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) in de stralingsbalans, worden berekend.

**OPGAVE 1.2.** Als voor de diffusiviteit van de bodem wordt aangenomen dat  $\kappa = 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , dan wordt  $\lambda$  ongeveer 5 cm. De penetratiediepte van de jaarlijkse gang is veel groter (ga na hoeveel groter). Komen deze resultaten overeen met de metingen die in figuur 1.21 worden getoond?

**LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK:** Peixoto en Oort, Pond en Pickard, Moore, Lowrie, Turcotte en Schubert, Paterson, Fowles en Cassidy (hoofdstuk 2), Feynman.



Figuur 1.21. Dagelijkse (boven) en jaarlijkse (onder) temperatuurvariatië op verschillende dieptes in zandgrond.

## 2

### BESCHRIJVING VAN DE STROMING

---

#### 2.1 Stroomlijnen en trajectoriën

Geofysische stromingsleer is een onderdeel van de mechanica van continue media en houdt zich dus niet bezig met het gedrag van individuele elementaire deeltjes maar met een continue verdeling van materie in de ruimte. Als we hier spreken van een vloeistofelement bedoelen we een kleine hoeveelheid van deze materie, b.v. één massa-eenheid. Er zijn twee manieren om het gedrag en de eigenschappen van zo'n medium te beschrijven.

In het eerste geval richten we onze aandacht op een bepaald deeltje dat gekenmerkt wordt door zijn coördinaten  $x_0, y_0, z_0$  op het begintijdstip  $t=0$ . Als  $\xi$  een willekeurige eigenschap van zo'n deeltje voorstelt, bijvoorbeeld de temperatuur of de snelheid, dan schrijven we  $\xi = \xi(x_0, y_0, z_0, t)$ . De positie in de ruimte op een bepaald tijdstip  $t$  wordt gegeven door de coördinaten  $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$ ,  $y = y(x_0, y_0, z_0, t)$ ,  $z = z(x_0, y_0, z_0, t)$ . De snelheidsvector voor dit deeltje heeft de componenten  $u = dx/dt$ ,  $v = dy/dt$ ,  $w = dz/dt$ , terwijl de versnelling wordt gegeven als.

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Deze beschrijving van het medium wordt Lagrangiaans genoemd.

Een andere mogelijkheid is om de eigenschappen van het medium in een bepaald punt in de ruimte te beschouwen. In dit geval beschrijven we in feite het gedrag van steeds verschillende deeltjes die een punt met de coördinaten  $x, y, z$  passeren. De willekeurige eigenschap  $\xi$  wordt dan geschreven als  $\xi(x, y, z, t)$  en de snelheidsvector heeft de componenten  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$ . Aan deze ruimtelijke beschrijving, de zogenaamde Euleriaanse methode wordt in het algemeen de voorkeur gegeven.

Als we op een gegeven tijdstip de snelheidsvectoren in verschillende punten grafisch voorstellen dan ontstaat een patroon van zogenaamde stroomlijnen. De vergelijking voor een stroomlijn volgt uit de eis dat de snelheidsvector in elk punt moet raken aan de stroomlijn door dat punt, dus als  $\mathbf{v}$  de snelheidsvector is met componenten,  $u, v, w$ , en  $ds$  een lijnelement met componenten  $dx, dy, dz$ , dan

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.1)$$

waarbij de tijd  $t$  constant wordt verondersteld.

Als we daarentegen de baan van een bepaald deeltje op een Lagrangiaanse manier volgen dan spreken we van een trajectorie. Deze wordt beschreven door het stelsel vergelijkingen

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{of} \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (2.2)$$

De stroomlijnen en trajectoriën vallen samen als het stromingspatroon onafhankelijk is van de tijd, d.w.z. als de stroming stationair (steady) is (zie verder in sectie 6.8).

#### 2.2 Materiële en lokale afgeleiden

We beschouwen nu het verband tussen de eigenschappen van een bewegend deeltje en de toestand van het medium op een bepaalde plaats. Als  $\xi(x, y, z, t)$  een

willekeurige eigenschap voorstelt van een deeltje dat zich op het tijdstip  $t$  in het punt  $x, y, z$  bevindt dan kan de differentiaal geschreven worden als

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz$$

Dus met behulp van (2.2)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.3)$$

Het linkerlid stelt de verandering voor in de eigenschap van het deeltje en wordt daarom de totale of materiële afgeleide genoemd (ook wel individuele of substantiële afgeleide). De eerste term van het rechterlid is de verandering op een bepaalde plaats en heet dus de lokale afgeleide. De laatste drie termen tezamen duiden op het transport of de advection ten gevolge van de stroming. De materiële afgeleide wordt door andere auteurs dikwijls aangeduid met een grote letter 'D' in plaats van een kleine letter 'd', bijvoorbeeld als  $D\xi/Dt$ . De kleine letter 'd' wordt dan gebruikt voor de afgeleide van functies van één variabele.

De relatie (2.3) geldt voor een willekeurige eigenschap en dus ook voor de bewegingsvector, maar in dat geval worden de laatste drie termen gewoonlijk de convectieve versnelling genoemd. De materiële en de lokale afgeleiden van de snelheid heten natuurlijk de materiële en de lokale versnellingen.

Een eenvoudige voorstelling van het begrip advection kan verkregen worden door een beweging te beschouwen langs de  $x$ -coördinaat zodat  $v = w = 0$ . Als we nu stellen dat de eigenschap  $\xi$  niet verandert terwijl een deeltje zich voortbeweegt door de ruimte ( $d\xi/dt=0$ ) dan volgt uit (2.3)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.4)$$

Voor een stroming in de richting van toenemende  $\xi$  is het rechterlid negatief en dus verkrijgt men een lokale afname van  $\xi$ . Dit betekent eenvoudig dat men deeltjes met steeds lagere waarden van  $\xi$  voorbij ziet bewegen.

De oplossing van (2.4) voor  $u=u_0=\text{constant}$  is

$$\xi = f(x - u_0 t),$$

waarin  $f(x)$  de beginvoorwaarde (op  $t=0$ ). Vergelijking (2.4) met  $u=\text{constant}$  beschrijft dus een golfbeweging. Het initiele profiel  $f(x)$  verplaatst zich in één richting terwijl het niet van vorm verandert.

**OPGAVE 2.1.** De luchtdruk aan de grond stijgt met 14.1 Pa per km in noordwestelijke richting. Op een schip, dat met 10 km per uur in noordelijke richting vaart, stijgt de druk met 30 Pa per uur. Wat is de luchtdruk-tendens aan de grond (in Pa per uur) op een dichtbij gelegen eiland?

**OPGAVE 2.2.** De temperatuur op een punt 50 km ten noorden van een weerstation is 3°C lager dan op het weerstation zelf. De wind waait uit het noordoosten met een snelheid van 20 m s<sup>-1</sup>. Wat is de locale adiabatische verandering (in °C per uur) van de temperatuur op het weerstation als het temperatuur verval van zuid naar noord lineair verloopt, terwijl er geen temperatuurgradiënten heersen in oostelijke richting?

### 2.3 Natuurlijke coördinaten en de relatie tussen trajectoriën en stroomlijnen.

We introduceren het zogenaamde natuurlijke coördinaten stelsel, dat gerelateerd is aan de beweging van de vloeistof deeltjes zelf. We beperken ons tot horizontale beweging. Laat  $\mathbf{t}$  de eenheidsvector zijn in de richting van de instantane beweging op een willekeurig punt. De snelheid  $\mathbf{v}_h$  kan dan worden uitgedrukt als  $\mathbf{v}_h = V_h \mathbf{t}$ , waarin  $V_h$  de horizontale component van de windsnelheid is. De versnelling wordt dus gegeven door

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = \frac{dV_h}{dt} \mathbf{t} + V_h \frac{d\mathbf{t}}{dt} . \quad (2.5)$$

Beschouw nu de grootte  $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$  terwijl het deeltje langs zijn trajectorie (of pad) vanuit een punt P (zie figuur 2.1) een kleine afstand  $ds$  in een tijd  $dt$  aflegt:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = V_h \frac{d\psi}{ds} \mathbf{n} = V_h K_t \mathbf{n} , \quad (2.6)$$

waarin  $\psi$  de hoek is tussen de twee opeenvolgende lijnen die loodrecht vanuit de trajectorie samenkomen in de zogenaamde "centre of curvature".  $\mathbf{n}$  is de eenheidsvector in de richting loodrecht op de trajectorie ( $\mathbf{n}$  is positief naar links van  $\mathbf{t}$ ). De kromming van de trajectorie is gedefinieerd als  $K_t = d\psi/ds$ . Substitutie van (2.6) in (2.5) levert

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = \frac{dV_h}{dt} \mathbf{t} + V_h^2 K_t \mathbf{n} = \frac{dV_h}{dt} \mathbf{t} + \frac{V_h^2}{R_t} \mathbf{n} , \quad (2.7)$$

waarin  $R_t = 1/K_t$  de kromtestraal is van de trajectorie. Het teken van  $R_t$  hangt af van de draairichting van het deeltje. Als de beweging cyclonaal is (tegen de wijzers van de klok in), dan is  $R_t > 0$ . De versnelling bestaat dus uit een tangentiële component en een centripetale component die het gevolg is van de kromming van de trajectorie.

Alleen als het stromingspatroon stationair in de tijd is, vallen trajectoriën en stroomlijnen samen. Dit is echter bijna nooit het geval. Dit betekent dat de kromtestralen,  $R_t$  en  $R_s$ , bijna nooit hetzelfde zullen zijn. Een exakte relatie tussen deze twee grootheden wordt gegeven door de formule van Blaton. We zullen deze formule nu afleiden.

De kromming van de trajectoriën is  $K_t = d\psi/ds$ . Aangezien

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{ds}$$

( $t$  is de tijd) kan  $K_t$  worden uitgedrukt als

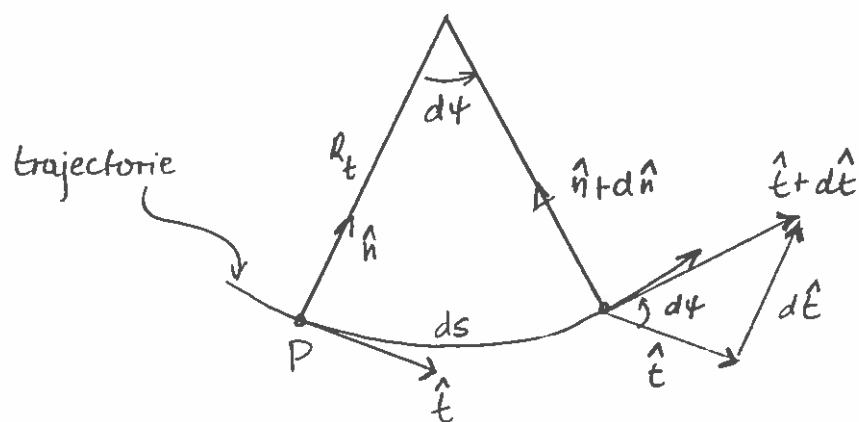
$$K_t = \frac{1}{V} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + V \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + V K_s \right) \quad (2.8)$$

(de stroming is horizontaal).  $K_s$  is de kromming van de stroomlijn, ofwel de verandering van  $\psi$  over de afstand  $s$  op een vast moment.

