

GEOFYSISCH STROMINGSLEER



A.J. VAN DELDEN

INSTITUUT VOOR MARIEN EN ATMOSFERISCH ONDERZOEK
UNIVERSITEIT UTRECHT
PRINCETONPLEIN 5
3584 CC UTRECHT
THE NETHERLANDS
a.j.vandelden@phys.uu.nl



APRIL 2003



—



Inhoud	blz.
0. Inleiding	5
1. Eigenschappen van geofysische vloeistoffen	8
1.1 De atmosfeer	
1.2 De oceanen	
1.3 De cryosfeer	
1.4 De aarde	
1.5 Mechanica: massa en kracht	
1.6 Thermodynamica: druk, temperatuur en volume	
1.7 Elasticiteit	
1.8 Stijfheid	
1.9 Compressie golven	
1.10 Afschuivingsgolven	
1.11 Weerstand tegen spanningen in vloeistoffen (viscositeit)	
1.12 Specifieke warmte en warmtegeleiding	
2. Beschrijving van de stroming	24
2.1 Stroomlijnen en trajectoriën	
2.2 Materiële en lokale afgeleiden	
2.3 Natuurlijke coördinaten en relatie tussen trajectoriën en stroomlijnen	
2.4 Versnelling in een roterend systeem	
2.5 Bolcoördinaten	
3. Beweging	29
3.1 Inwendige en uitwendige krachten	
3.2 Bewegingsvergelijkingen	
3.3 Quasi-horizontale bewegingen in de atmosfeer en de oceaan	
3.4 Rossbygetal	
3.5 Corioliskracht en inertiaalbeweging	
3.6 Reynoldsgetal	
4. Massa	35
4.1 Continuïteitsvergelijking	
4.2 Geluidsgolven	
5. Energie	39
5.1 Mechanische energie	
5.2 De eerste hoofdwet van de thermodynamica	
5.3 Adiabatisch temperatuurprofiel	
5.4 Potentiële temperatuur	
5.5 Faseovergangen en de Clausius-Clapeyronvergelijking	
5.6 De "nat-adiabaat"	
6. Evenwichtstoestanden	49
6.1 Geldigheid hydrostatische vergelijking voor bewegingen in de oceaan en de atmosfeer	
6.2 Drukcoördinaten	
6.3 Het geostrofische evenwicht	
6.4 Thermisch wind evenwicht	
6.5 Het gradient wind evenwicht	

7. Stabiliteitsanalyse	54
7.1 Hydrostatische onstabiteit	
7.2 Hydrostatische onstabiteit in de atmosfeer	
7.3 Hydrostatische onstabiteit in de aarde	
7.4 Kelvin-Helmholtz onstabiteit	
7.5 Inertiaal oscillaties in een zonale stroming en behoud van impuls	
7.6 Stabiliteit van het geostrofisch evenwicht	
7.7 Stabiliteit van het gradient wind evenwicht	
8. Circulatie, vorticeit en divergentie	64
8.1 Divergentie en vorticeit	
8.2 Circulatie	
8.3 Vorticeitsvergelijking	
8.4 De verticale component van de vorticeitsvergelijking	
9. Vrije Golven in niet visceuze vloeistoffen	69
9.1 Inleiding	
9.2 Golven in ondiep water	
9.3 Het effect van rotatie op zwaartekrachtsgolven ($f=\text{constant}$)	
9.4 Potentiele vorticeitsvergelijking in ondiep water ($f\neq\text{constant}$)	
9.5 Quasi-geostrofische benadering en Rossby golven	
9.6 Massa-divergentie in Rossby golven in de atmosfeer	
9.7 Depressie-vorming	
10. Aanpassing aan geostroof evenwicht	79
10.1 Probleemstelling	
10.2 Energie-huishouding van het aanpassingsproces	
10.3 Waarom is er geostrofisch evenwicht?	
11. Effecten van randen en forcering op golven	83
11.1 Golven in een kanaal (Kelvin golven en getijden)	
11.2 Stormvloeden	
11.3 Topografische Rossby golven ("continental shelf waves")	
12. Potentiële Vorticeit	91
12.1 Inleiding	
12.2 Ertel's theorema	
13. Barocliene onstabiteit	94
13.1 Inleiding	
13.2 Het thermisch wind evenwicht	
13.3 Barocliene onstabiteit	
13.4 Interpretatie van het stabiliteits criterium	
13.5 Baroclien onstabiele bewegingen in depressies	
14. Turbulentie	100
14.1 Reynoldsgetal	
14.2 Reynoldsvergelijkingen	
14.3 Gradienthypothese	
14.4 Menglengte	