Uit (2.8) volgt een relatie tussen  $K_t$  en  $K_s$ .

$$K_t = K_s + \frac{1}{V} \frac{\partial \psi}{\partial t} . \quad (2.9)$$

Deze formule geeft aan dat  $K_t$  en  $K_s$  van elkaar verschillen als de stroomrichting op een vast punt verandert. Stel dat de stroomrichting op een vast punt in de ruimte alleen verandert in de tijd vanwege de translatie met snelheid,  $\mathbf{C}$ , zonder



Figuur 2.1. (zie tekst).

vervorming, van het stroomlijnenpatroon, bijvoorbeeld de verplaatsing naar het oosten van een cycloon. Dan geldt het volgende.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -C \cdot \nabla \psi = -C \cos \gamma \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{-C}{R_s} \cos \gamma . \quad (2.10)$$

Hierin is  $\gamma$  de hoek tussen de stroomlijnen en de richting waarin het systeem van stroomlijnen beweegt. De formule van Blaton wordt dus,

$$K_t = K_s \left( 1 - \frac{C}{V} \cos \gamma \right) = \frac{K_s}{V} (V - C \cos \gamma) . \quad (2.11)$$

Als  $V < C \cos \gamma$ , dan zijn  $K_t$  en  $K_s$  verschillend van teken. Met andere woorden, in een snel trekkende cycloon, waarin  $K_s > 0$ , kunnen de trajectoriën anticyclonaal worden.

## 2.4 Versnelling in een roterend systeem

In de beschrijving van grootschalige bewegingen in de atmosfeer en de oceaan speelt de rotatie van de aarde een belangrijke rol. Terwijl we deze bewegingen waarnemen in een relatief coördinatensysteem dat gekoppeld is aan het roterende aardoppervlak, gelden de fundamentele bewegingswetten in feite voor een absoluut of inertiaal systeem. Aangezien de bewegingswetten betrekking hebben op versnellingen van het medium moeten we dus eerst de samenhang bepalen tussen de versnellingen in een roterend en een inertiaal systeem.

We stellen ons een bol voor die met hoeksnelheid  $\Omega$  om zijn as draait en we nemen aan dat de snelheidsvector  $\mathbf{v}$  en de versnelling  $d\mathbf{v}/dt$  betrekking hebben op het roterende systeem terwijl  $[d\mathbf{v}/dt]_a$  de versnelling is in het absolute systeem. Voor een punt op afstand  $r$  van het middelpunt van de bol volgt dan uit de klassieke mechanica (zie bijvoorbeeld Fowles and Cassiday, 1993) de relatie (zie figuur 2.2)

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2 \Omega \times \mathbf{v}$$

Als we verder de vector  $\mathbf{R}$  definiëren als de afstand van het bovengenoemde punt tot de omwentelingsas, met dien verstande dat  $\mathbf{R}$  naar buiten gericht is, dan kunnen we ook schrijven

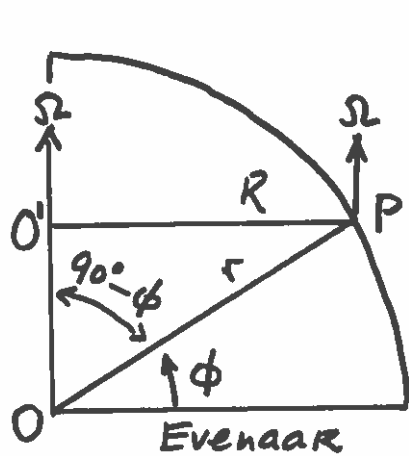
$$\left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \Omega^2 \mathbf{R} + 2 \Omega \times \mathbf{v} . \quad (2.12)$$

De tweede term van het rechterlid is het gevolg van centrifugale krachten terwijl de laatste term bekend staat als de Coriolisversnelling. Voor de aarde geldt  $\Omega = 2\pi/\text{sterredag} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

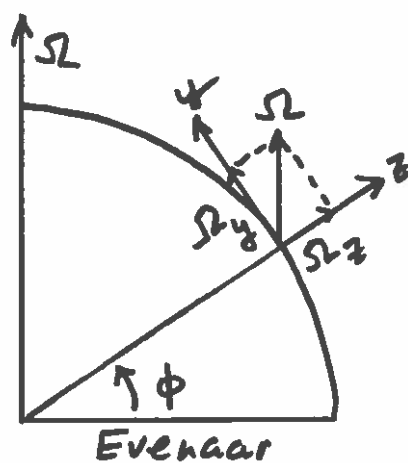
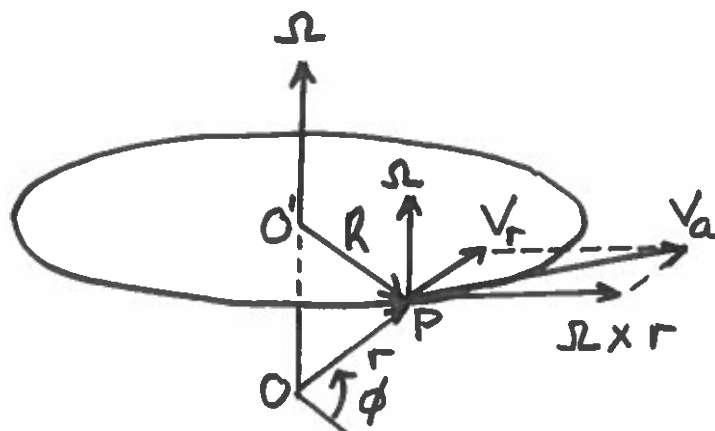
## 2.5 Bolcoördinaten

De volgende stap is om de versnellingen te ontbinden in de componenten langs de drie coördinaten van het roterende stelsel. Deze coördinaten worden gewoonlijk zo gekozen dat de eerste twee tangentieel zijn aan het aardoppervlak, waarbij de  $x$ -as naar het oosten wijst en de  $y$ -as naar het noorden. De  $z$ -as staat loodrecht op het oppervlak en wijst naar boven. Deze zgn. kromlijnige coördinaten kunnen als volgt uitgedrukt worden in de bolcoördinaten:  $\lambda$  (lengtegraden),  $\varphi$  (breedtegraden) en  $r_0$  (straal van de aarde)

$$dx = (r_0 \cos \varphi) d\lambda , \quad dy = r_0 d\varphi , \quad dz = dr . \quad (2.13)$$



Figuur 2.2. (zie tekst).



Figuur 2.3. (zie tekst).

De bijbehorende componenten van de snelheidsvector  $\mathbf{v}$  zijn

$$u = (r_0 \cos \varphi) \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r_0 \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt}.$$

De richtingen van de eenheidsvectoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  in dit stelsel zijn van plaats tot plaats verschillend. Voor een bewegend deeltje kunnen we schrijven

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw}{dt} \mathbf{k} + u \frac{d\mathbf{i}}{dt} + v \frac{d\mathbf{j}}{dt} + w \frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Hieruit kunnen de drie componenten van de versnelling afgeleid worden in de volgende vorm (zie bijvoorbeeld Pedlosky, 1987, of Holton, 1979)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left( \frac{du}{dt} - \frac{uv}{r_0} \tan \varphi + \frac{uw}{r_0} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r_0} \tan \varphi + \frac{vw}{r_0} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r_0} \right) \mathbf{k}, \quad (2.14)$$

waarbij de materiële versnellingen van de bewegingscomponenten gedefinieerd zijn door (2.3).

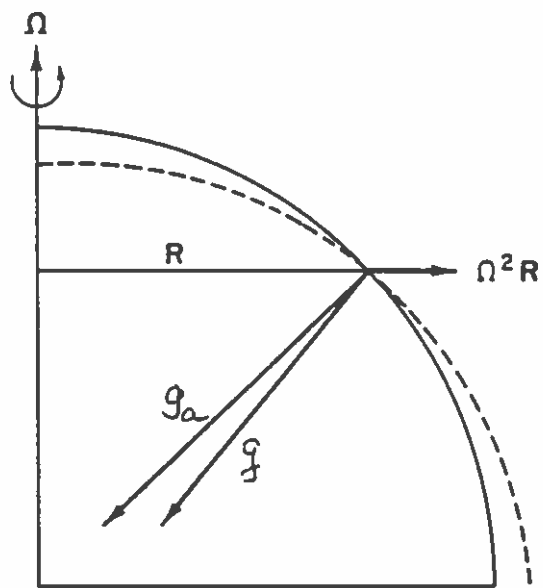
De componenten van de Coriolisversnelling worden gevonden door te bedenken dat de rotatievector in ons nieuwe coördinatenstelsel twee componenten heeft, nl. (zie figuur 2.3)

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega \cos \varphi) \mathbf{j} + (\Omega \sin \varphi) \mathbf{k}.$$

Daaruit volgt

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \{ (2\Omega \sin \varphi)v - (2\Omega \cos \varphi)w \} \mathbf{i} - (2\Omega \sin \varphi)u \mathbf{j} + (2\Omega \cos \varphi)u \mathbf{k}. \quad (2.15)$$

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Fowles en Cassidy (hoofdstuk 5), Holton, Haltiner en Martin en Pedlosky.



Figuur 3.1.

## 3 BEWEGING

### 3.1 Uitwendige en inwendige krachten

Volgens de tweede wet van Newton (zie sectie 1.5) is de materiële versnelling van een deeltje gelijk aan de resultante van de op het deeltje werkende krachten per eenheid van massa. Deze krachten bestaan in het algemeen uit uitwendige en inwendige krachten. Als we de dichtheid van het continue medium met  $\rho$  aanduiden (massa gedeeld door volume) dan kunnen we voor een eenheidsvolume schrijven

$$\rho \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_a = \rho \mathbf{K} + \mathbf{P} \quad (3.1)$$

waar  $\mathbf{K}$  en  $\mathbf{P}$  respectievelijk de uitwendige krachten (per massaeenheid) en inwendige krachten (per volume-eenheid) voorstellen.

De belangrijkste uitwendige kracht is de aantrekkingskracht van de aarde (zie ook vgl. 1.3)

$$\mathbf{K} = \mathbf{g}_a = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.2)$$

waar  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ,  $M = 5,988 \times 10^{24} \text{ kg}$  en de gemiddelde straal van de aarde  $r=r_0=6371 \text{ km}$ . Andere uitwendige krachten die vooral in de oceanografie een belangrijke rol spelen zijn de getijverwekkende krachten maar die laten we op dit moment buiten beschouwing.

De inwendige krachten zijn samengesteld uit drukkrachten en inwendige wrijvingskrachten. De inwendige wrijvingskrachten zijn het gevolg van de viscositeit, de elasticiteit en/of de stijfheid van het medium en hangen nauw samen met de deformatie van stoffen (zie hoofdstuk 1). We zullen in hoofdstuk 14 op dit onderwerp terugkomen. De drukkrachten zijn het gevolg van ruimtelijke variaties in de druk. De resulterende kracht per volume-eenheid is gelijk aan de gradient van het drukveld

$$\mathbf{P} = -\nabla p, \quad (3.3)$$

waar de gradientoperator in de kromlijnige coördinaten (2.6) geschreven kan worden als.

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

### 3.2 Bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijkingen in het roterende coördinatensysteem van het vorige hoofdstuk volgen door substitutie van (2.5), (3.2) en (3.3) in (3.1). Het resultaat is

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{R} + \mathbf{g}_a - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \quad (3.4)$$

Hierin is  $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$  de interne wrijvingskracht. De eerste twee termen van het rechterlid worden gecombineerd tot de effectieve zwaartekracht (gravity)  $\mathbf{g}$  en kunnen geschreven worden als de gradient van de zgn. geopotential  $\phi$

$$\mathbf{g}_a + \Omega^2 \mathbf{R} = \mathbf{g} = -\nabla \phi. \quad (3.5)$$

De vector  $\mathbf{g}$  is langs de  $z$ -as naar beneden gericht en mag als een constante behandeld worden. Dus  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$  en  $\phi = gz$  waar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  (zie figuur 3.1).

Met behulp van (2.7) en (2.8) vinden we de vergelijkingen voor de drie componenten van de snelheidsvector

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{r_0} \tan \varphi + \frac{uw}{r_0} - (2\Omega \sin \varphi) v + (2\Omega \cos \varphi) w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}, \quad (3.6)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{r_0} \tan \varphi + \frac{vw}{r_0} + (2\Omega \sin \varphi) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r_0} - (2\Omega \cos \varphi) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{F_z}{\rho}. \quad (3.8)$$

Als we aannemen dat  $\mathbf{F}=0$  dan zijn dit de *bewegingsvergelijkingen van Euler* voor een bolvormige aarde, waarbij de materiële versnellingen volgens (2.3) geschreven kunnen worden als

$$\frac{d(\dots)}{dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\dots). \quad (3.9)$$

### 3.3 Quasi-horizontale bewegingen in de atmosfeer en oceaan

Voor de grootschalige bewegingen in de atmosfeer en de oceaan zijn de drie componenten van de snelheidsvector niet van dezelfde grootte-orde. Om dit in te zien gaat men uit van het feit dat de verticale afmetingen van de atmosfeer en de oceanen typisch een tiental kilometers bedragen terwijl de grootschalige circulatiesystemen zich over vele duizenden kilometers uitstrekken. Volgens de beginselen van de zgn. schaal-analyse in de vloeistofmechanica kan men dan de bijbehorende snelheden schatten.

In het kort gezegd gaat men als volgt te werk. Men definieert verticale en horizontale 'lengteschalen' ( $H$  en  $L$ ) voor de beweging die men wil beschrijven en 'karakteristieke' verticale en horizontale snelheden ( $W$  en  $V$ ). Uit de continuïteitsvergelijking die we in hoofdstuk 5 zullen bespreken, vindt men dan dat de verticale snelheidscomponent zich verhoudt tot de horizontale snelheden als de verticale schaalhoogte tot de horizontale afmetingen van de beweging, dus

$$\frac{w}{u} \approx \frac{W}{V} = \frac{H}{L} \ll 1.$$

waar  $\approx$  betekent: van dezelfde grootte-orde. Dus voor zover het de grootschalige bewegingen betreft kan men stellen dat de verticale component  $w$  een aantal grootte-orde kleiner is dan de horizontale componenten van de snelheidsvector  $u, v$ . De vergelijkingen (3.6) en (3.7) mogen dan als volgt benaderd worden

$$\frac{du}{dt} - \left(f + \frac{u \tan \varphi}{r_0}\right) v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}, \quad (3.10)$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(f + \frac{u \tan \varphi}{r_0}\right) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho}, \quad (3.11)$$

waar we de Coriolisparameter

$$f = 2 \Omega \sin \varphi$$

ingevoerd hebben.

In de derde vergelijking (3.8) liggen de zaken niet zo duidelijk en in feite zullen we in het volgende hoofdstuk zien dat in de praktijk vaak het gehele linkerlid verwaarloosd kan worden. Er is echter een belangrijk punt dat we te allen tijde in

het oog moeten houden als we zo'n benadering invoeren in de vergelijkingen en dat is de voorwaarde van het behoud van energie ("energy consistency"). Dit betekent dat de vereenvoudigde vergelijkingen dezelfde energieomzettingen moeten beschrijven als het oorspronkelijke stelsel. Bijvoorbeeld de kinetische energie per massa-eenheid is gedefinieerd als  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} / 2$  en dus de materiële verandering van de kinetische energie is.

$$\frac{d}{dt} KE = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt}.$$

Na substitutie van de complete vergelijkingen (3.6) - (3.8) blijken alle termen aan de linkerkant (behalve de materiële afgeleiden) elkaar op te heffen, hetgeen te verwachten was omdat de energiebalans niet beïnvloed kan worden door de keuze van het coördinatenstelsel. Als men echter de vergelijkingen (3.10) en (3.11) combineert met (3.8), dan is dit duidelijk niet het geval, tenzij men de laatste vergelijking benadert als

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{F_z}{\rho}. \quad (3.12)$$

Het stelsel (3.10) - (3.12) vormt dus een energie-consistente benadering van het oorspronkelijke stelsel (3.6) - (3.8).

In het bovenstaande gingen we uit van grootschalige bewegingen om deze benaderingen in te voeren. Van de andere kant zien we ook onmiddellijk dat voor kleinschalige bewegingen de invloed van de richtingsveranderingen van de kromlijnige coördinaten niet belangrijk kan zijn. Afgezien van het feit dat in het laatste geval nog meer termen verwaarloosd kunnen worden, kunnen we dus stellen dat de bewegingsvergelijkingen in elk geval vereenvoudigd kunnen worden tot het systeem (3.10) - (3.12).

Wellicht ten overvloede mag nog benadrukt worden dat de verticale component van de advectie niet verwaarloosd kan worden ten opzichte van de horizontale componenten in (2.3) op basis van de voorgaande schaalanalyse. In feite moet namelijk de verhouding van de verticale afgeleide tot de horizontale afgeleiden van een grootheid omgekeerd evenredig verondersteld worden met de verhouding van de verticale tot de horizontale schalen

$$\frac{\partial \theta / \partial z}{\partial \theta / \partial x} \approx \frac{\partial \theta / \partial z}{\partial \theta / \partial y} \approx \frac{L}{H}.$$

Aangezien de snelheidscomponenten zich volgens het voorgaande verhouden als de betreffende lengteschalen geldt dus in eerste benadering

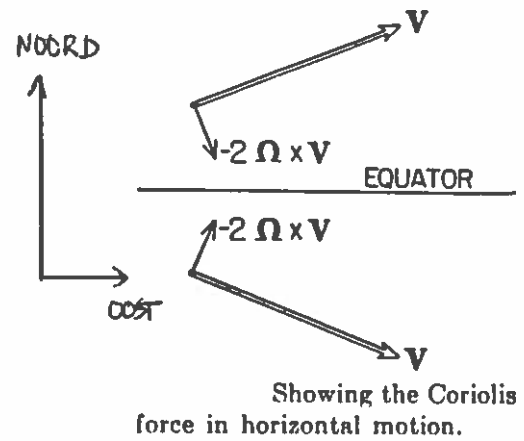
$$w \frac{\partial \theta}{\partial z} \approx u \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx v \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

### 3.4 Rossbygetal

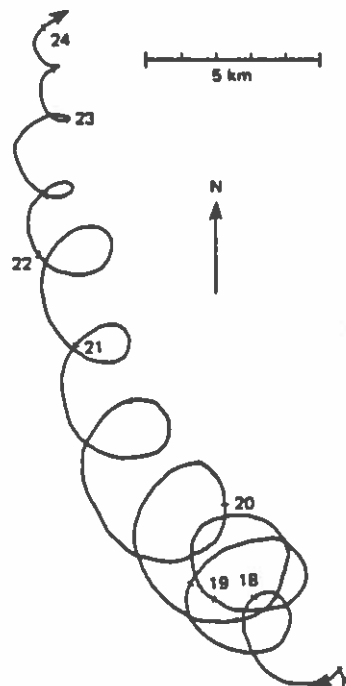
In de stromingsleer maakt men gebruik van dimensieloze getallen om bepaalde stromingen te karakteriseren. We zullen hier zo'n getal introduceren dat de invloed van de rotatie van de aarde op de stroming weergeeft. Daartoe passen we de bovengenoemde schaalanalyse toe op de bewegingsvergelijking (3.10) waarin we (2.3) substitueren. De lokale en verticale afgeleiden zowel als de druk laten we even buiten beschouwing en we vergelijken de volgende termen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \left( f + \frac{u \tan \varphi}{r_0} \right) v. \quad (3.13)$$

Figuur 3.2.



Figuur 3.3.



The historic current measurements in the Baltic by Gustafson and Kullenberg (1936), showing oscillations of near-inertial period. The plot is a progressive vector diagram, showing the displacement a particle would have, given the velocity observed at the current meter. The inertial period is 14 hr, and marks are shown 1 day apart. Note the anticyclonic sense of rotation.

Met de bovengenoemde karakteristieke schalen voor de horizontale afstand ( $L$ ) en de horizontale snelheid ( $V$ ) wordt de karakteristieke grootte van de eerste twee termen gelijk aan  $V^2/L$  terwijl de grootte-orde van de derde en de vierde term respectievelijk gelijk zijn aan  $fV$  en  $V^2/r_0$ .

De verhouding van de advectieve (of convectieve) versnelling tot de Coriolis term staat bekend als het Rosbygetal en is dus gedefinieerd als

$$Ro = \frac{V}{fL}. \quad (3.14)$$

Voor de grootschalige bewegingen in de atmosfeer en de oceaan is het Rosbygetal gelijk aan 0,01 - 0,1 en de Coriolisversnelling is dus belangrijker dan de advectieve versnelling. Voor de kleinschalige bewegingen zoals die men waarneemt in rivieren en laboratoria is het Rosbygetal natuurlijk veel groter. De effecten van de rotatie van de aarde zijn in die gevallen verwaarloosbaar. In het inwendige van de aarde, waar de ruimtelijke schalen groot zijn, zijn de snelheden zo klein dat ook hier de Corioliskracht verwaarloosd kan worden. In sectie 3.6 zal worden aangetoond dat voor stroming van ijs en gesteente ook de convectieve versnelling kan worden verwaarloosd t.o.v. het effect van viscositeit. De laatste term van (3.13) verhoudt zich tot de advectieve termen als  $L/r_0$  en kan dus alleen maar verwaarloosd worden ten opzichte van de laatst genoemden als de horizontale schaal van de beweging klein is ten opzichte van de straal van de aarde. Zulke bewegingen zullen de kromming van het aardoppervlak namelijk in mindere mate waarnemen. Dezelfde redeneringen gelden natuurlijk ook voor de tweede bewegingsvergelijking (3.11). Dit betekent dat de zogenaamde synoptische bewegingen (met  $L$  ongeveer gelijk aan of groter dan duizend kilometer) in de atmosfeer en de oceaan beschreven kunnen worden door de vereenvoudigde vergelijkingen

$$\frac{du}{dt} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}, \quad (3.15)$$

$$\frac{dv}{dt} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{F_y}{\rho}, \quad (3.16)$$

waarbij de eerste termen minder belangrijk zijn naarmate het Rosbygetal kleiner is.