15. Grenslagen in roterende media	104
15.1 Oppervlaktelaag	
15.2 Ekmanlaag	
15.3 Ekmanspiraal	
15.4 Ekmanzuiging	
 Appendix A	 109
Referenties	110

6

EVENWICHTSTOESTANDEN

6.1 Geldigheid hydrostatische vergelijking voor bewegingen in de oceaan en de atmosfeer

We hebben gezien dat het effect van viscositeit in het impulsbudget in de atmosfeer en de oceaan (ver van randen) verwaarloosbaar is. We weten ook dat voor circulaties met een grote horizontale schaal (orde 1000 km) de Coriolisversnelling in de atmosfeer en de oceaan de andere convectieve versnellingen overheerst. Hierdoor kan zich in deze media een nieuw evenwicht instellen, naast het al eerder besproken hydrostatisch evenwicht. We zullen in dit hoofdstuk ingaan op de verschillende gedaantes van dit evenwicht. Voor de fysica van de aarde is dit hoofdstuk dus minder relevant.

Voor bepaalde bewegingen mag in eerste benadering aangenomen worden dat de hydrostatische vergelijking (4.8) geldig is. Een gedeeltelijk bewijs hiervoor volgt uit de beginselen van de schaalanalyse toegepast op het vereenvoudigde stelsel bewegingsvergelijkingen (3.10) - (3.12).

We maken weer gebruik van de karakteristieke hoogteschaal H en de horizontale schaal L . Zoals besproken in hoofdstuk 3 zal nu gelden

$$\frac{w}{u} \approx \frac{w}{v} \approx \frac{H}{L}. \quad (6.1)$$

Zonder verder in te gaan op de relatieve grootte van de drie termen in het linkerlid van (3.10) of (3.11) mogen we dus stellen dat het linkerlid van (3.12) van de grootte-orde H/L is vergeleken bij het linkerlid van (3.10) of (3.11). Op dezelfde wijze vinden we voor de componenten van de drukgradient

$$\frac{\partial p / \partial z}{\partial p / \partial x} = \frac{\partial p / \partial z}{\partial p / \partial y} = \frac{L}{H}. \quad (6.2)$$

omdat de afgeleiden omgekeerd evenredig zijn met de lengteschalen. Als nu de effecten van wrijving worden verwaarloosd zodat het linkerlid van (3.10) of (3.11) van dezelfde grootte mag worden verondersteld als het rechterlid, dan zou het linkerlid van (3.12) van de orde $(H/L)^2$ zijn vergeleken bij het rechterlid. Dit betekent dat voor grootschalige bewegingen, waarvoor $H \ll L$, het linkerlid van (3.12) verwaarloosbaar klein is zodat (3.12) mag vervangen worden door

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (6.3)$$

Dit is de hydrostatische benadering. Deze benadering is overigens alleen geldig als het hydrostatisch evenwicht stabiel is, d.w.z. als de dichtheid afneemt met de hoogte, of als de potentiële temperatuur toeneemt met de hoogte (zie hoofdstuk 7).

OPGAVE 6.1.

Leid een uitdrukking af voor de verticale component van de drukgradient in een isotherme hydrostatische atmosfeer (Neem aan dat de atmosfeer zich gedraagt als een ideaal gas). Leid hieruit een uitdrukking af voor de karakteristieke hoogte die kenmerkend is voor de afname van de luchtdruk met toenemende hoogte. Geef een kenmerkende waarde voor deze *schaalhoogte* in de atmosfeer.

6.2 Drukcoördinaten

We beschouwen nu een andere methode om het stelsel stromings-vergelijkingen te vereenvoudigen. Deze is van geheel andere aard dan de Boussinesqbenadering, maar leidt tot merkwaardige overeenkomsten met de Boussinesqvergelijkingen. De methode berust op een transformatie van de verticale coördinaat maar is alleen bruikbaar als de hydrostatische benadering geldt.