De grootte van visceuze wrijvingskracht voor bewegingen in de oceaan met een horizontale schaal,  $L$ , in de orde van 1000 km en snelheden in de orde van  $1 \text{ m s}^{-1}$ , kan worden geschat als volgt.

$$\frac{F}{\rho} \approx \frac{\eta}{\rho} \frac{V}{L^2} \approx 10^{-6} \times 10^{-12} V = 10^{-18} V.$$

Dit is veel kleiner dan de Corioliskracht. De effecten van moleculaire viscositeit kunnen worden verwaarloosd

OPGAVE 3.1. Schrijf de vergelijkingen (3.15) en (3.16) in termen van dimensieloze grootheden. Definieer daartoe:

$$u = Uu^*; v = Uv^*; p = Pp^*; x = Lx^*; y = Ly^*; t = Tt^*.$$

Hierin zijn  $u^*, v^*, p^*, x^*, y^*$  en  $t^*$  dimensieloos.  $U$  [ $\text{m s}^{-1}$ ],  $L$  [m],  $P$  [ $\text{N m}^{-2}$ ] en  $T$  [s] zijn parameters. Stel dat

$$P = \rho U^2; T = \frac{L}{U}.$$

waarin  $\rho$  = constante dichtheid en  $f$  is de constante coriolis parameter. Laat zien dat de oplossing van de bovenstaande vergelijking uitsluitend wordt bepaald door één dimensieloze parameter (het Rossby getal). Is de Coriolis-term relatief onbelangrijk voor grote of voor kleine Rossby getallen?

### 3.5 Corioliskracht en inertiaalbeweging

Met het oog op de belangrijke rol die de Coriolisversnellingen spelen in de atmosfeer en de oceaan verdient het aanbeveling dit effect nader toe te lichten. Als de tweede term van (3.15) of (3.16) naar rechts overgebracht wordt, verschijnt deze term als een (schijn)kracht in de bewegingsvergelijking. Deze termen worden daarom wel Corioliskrachten genoemd. Door de vergelijkingen te combineren tot een enkele vergelijking voor de horizontale vector  $\mathbf{v}_h = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$  krijgen we

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = -\mathbf{k} \times f \mathbf{v}_h - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.17)$$

Daaruit blijkt dat de Corioliskracht een relatieve versnelling naar rechts veroorzaakt op het noordelijk halfrond waar  $f$  positief is (zie figuur 3.2).

Omdat een deeltje in het roterende coördinatenstelsel op het noordelijk halfrond voortdurend naar rechts versneld wordt, zal het een cirkelvormige baan gaan beschrijven als het geen andere krachten ondervindt. Om dit aan te tonen stellen we  $p = 0$  in (3.15) - (3.16) waardoor het stelsel vergelijkingen wordt

$$\frac{du}{dt} - fv = 0, \quad \frac{dv}{dt} + fu = 0. \quad (3.18)$$

Een eenvoudige oplossing is  $u = a \cos ft$ ,  $v = -a \sin ft$ , waar  $a$  een willekeurige constante is. Met behulp van (2.2) vindt men de baan van het deeltje

$$x - x_0 = \frac{a}{f} \sin ft, \quad y - y_0 = \frac{a}{f} \cos ft. \quad (3.19)$$

Dus het deeltje doorloopt een cirkelvormige baan met straal  $a/f$  in een periode van  $2\pi/f$  ofwel  $1/2$  sterredag/ $\sin \varphi$ . Deze oplossing staat bekend als de inertiaal-beweging (zie figuur 3.3).

**OPGAVE 3.2.** Een luchtpakketje beweegt onder invloed van een drukgradientkracht,  $(\partial p / \partial x)$ , 100 km in oostelijke ( $x$ -) richting. Hoe groot is de component van de snelheid in noordelijke richting ( $v$ ) na deze reis? Verwaarloos de meridionale component van de drukgradient. Maak gebruik van de bewegingsvergelijkingen (3.15) en (3.16).

De symbolen hebben de gebruikelijke betekenis ( $x$  is positief in oostelijke richting;  $y$  is positief in noordelijke richting). Neem aan dat  $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

### 3.6 Reynoldsgetal

De karakteristieke stroomsnelheid van ijs, in gletsjers en in ijskappen, is relatief gering (in de orde van 10-100 m per jaar). Dit is ook het geval met het materiaal in de mantel van de aarde (in de orde van enkele cm per jaar). Hierdoor zijn de versnellingen, waaronder de versnellingen die het gevolg zijn van de rotatie van de aarde, zo gering dat ze kunnen worden verwaarloosd t.o.v. de drukgradientkracht, de zwaartekracht en de visceuze kracht. De bewegingsvergelijking wordt onder die omstandigheden

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \approx 0. \quad (3.20)$$

met

$$\mathbf{F} = \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.21)$$

Dat wil zeggen dat drukgradientkrachten en de zwaartekracht exact in balans worden gehouden door de wrijvingskracht. De beweging die met dit evenwicht samenhangt noemt men "creeping motion". Merk op, dat vergelijking (3.20) lineair is. De geldigheid van vergelijking (3.20) wordt gekarakteriseerd door de waarde van het zogenaamde Reynoldsgetal,  $Re$ ,

$$Re \equiv \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{visceuze kracht}}. \quad (3.22)$$

Aangezien

$$|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}| \approx \frac{U^2}{L}, \quad \left| \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \right| \approx \frac{\mu U}{\rho L^2},$$

is

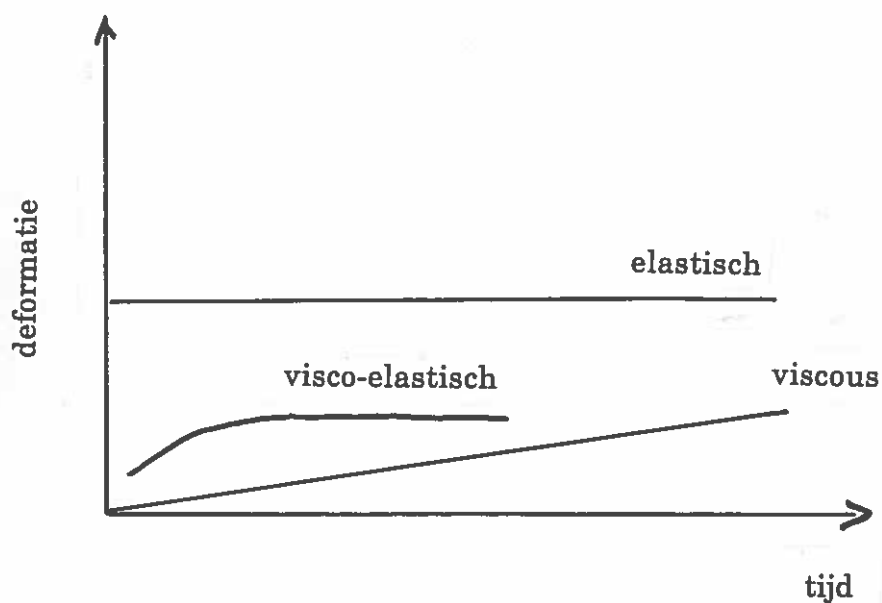
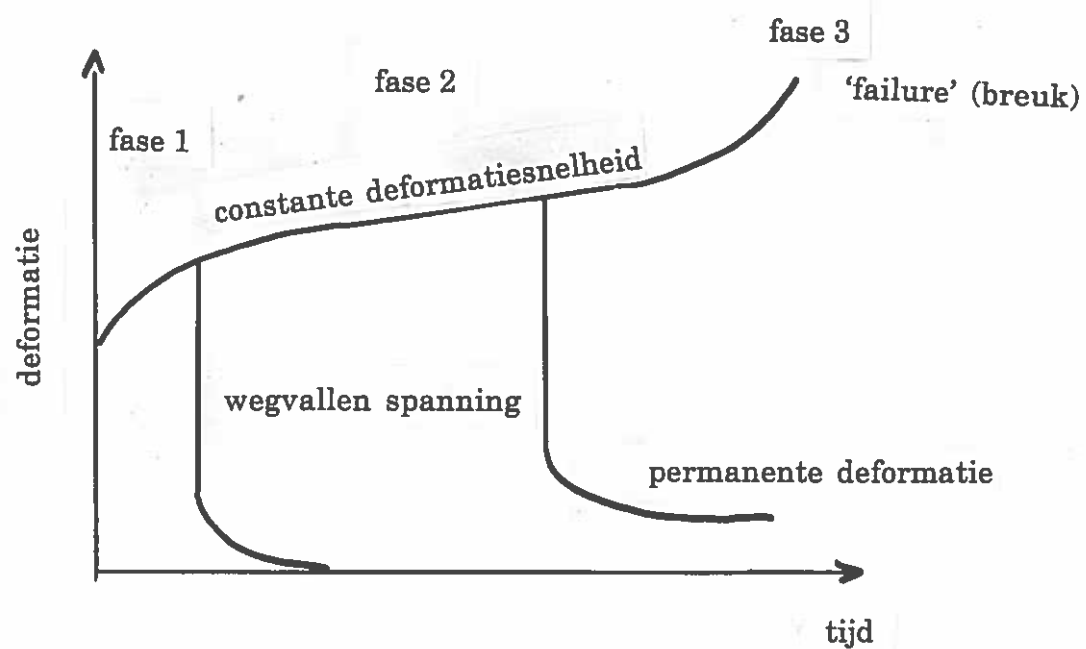
$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.23)$$

Vergelijking (3.20) is geldig als  $Re \rightarrow 0$ .

OPGAVE 3.3. Toon dit aan m.b.v. schaalanalyse voor een gletsjer met horizontale afmetingen van 20 km bij 2 km.

*Creeping motion* is een belangrijk proces voor de deformatie van gesteente in de aarde. Er is echter niet veel van bekend, omdat de omstandigheden in het inwendige van de aarde (de extreem hoge druk, de extreem hoge temperatuur en vooral de extreem lange tijdschaal van de processen) moeilijk kunnen worden nagebootst in het laboratorium. De resultaten van waarnemingen van gesteentemonsters die worden onderworpen aan een constante last (druk of "stress") laten drie karakteristieke "creep-regimes" zien. In de eerste fase treedt er een relatief snelle elastische deformatie op, waarna de deformatie langzaam toeneemt. Als de last in deze tweede fase wordt verwijderd, verdwijnt de deformatie zoals aangegeven in figuur 3.4. De derde fase bestaat uit een toestand van "steady state creep", waarbij de deformatie "plastisch" wordt genoemd, hetgeen aangeeft dat de deformatie deels permanent is. Na deze fase gaat de deformatie in versneld tempo door totdat er een breuk optreedt. Geen enkel regime wordt goed beschreven door vergelijking (3.20). In feite moet men bij *creep* spreken van "visco-elastisch" gedrag. M.a.w. een last veroorzaakt zowel elastische als visceuze effecten.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, Lowrie.



Figuur 3.4. De deformatie van een materiaal als functie van de tijd bij constante spanning (theoretisch).

## 4 MASSA

### 4.1 Continuïteitsvergelijking (behoud van massa)

Tot nu toe hebben we alleen gesproken over verschillende vormen van de bewegingswetten voor een continu medium. Er is een ander principe waaraan voldaan moet worden en dat is de wet van behoud van massa. We richten onze aandacht op een elementair volume en berekenen de lokale verandering van de massa in dit volume als een functie van de materie die door het oppervlak van dit volume naar binnen of naar buiten stroomt. Voor een volume-eenheid is dit laatste natuurlijk juist gelijk aan de driedimensionale divergentie van het massatransport bekend uit de vectoranalyse. De lokale verandering van de massa per eenheidsvolume is  $\partial\rho/\partial t$  en dus wordt de zogenaamde *continuïteits-vergelijking*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (4.1)$$

Een positieve divergentie betekent een verlies van massa door het oppervlak en gaat daarom gepaard met een negatieve lokale verandering van de dichtheid.

De bovenstaande vergelijking kan in een andere vorm geschreven worden door de tweede term te schrijven als  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$  en gebruik te maken van de definitie voor de materiële afgeleide (2.3). Het resultaat is

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (4.2)$$

Als de dichtheid alleen afhankelijk is van de druk, dan geldt voor een onsamendrukbaar (incompressible) medium,  $d\rho/dt=0$ . Voor zo'n medium geldt dus

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (4.3)$$

Hieruit blijkt onder meer dat de continuïteitsvergelijking ook gezien kan worden als een relatie tussen de verticale en de horizontale bewegings-componenten.

In de kromlijnige coördinaten van hoofdstuk 2 is de driedimensionale divergentie gelijk aan

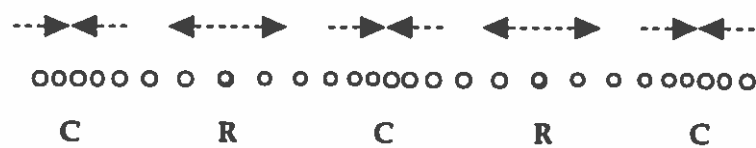
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v \tan \varphi}{r_0} . \quad (4.4)$$

waarbij verplaatsingen in verticale richting klein verondersteld zijn ten opzichte van de straal van de aarde. Overeenkomstig de vereenvoudiging van (3.10) en (3.11) tot (3.15) en (3.16) mogen we voor synoptische bewegingsschalen de kromming van het aardoppervlak verwaarlozen. We krijgen dan

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (4.5)$$

De continuïteitsvergelijking maakt het ook nog mogelijk om de materiële afgeleide (2.3) in een andere vorm te schrijven. Door (2.3) te vermenigvuldigen met  $\rho$  en (4.1) met een willekeurige variabele  $\xi$  krijgen we namelijk

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi \right) + \xi \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right)$$



Figuur 4.1. Een één-dimensionale geluidsgolf: beweging en bijbehorende dichtheidsvariëaties (R: rarefaction (expansie); C: compression) (uit Lowrie)

Dit is gelijk aan

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \xi) + \nabla \cdot (\rho \xi \mathbf{v}). \quad (4.6)$$

Deze relatie kan onder meer gebruikt worden in de bewegingsvergelijkingen. Men verkrijgt dan de bewegingsvergelijkingen in de zogenaamde *flux-vorm*.

OPGAVE 4.1. Is een perfect onsamendrukbaar medium in evenwicht fysisch realistisch? Met andere woorden, is de benadering (4.3) consistent met de bewegingsvergelijking en de toestandsvergelijking, waarbij de druk uitsluitend een functie is van de dichtheid en de temperatuur,  $p = p(\rho, T)$ ?

## 4.2 Geluidsgolven

Laten wij de eenvoudige situatie beschouwen van een niet visceuze vloeistof in de afwezigheid van uitwendige krachten. Met deze vereenvoudigingen wordt de bewegingsvergelijking (3.4):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (4.7)$$

De dichtheid van een vloeistofelement verandert volgens de continuïteitsvergelijking (4.2)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.8)$$

We beperken ons nu tot kleine afwijkingen van de toestand van rust waarin de vloeistof een constante dichtheid heeft,  $\rho_0$ . Dit impliceert dat, in de afwezigheid van externe krachten, zoals de zwaartekracht, de druk in de rusttoestand eveneens constant is, zeg  $p_0$ . Hierdoor kunnen we de niet-lineaire termen verwaarlozen t.o.v. de lineaire termen in vgl. 4.7-8. Deze vergelijkingen krijgen nu de volgende relatief eenvoudige gedaante:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Hieruit blijkt direct dat

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (4.11)$$

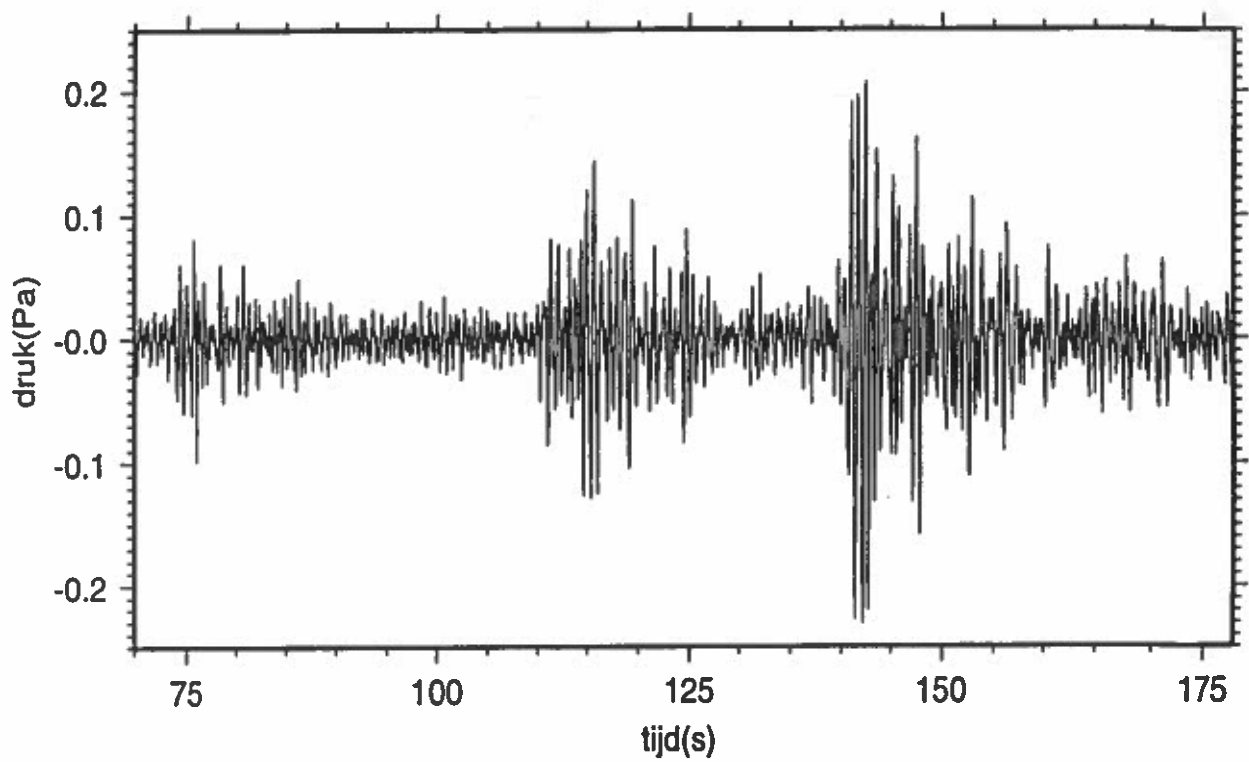
met

$$\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}. \quad (4.12)$$

$\omega$  is de vorticiïteitsvector (zie hoofdstuk 8). De vorticiïteit is in de lineaire benadering onafhankelijk van de tijd, m.a.w. vorticiïteit "blijft op zijn plek".

Vanwege (4.11) kunnen we schrijven

$$\mathbf{v} \equiv \nabla \phi \quad (4.13)$$



Figuur 4.2. Drukregistratie in Deelen na de explosie bij S.E. Fireworks in Enschede op 13 mei 2000 (zie verder [www.knmi.nl](http://www.knmi.nl)).

(waarin  $\phi$  een functie van de ruimte en de tijd) zodat (4.9) wordt

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -(p - p_0), \quad (4.14)$$

waarbij we aanemen dat  $\phi=0$  als  $p=p_0$ . Vgl. 4.10 wordt met (4.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla^2 \phi. \quad (4.15)$$

We hebben nu een relatie tussen druk en dichtheid nodig om verder te komen. Deze relatie kunnen we in het algemeen als volgt schrijven

$$p = p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \frac{dp(\rho_0)}{d\rho} + \dots \quad (4.16)$$

We hebben de functie  $p(\rho)$  in een Taylorreeks ontwikkeld en daarbij het effect van temperatuur op druk verwaarloosd. Als we alle tweede orde (niet-lineaire) termen in (4.16) (die overigens niet worden getoond) verwaarlozen, dan kunnen we schrijven

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp(\rho_0)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.17)$$

We elimineren de druk uit het linkerlid van (4.17) m.b.v. (4.14) en we elimineren de dichtheid uit het rechterlid van (4.17) m.b.v. (4.15) met als resultaat

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi, \quad (4.18)$$

waarin

$$c^2 = \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}. \quad (4.19)$$

De meeste lezers zullen (4.18) direct herkennen als de *golfvergelijking* (zie ook sectie 1.9). De parameter  $c$  heeft de dimensie van snelheid [ $\text{m s}^{-1}$ ]. Zoals besproken in hoofdstuk 1, is een eenvoudige oplossing van (4.19)

$$\phi = f(x-ct). \quad (4.20)$$

Dit representeert een "vlakke golf" die zich met een snelheid  $c$  in de  $x$ -richting voortplant.  $f(x)$  is de golf-vorm op tijdstip  $t=0$ . Op een later tijdstip  $t$  is de vorm identiek, echter een afstand  $ct$  in de positieve  $x$ -richting verschoven. De snelheid  $\mathbf{v}=(u,v,w)$  voldoet aan

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v=w=0. \quad (4.21)$$

De golf is dus "longitudinaal" omdat de beweging van de materie evenwijdig is aan de voortplantingsrichting van de golf.

Merk op dat als (4.3) als continuïteitsvergelijking wordt gebruikt, geluidsgolven niet als oplossing van de vergelijkingen voorkomen, m.a.w. geluidsgolven zijn uit de vergelijkingen "gefilterd". Deze technique, waarbij "snelle" golven als oplossing uit het systeem van vergelijkingen worden verwijderd, is veel gebruikt bij het maken van numerieke weersverwachtingen.

Vergelijking (4.19) voor de voortplantingssnelheid was bij Newton al bekend. De wet van Boyle  $p=C/V$  (zie sectie 1.6) suggereert dat

$$c^2 = \frac{p_0}{\rho_0} . \quad (4.22)$$

(Merk op : de analogie met de elastische golf die is behandeld in sectie 1.9). Voor lucht nabij het aardoppervlak met een temperatuur van 20°C geeft dit  $c=290 \text{ m s}^{-1}$ . Dit is lager dan de waargenomen  $340 \text{ m s}^{-1}$ . Deze afwijking kan worden verklaard uit het feit dat de constante  $C$  in de wet van Boyle afhankelijk is van de temperatuur. Bij een passerende geluidspuls wordt een vloeistofelement gecomprimeerd (figuur 4.1). De verplaatsingen die samenhangen met een geluidsgolf zijn extreem klein. Zelfs het zeer intense geluid van een startend straalvliegtuig zijn de luchtverplaatsingen in de orde van  $10^{-4} \text{ m}$  en de dichtheidsfluctuaties slechts 1% van de gemiddelde dichtheid.

Figuur 4.2 toont een registratie van drukvariaties in Deelen (de Veluwe) tijdens de passage van een aantal drukpulsen veroorzaakt door de explosies van S.E. Fireworks in Enschede op 13 mei 2000. De golven hebben een frequentie van ongeveer 1 tot 4 Hz. Dit wordt *infrageluid* genoemd. Dit is geluid dat voor de mens niet waarneembaar is. Voor de mens hoorbaar geluid heeft een frequentie van 20-20000 Hz. Geluid met een frequentie boven dit bereik wordt *ultrageluid* genoemd. Sommige dieren, zoals katten en honden, zijn hier gevoelig voor. Een viool produceert hoorbaar geluid met een frequentie van (gemiddeld)  $10^2$  tot  $10^4 \text{ Hz}$ . Een geluidsgolf verspreid zich vanuit de bron in alle drie de richtingen, waardoor de intensiteit (het vermogen per vierkante meter) met één gedeeld door het kwadraat van de afstand afneemt. Hierdoor is de amplitude van het infrageluid in Deelen, dat op ongeveer 75 km afstand van Enschede ligt, relatief zwak (hoe groot was de amplitude van de drukvariaties op 1 km afstand?).

Bij compressie wordt arbeid verricht op het vloeistofelement. Dit leidt tot een toename van de interne energie van het gecomprimeerde vloeistofelement. Wat dit voor invloed heeft op de geluidssnelheid kan pas worden onderzocht als we het begrip energie hebben gedefinieerd en het principe van behoud van energie hebben besproken (zie opgave 5.1).

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, Pedlosky en Lighthill.

## 5 ENERGIE

### 5.1 Mechanische energie

De mechanische energie van een systeem is gedefinieerd als het vermogen van het systeem om arbeid te verrichten. Beschouw een deeltje dat zich bevindt op positie  $r_0$  en waarop een kracht  $F(r)$  wordt uitgeoefend. De *arbeid*,  $W$ , die wordt verricht door deze kracht om het deeltje van  $r=r_0$  naar  $r=r_1$  te verplaatsen is

$$W = \int_{r_0}^{r_1} F(r) dr . \quad (5.1)$$

Deze integraal kan worden geschreven als

$$W = \int_{t_0}^{t_1} F(r) \frac{dr}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} F(r) v dt . \quad (5.2)$$

Met (1.1) en (1.2) wordt dit

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_0}^{v_1} v dv$$

ofwel

$$W = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 . \quad (5.3)$$

De kinetische energie is gedefinieerd als

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 . \quad (5.4)$$

Zolang  $F$  alleen een functie is van  $r$  kan de integraal in het rechterlid van (5.1) worden geschreven als

$$\int_{r_0}^{r_1} F(r) dr = \int_{U_0}^{U_1} -dU(r) = U_0 - U_1 = W . \quad (5.5)$$

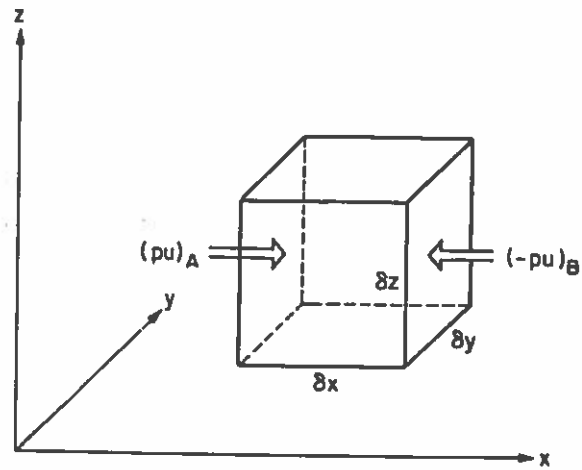
De nieuw gedefinieerde functie  $U(r)$  is de *potentiële energie*. Er geldt

$$U_0 + E_{k0} = U_1 + E_{k1} . \quad (5.6)$$

Dus, er is behoud van totale mechanische energie ( $U + E_k$ ).

### 5.2 De eerste hoofdwet van de thermodynamica

De eerste hoofdwet van de thermodynamica is een uitbreiding van het principe van behoud van mechanische energie. Deze uitbreiding is nodig omdat de arbeid die verricht wordt op een systeem een toename van de temperatuur van het systeem kan veroorzaken. Hierbij wordt potentiële energie dus niet alleen omgezet in kinetische energie maar ook in *warmte*. Dit manifesteert zich in een verandering



Figuur 5.1. Arbeid per tijdseenheid op een blok door de  $x$ -component van de drukkracht. (uit Holton)

van de temperatuur. Op moleculair niveau is warmte eigenlijk een vorm van kinetische energie, namelijk de kinetische energie die samenhangt met de willekeurige beweging van de moleculen, maar omdat deze beweging op macroscopisch niveau niet expliciet wordt beschreven, is aan deze vorm van energie een "aparte status" toegekend.

De eenheid van warmte is Calorie (Cal). De SI-eenheid van mechanische energie is Joule (J). Één Cal staat gelijk aan de "hoeveelheid" warmte die nodig is om de temperatuur van 1 kg water te verhogen van 14.5°C naar 15.5°C (uit experimenten blijkt dat 1 Cal=4186 J). Voor het verhogen van de temperatuur van 1 gram lucht van 14.5°C naar 15.5°C is veel minder dan 1 Cal nodig. Deze eigenschap wordt in theorie verdisconteerd met behulp van het begrip warmtecapaciteit. De warmte capaciteit is een eigenschap van een stof en is bovendien afhankelijk van de temperatuur van deze stof. Het verband tussen de toegevoerde warmte  $dq$ , de specifieke warmtecapaciteit  $C$ , en de toename van de temperatuur  $dT$  van een stof wordt in een formule weergegeven als

$$dq = CdT. \quad (5.7)$$

We definiëren nu een functie  $e$  die we de interne energie per massa-eenheid noemen. De eerste wet van de thermodynamica zegt dat de verandering van de interne energie van een systeem, waarvan de massa constant is, gelijk is aan de warmte die is toegevoerd aan het systeem plus de arbeid die is verricht op het systeem. Een element met een massa,  $m=\rho\delta V$  ( $\delta V = \delta x\delta y\delta z$ ) kan als zo'n systeem worden beschouwd. Daarop is de eerste wet van de thermodynamica van toepassing. De totale thermodynamische energie in zo'n element is

$$\rho\delta V\left[e + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right]. \quad (5.8)$$

De externe krachten die op het element werken zijn inwendige krachten, zoals drukkrachten en visceuze krachten, en uitwendige krachten, zoals de zwaartekracht en de Corioliskracht. De arbeid die deze krachten op een element verrichten is evenredig met het inproduct van de kracht met de snelheid. De Corioliskracht verricht dus geen arbeid op het element (zie vgl. 3.4). De arbeid die verricht wordt door de drukkrachten wordt geïllustreerd in figuur 5.1. De netto arbeid die per tijdseenheid wordt verricht door de drukkrachten op de twee kanten van de kubus in het  $y$ - $z$ -vlak is

$$[pu]_A\delta y\delta z - [pu]_B\delta y\delta z.$$

Als we deze uitdrukking ontwikkelen in een Taylorreeks dan resulteert

$$[pu]_B = [pu]_A + \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu)\right]_A \delta x + \dots$$

De netto arbeid die per tijdseenheid is verricht door de  $x$ -component van de drukkracht is dus

$$[pu]_A\delta y\delta z - [pu]_B\delta y\delta z = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu)\right]_A \delta V,$$

Een analoge beschouwing voor, respectievelijk, de  $y$ -component en de  $z$ -component van de druk resulteert in een uitdrukking voor de arbeid die wordt verricht door de drukkracht, nl.

$$-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] \delta V.$$

De eerste wet van de thermodynamica kan nu als volgt worden geformuleerd (waarbij de viscositeit buiten beschouwing is gelaten)

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta V [e + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}]) = -\nabla \cdot [p\mathbf{v}] \delta V + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \delta V + \rho J \delta V . \quad (5.9)$$

De tweede term in het rechterlid representeert de arbeid die per tijdseenheid verricht wordt door de zwaartekracht. De derde term in het rechterlid representeert de toegevoerde warmte per tijdseenheid.  $J$  is dus de hoeveelheid warmte per tijdseenheid en per massa-eenheid.

Vergelijking (5.9) kan met behulp van de kettingregel en het principe van massabehoud van het element worden geschreven als

$$\rho \delta V \frac{d}{dt} \left( e + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V - p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V - \rho g w \delta V + \rho J \delta V . \quad (5.10)$$

waarbij we hebben aangenomen dat  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ .

Als we nu het inproduct van de snelheid met vgl. (3.4) nemen en daarbij gebruik maken van (3.5), en wrijving verwaarlozen dan krijgen we

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho g w . \quad (5.11)$$

We trekken (5.11) af van (5.10) met als resultaat:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + J . \quad (5.12)$$

De verandering van de interne energie is evenredig met de verandering van de temperatuur van het element. Als het volume van het element niet verandert, zal de warmte die wordt toegevoerd aan het element geheel "ten goede komen" aan de temperatuur. Dus, als  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , dan is per definitie

$$de = c_v dT = J dt , \quad (5.13)$$

Hierin is  $c_v$  de specifieke warmte capaciteit bij constant volume. Met (4.2) en met (5.13) wordt (5.12)

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = J , \quad (5.14)$$

waarin  $\alpha = 1/\rho$ . De waarde van de specifieke warmte capaciteit bij constant volume  $c_v$  voor lucht is  $717 \text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ . Ter vergelijking: de waarde van  $c_v$  voor puur water bij  $17.5^\circ\text{C}$  is  $4182 \text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ; de waarde van  $c_v$  voor puur ijs bij  $0^\circ\text{C}$  is  $2106 \text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ .

Als de "stof" een gas is, speelt de arbeid die samenhangt met de verandering van het volume van het massa-"element" bij het toevoeren of afvoeren van warmte een belangrijke rol in het energiebudget. Wij voeren daarom in de specifieke warmtecapaciteit bij constante druk,  $c_p$ . Deze volgt uit vergelijking (5.14) met  $p$  is constant en  $J dt = c_p dT$ . Met behulp van de ideale gaswet krijgen we

$$c_p - c_v = p \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p = R , \quad (5.15a)$$

We zien dat  $c_p > c_v$ . De waarde van  $c_p$  voor lucht is  $1005 \text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ . Met  $V = m\alpha$  en kunnen we opschrijven dat (zie vgl. 1.13)

$$\alpha_T = \frac{m}{V} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p$$

zodat in het algemeen (voor alle materialen) geldt:

$$c_p - c_v = \frac{\alpha_T p V}{m} = \alpha_T p \alpha = \alpha_T \frac{p}{\rho} . \quad (5.15b)$$

OPGAVE 5.1. Leid af, uit (4.22), een uitdrukking voor de geluidssnelheid onder adiabatistische omstandigheden in een ideaal gas.

### 5.3 Adiabatisch temperatuurprofiel

In deze sectie proberen we een uitdrukking te vinden voor het verloop van de temperatuur onder adiabatistische omstandigheden. We beginnen met de volgende twee constatering:

$$\begin{aligned} m d(p\alpha) &= m p d\alpha + m \alpha dp \\ m de &= m J dt - m p d\alpha \end{aligned} \quad (5.16)$$

Waarbij de tweede vergelijking voortkomt uit (4.2) en (5.12). Als wij de bovenstaande twee vergelijkingen optellen krijgen we

$$m de + m d(p\alpha) = m \alpha dp + m J dt$$

Met de definitie van *enthalpie*,  $H^1$ :

$$dH = m de + m d(p\alpha) = m de + d(pV) .$$

wordt deze vergelijking

$$dH = m \alpha dp + m J dt = V dp + m T dS ,$$

waarin de *entropie*,  $S$ , is gedefinieerd aan de hand van de vergelijking

$$J dt = T dS . \quad (5.17)$$

De eerste hoofdwet krijgt de gedaante

$$dH - V dp = m T dS . \quad (5.18)$$

Zowel  $S$  als  $H$  zijn functies die afhankelijk zijn van twee van de drie toestandsvariabelen. Dus

$$S = S(T, p) \text{ en } H = H(T, p) .$$

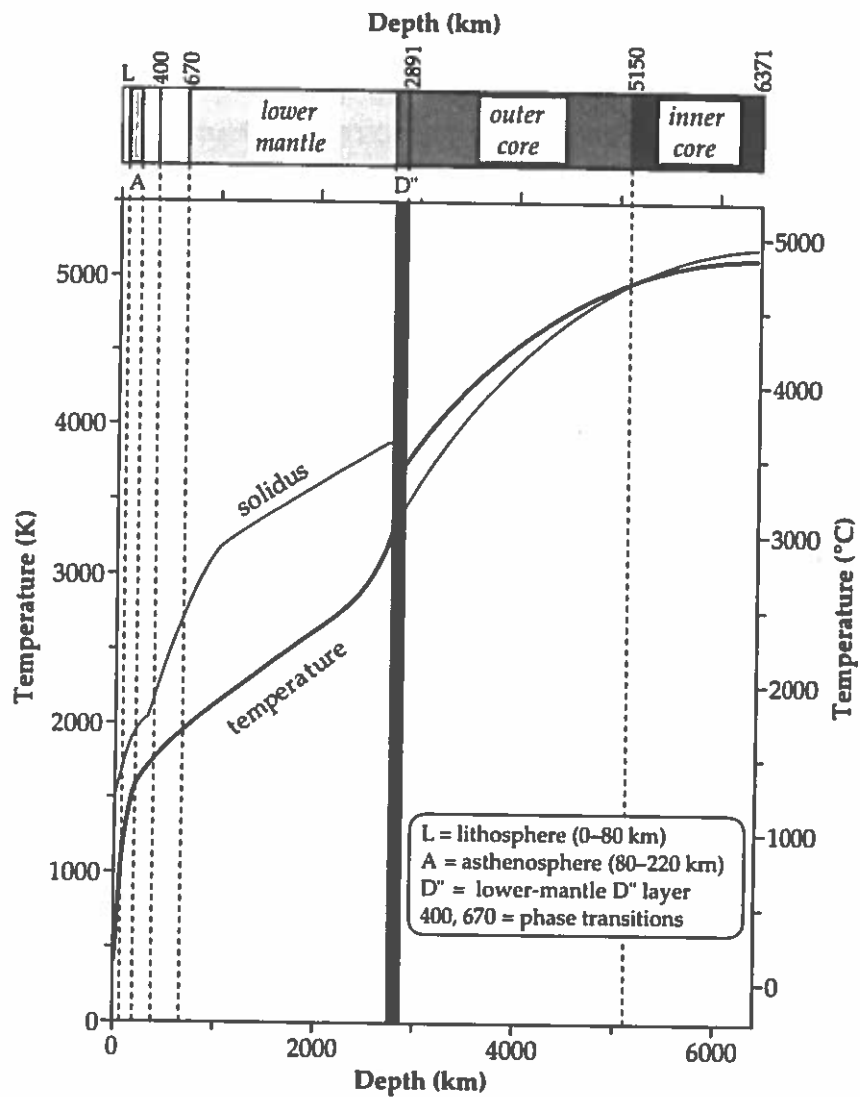
Hierdoor kunnen we schrijven

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial p} dp \text{ en } dH = \frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial p} dp \quad (5.19)$$

Substitutie in (5.18) levert, respectievelijk

$$\frac{1}{T} \frac{\partial H}{\partial T} = m \frac{\partial S}{\partial T} \text{ en } \frac{1}{T} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{V}{T} = m \frac{\partial S}{\partial p} . \quad (5.20)$$

<sup>1</sup> Evenals druk en temperatuur wordt de druk een *toestand-functie* genoemd of *karakteristieke functie*. Voor een bepaald systeem met een inwendige energie  $me=U$ , een druk  $p$  en een volume  $V$  is de enthalpie gegeven door:  $H=U+pV$ .



Variations of estimated temperature and melting point with depth in the Earth (based upon data from Stacey, 1992).

Figuur 5.2. (uit Lowrie)

De linker vergelijking partieel differentiëren naar  $p$  en de rechter vergelijking partieel differentiëren naar  $T$  levert, respectievelijk

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial T} = m \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} \text{ en } \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial p} - \frac{\partial V}{\partial T} \right) - \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial H}{\partial p} - V \right) = m \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} .$$

Dit geeft

$$\frac{\partial H}{\partial p} = V - T \frac{\partial V}{\partial T} . \quad (5.21)$$

De rechter vergelijking in (5.20) en vergelijking (5.21) leveren

$$m \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{-\partial V}{\partial T} = -\frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial T} \equiv -V \alpha_T . \quad (5.22)$$

Dit levert, samen met de linker identiteit in (5.19) en de definitie van  $c_p$ , namelijk

$$c_p \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p , \quad (5.23)$$

de volgende vergelijking:

$$c_p \frac{dT}{dt} - T \frac{\alpha_T}{\rho} \frac{dp}{dt} = T \frac{dS}{dt} . \quad (5.24)$$

In adiabatische omstandigheden ( $dS=0$ ) wordt dit, met het hydrostatisch evenwicht ( $dp = -\rho g dz$ ),

$$\frac{dT}{dz} \equiv \Gamma_{ad} = \frac{-\alpha_T g T}{c_p} . \quad (5.25)$$

Dit is de zogenaamde adiabatische temperatuurgradient.

In de atmosfeer is (sectie 1.6)

$$\alpha_T = \frac{1}{T} ,$$

zodat

$$\Gamma_{ad} = \frac{g}{c_p} \approx 10 \text{ K km}^{-1} . \quad (5.26)$$

In de oceaan is  $\alpha_T = (s, T, p)$  zodat  $\Gamma_{ad}$  niet constant is.  $\Gamma_{ad}$  neemt toe met toenemende druk en met toenemende temperatuur. Bij een druk van 1 atmosfeer is  $\Gamma_{ad} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ K km}^{-1}$  bij  $0^\circ\text{C}$  terwijl  $\Gamma_{ad} = 24.8 \times 10^{-2} \text{ K km}^{-1}$  bij  $30^\circ\text{C}$ .

In de mantel van de aarde op een diepte van 1500 km vinden we met  $\alpha_T = 14 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $T = 2400 \text{ K}$ ,  $c_p = 1200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  en  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  dat  $\Gamma_{ad} = 0.3 \text{ K km}^{-1}$ .<sup>1</sup> In figuur 5.2 zien we dat dit klopt met de schattingen, althans voor de mantel. In de lithosfeer en de asthenosfeer is de geschatte temperatuur gradient echter veel groter dan  $\Gamma_{ad}$ . Hier wordt het warmtetransport verzorgd door diffusie (zie sectie 1.12), terwijl dit in de asthenosfeer door convection wordt verzorgd (zie secties 7.1-7.3).

#### 5.4 Potentiële temperatuur

Door middel van een opgave voeren we nu het begrip *potentiële temperatuur* in.

<sup>1</sup> Lowrie, p.181.

OPGAVE 5.2: Laat zien dat er, wat de atmosfeer betreft, een grootte  $\theta$  bestaat, gedefinieerd als,

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad (5.27)$$

waarin  $c_p$  de specifieke warmte-capaciteit bij constante druk, en  $p_0$  een constante (referentie) luchtdruk, waarvoor geldt dat,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{c_p} \frac{dS}{dt}. \quad (5.28)$$

De grootte,  $\theta$ , wordt "potentiële temperatuur" genoemd. Uit (5.28) blijkt dat  $\theta$  in adiabatische omstandigheden ( $dS=0$ ) een behouden grootte is. In de meteorologie wordt dikwijls met de potentiële temperatuur gewerkt in plaats van de dichtheid. De potentiële temperatuur kan worden geïnterpreteerd als de temperatuur die een luchtpakketje zou hebben als het adiabatisch van het druk-nivo  $p$  naar het referentie druk-nivo  $p_0$  zou worden gebracht. In het algemeen wordt voor  $p_0$ , 1000 hPa gekozen (de druk dichtbij de grond).

OPGAVE 5.3. Stel dat een luchtpakketje van 1 kg met een constante snelheid stijgt. Het luchtpakketje wordt diabatisch (door straling of door het vrijkomen van latente warmte) met  $0.1 \text{ W kg}^{-1}$  opgewarmd. Hoe groot is de verticale snelheid als de temperatuur van het luchtpakketje constant blijft?

OPGAVE 5.4. In het midden van een diepe depressie, in de atmosfeer, is de druk aan het aardoppervlak 50 mb (= 5000 Pa) lager dan in de omgeving. Wat is de oppervlakte-temperatuur in het midden van de depressie als de oppervlakte-temperatuur in de omgeving 290 K is? Neem aan dat de atmosfeer zich gedraagt als een adiabatisch ideaal gas. ( $c_p - c_v = R$ ;  $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ;  $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ )

## 5.5 Faseovergangen en de Clausius-Clapeyronvergelijking

Tot nu toe beperkt onze beschouwing zich steeds tot homogene systemen (uitsluitend een vaste stof of uitsluitend een vloeistof of uitsluitend een gas). We weten dat water in de atmosfeer zich in verschillende fases kan bevinden (sectie 1.6). Ook in het inwendige van de aarde vinden faseovergangen plaats (vast/vloeibaar). We kijken daarom nader naar de energiehuishouding van een heterogeen systeem. We beschouwen daartoe een zekere massa water in de dampvorm die isotherm wordt samengedrukt, waardoor de dampdruk,  $p$  (zie in figuur 1.7b), langzaam oploopt totdat  $p=p_s$ , waarin  $p_s$  de zogenaamde verzadigingsdampdruk (meestal aangeduid met het symbool  $e_s$ ). Bij verdere compressie van het monster zal er condensatie gaan optreden, m.a.w. er verschijnt vloeibaar water, waarbij de dampdruk en de temperatuur van het systeem onveranderd blijven. Wij hebben dan te maken met een heterogeen systeem.

Het blijkt dat de verzadigingsdampdruk een functie is van alleen de temperatuur. De afleiding van deze afhankelijkheid wordt hier gegeven. Wij beginnen met de eerste wet (5.14) in de gedaante

$$mTds = mde + pdV \quad (5.29)$$

Dit is te schrijven als

$$mT\left(\frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial V}dV\right) = m\left(\frac{\partial e}{\partial T}dT + \frac{\partial e}{\partial V}dV\right) + pdV$$

waardoor

$$T\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial e}{\partial T} \text{ en } mT\frac{\partial S}{\partial V} = m\frac{\partial e}{\partial V} + p$$

Aangezien  $V$  en  $T$  onafhankelijke variabelen zijn, geldt ook

$$m\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T} = \frac{m}{T}\frac{\partial^2 e}{\partial V\partial T} \text{ en } m\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V} = \frac{m}{T}\frac{\partial^2 e}{\partial T\partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{1}{T^2}\left(m\frac{\partial e}{\partial V} + p\right)$$

$S$  is een continue functie van  $T$  en  $V$ , zodat

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}$$

Dit betekent dat

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) \quad (5.30)$$

met  $U=me$ , waarin  $m$  de constante massa van het heterogene systeem. Deze vergelijking geldt dus ook voor een mengsel van fases (bijvoorbeeld vloeistof en damp, of vaste stof en vloeistof). De interne energie en het volume van zo'n mengsel wordt gegeven door, respectievelijk,

$$U = m(\tau U_1 + (1-\tau)U_2)$$

en

$$V = \tau V_1 + (1-\tau)V_2$$

waarin  $\tau$  de verhouding van de massa in fase 1 ten opzichte van de constante totale massa van het systeem.  $U_2$  is de interne energie van het systeem bij het begin van de faseovergang (helemaal in fase 2), terwijl  $U_1$  de interne energie is van het systeem als de fase 2 volledig is overgegaan in fase 1 en het systeem dus uitsluitend uit fase 1 bestaat. De bovenstaande twee vergelijkingen geven

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \tau}}{\frac{\partial V}{\partial \tau}} = \frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1} \quad (5.31)$$

De faseovergang is geassocieerd met een verandering in de enthalpie van het systeem:

$$H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) \quad (5.32)$$

De enthalpieverandering per massa-eenheid wordt aangegeven met het symbool  $L$ . Dus:

$$L_{12} \equiv \frac{(H_2 - H_1)}{m} \quad (5.33)$$

$L$  is de latente enthalpie voor de overgang van fase 2 naar fase 1. Een combinatie van vergelijkingen (5.30), (5.31) en (5.32) levert

$$\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1} = \frac{H_2 - H_1}{V_2 - V_1} - p = \frac{\partial U}{\partial V} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p \quad (5.34)$$

waaruit volgt

$$T \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{H_2 - H_1}{V_2 - V_1}. \quad (5.35)$$

Deze vergelijking staat bekend als de Clausius-Clapeyron vergelijking. Het is feite een toestandsvergelijking voor een heterogeen systeem. Als fase 1 correspondeert met de vloeibare fase en fase 2 met de vaste fase dan beschrijft (5.35) het effect van de druk op het smeltpunt van gesteente in de aarde. Als deze vergelijking wordt toegepast op de overgang van de vaste fase naar de vloeibare fase dan kunnen we schrijven:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = T \frac{V_{\text{vast}} - V_{\text{vloeibaar}}}{m L_{\text{smelt}}}. \quad (5.36)$$

of

$$\frac{\partial \ln T_{\text{smeltpunt}}}{\partial p} = \frac{\alpha_{\text{vast}} - \alpha_{\text{vloeibaar}}}{L_{\text{smelt}}}. \quad (5.37)$$

Als de dichtheid als functie van de diepte bekend is, kan hieruit de diepteafhankelijkheid van het smeltpunt worden berekend. De buitenkant van de kern van de aarde, die voornamelijk uit ijzer bestaat, is de dichtheid van respectievelijk de vaste fase ongeveer  $13000 \text{ kg m}^{-3}$  en de dichtheid van de vloeibare fase ongeveer  $11000 \text{ kg m}^{-3}$ , terwijl  $L_{\text{smelt}} = 7 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ . Hieruit kan de gradient van het smeltpunt worden bepaald. Deze blijkt met de aanname van hydrostatisch evenwicht ongeveer  $1 \text{ K km}^{-1}$  te zijn. Dit is meer dan de adiabatische temperatuurgradient (zie figuur 5.2 en sectie 5.4). Het centrum van de kern van de aarde zal dus vloeibaar zijn.

## 5.6 De "nat-adiabaat"

Stel nu dat fase 2 correspondeert met de gas- (of damp-) fase van water terwijl fase 1 correspondeert met de vloeistof fase van water, dan  $V_2 \gg V_1$ . Daarom kunnen we (5.35) schrijven, met gebruik van (5.33) en de aanname dat het monster in de gasfase voldoet aan de ideale gaswet, dat

$$T \frac{\partial p_s}{\partial T} = \frac{m L_c}{V_2} = \rho_2 L_{12} = \frac{p_s L_c}{R_v T}, \quad (5.38)$$

waarin  $p_s$  de verzadigingsdampdruk,  $L_c$  de latente enthalpie voor condensatie en  $R_v$  de gasconstante voor waterdamp. Dit kan ook worden uitgedrukt als

$$\frac{\partial \ln p_s}{\partial T} = \frac{L_c}{R_v T^2}, \quad (5.39)$$

Op grond van (5.29) en met de definitie van  $L_c$  kunnen we schrijven dat

$$m de + p dV = dH = m T dS = m L_c \quad (5.40)$$

zodat (zie 5.17)

$$L_c = J dt \quad (5.41)$$

We zien nu dat de latente enthalpie ook kan worden "opgevat" als latente warmte. We passen deze vergelijking toe op een verzadigd luchtpakketje dat opstijgt in de atmosfeer waarbij condensatie optreedt. De latente warmte die daarbij vrijkomt komt ten goede aan het mengsel van droge lucht en waterdamp, waarbij we aannemen dat het gecondenseerde water direct uit de atmosfeer wordt verwijderd als regen. Hierdoor kunnen schrijven (zie bijvoorbeeld 5.24):

$$-L_c dm_{\text{damp}} = (m_{\text{damp}} + m_{\text{droge lucht}})(c_p dT - \alpha dp) \quad [\text{J}] , \quad (5.42)$$

waarbij  $dm_{\text{damp}} < 0$ . We definiëren de mengverhouding,  $r$ , als de massa waterdamp gedeeld door de massa droge lucht. Bij condensatie is de lucht verzadigd. Dus we kunnen ook schrijven dat

$$-L_c dr_s = c_p dT - \alpha dp , \quad (5.43)$$

waarin  $r_s$  de verzadigingsmengverhouding en waarbij is aangenomen dat

$$m_{\text{damp}} + m_{\text{droge lucht}} \approx m_{\text{droge lucht}}.$$

De verzadigingsmengverhouding kan worden uitgedrukt als

$$r_s = \frac{p_s}{p - p_s} \equiv \frac{e_s}{p - e_s} = \frac{e_s}{p} \quad (5.44)$$

waarin  $p_s$  de verzadigingswaterdampdruk waarvoor in het algemeen het symbool  $e_s$  wordt gebruikt. Uit (5.44) volgt, met hydrostatisch evenwicht ( $dp = -\rho g dz$ ) dat

$$\frac{dr_s}{r_s} = \frac{de_s}{e_s} + \frac{g}{RT} dz \quad (5.45)$$

Sustitutie van (5.45) in (5.43) waarbij we opnieuw de relatie ( $dp = -\rho g dz$ ) gebruiken levert

$$-L_c r_s \left( \frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dz} + \frac{g}{RT} \right) = c_p \frac{dT}{dz} + g \quad (5.46)$$

Met

$$\frac{de_s}{dz} = \frac{de_s}{dT} \frac{dT}{dz} \quad (5.47)$$

wordt dit

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-g}{c_p} \left( \frac{1 + \frac{L_c r_s}{RT}}{1 + \frac{L_c r_s}{c_p} \frac{d(\ln e_s)}{dT}} \right) \quad (5.48)$$

Met

$$\varepsilon \approx \frac{R}{R_v} = 0.622 \quad (5.48)$$

krijgen wij

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-g}{c_p} \left( \frac{1 + \frac{L_c r_s}{RT}}{1 + \frac{\epsilon L_c^2 r_s}{R c_p T^2}} \right) \quad (5.49)$$

De temperatuur afname per meter stijging van een verzadigd luchtpakketje is dus gelijk aan de droog-adiabatische temperatuurafname (5.26) maal een positieve factor die afhankelijk is van de druk en de temperatuur (uit de Clausius-Clapeyron vergelijking volgt dat  $r_s$  afhankelijk is van temperatuur en druk). Tabel 5.1 geeft enkele waarden van deze zogenaamde "pseudo-adiabatische" of "nat-adiabatische" temperatuurafname die, zoals verwacht, kleiner is dan de droog-adiabatische temperatuurafname.

| $p(\text{hPa})$                  | 1000 | 700 | 500 |
|----------------------------------|------|-----|-----|
| $T(^{\circ}\text{C}) \backslash$ |      |     |     |
| -30                              | 9,2  | 9,0 | 8,7 |
| -20                              | 8,6  | 8,2 | 7,8 |
| -10                              | 7,7  | 7,1 | 6,4 |
| 0                                | 6,5  | 5,8 | 5,1 |
| +10                              | 5,3  | 4,6 | 4,0 |
| +20                              | 4,3  | 3,7 | 3,3 |

Tabel 5.1. Waarden van de absolute waarde van de pseudo-adiabatische temperatuur gradient in  $^{\circ}\text{C km}^{-1}$ , volgens (5.49).

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, Curry en Webster, Moore.