Aangezien de druk geschreven kan worden als $p=p(t,x,y,z)$, kan omgekeerd de hoogte van een drukvlak geschreven worden als $z=z(t,x,y,p)$ waarbij p nu als een van de onafhankelijke veranderlijken wordt beschouwd. Een willekeurige functie $F=F(t,x,y,z(t,x,y,p))$ wordt nu beschouwd als $F(t,x,y,p)$ en als we de verticale component van de stroming definiëren als

$$\omega = \frac{dp}{dt} \quad (6.4)$$

dan wordt de totale afgeleide analoog aan (2.3).

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_p F + \omega \frac{\partial F}{\partial p} \quad (6.5)$$

De componenten van de hierin voorkomende gradientoperator zijn de quasi-horizontale afgeleiden van de functie in een drukvlak of 'isobarisch vlak'.

Om de relatie tussen de afgeleiden in de twee coördinatensystemen te verduidelijken beschouwen we een functie van twee onafhankelijke veranderlijken $F=F(\alpha, z(\alpha, p))=F(\alpha, p)$. De afgeleide naar α is volgens de 'kettingregel' gelijk aan

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right]_p = \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right]_z + \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_\alpha \left[\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right]_p \quad (6.6)$$

Passen we deze regel toe op de druk zelf dan wordt het linkerlid natuurlijk gelijk aan nul omdat de differentiatie uitgevoerd wordt bij constante druk. Als we daarenboven gebruik maken van de hydrostatische vergelijking (6.3) dan krijgen we

$$0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right]_z - \rho g \left[\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right]_p \quad (6.7)$$

Door deze regel toe te passen op de componenten van de horizontale gradientoperator vinden we $\nabla_h p = \rho g (\nabla_h)_p z$ en dus de bewegingsvergelijking (3.17) wordt

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = -\mathbf{k} \times f \mathbf{v}_h - g \nabla_h z \quad (6.8)$$

Hierbij is voor het gemak $(\nabla_h)_p \equiv \nabla_h$. De laatste term heeft nu een constante coëfficiënt in plaats van de veranderlijke dichtheid. Volledigheidshalve voegen we hier aan toe de hydrostatische vergelijking (6.3) in drukcoördinaten

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \quad (6.9)$$

Met behulp van (6.6) vinden we na enig schrijfwerk ook nog dat de continuïteitsvergelijking in deze coördinaten luidt

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (6.10)$$

Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als de continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbare vloeistof (zie sectie 4.1).

6.3 Het geostrofisch evenwicht

In hoofdstuk 3 hebben we reeds besproken dat het Rossbygetal klein is voor grootschalige bewegingen in de atmosfeer en de oceaan en dat daarom de convectieve versnellingen klein zijn ten opzichte van de Coriolisversnellingen. In feite vindt men dat ook de lokale versnellingen gewoonlijk relatief klein zijn, zodat het gehele linkerlid van (3.17) of (6.8) in eerste instantie verwaarloosd mag worden. Het resultaat is

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \frac{1}{\rho f} \nabla_h p = \mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla_p z. \quad (6.11)$$

Dit is de geostrofische vergelijking. De geostrofische stroming is blijkbaar evenwijdig aan de isobaren (lijnen van constante druk) of aan de contouren (lijnen van gelijke hoogte) van een drukvlak. De richting is zo dat de druk op het noordelijk halfrond naar rechts toeneemt ten opzichte van de stromingsvector.

Het is niet vanzelfsprekend dat het geostrofisch evenwicht ook inderdaad bestaat. Een voorwaarde voor het bestaan van een evenwichtstoestand is dat het stabiel is t.o.v. kleine verstoringen. We zullen de stabiliteit van het geostrofisch evenwicht in sectie 7.6 onderzoeken. Het proces van aanpassing aan geostrofisch evenwicht zal in hoofdstuk 10 aan de orde komen.

6.4 Thermisch wind evenwicht

De verticale afgeleide van de geostrofische stroming in een hydrostatisch medium is in drukcoördinaten

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = -\mathbf{k} \times \frac{1}{f} \nabla_p \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (6.12)$$

waar we (6.9) gebruikt hebben. Met behulp van (6.9) kunnen we ook schrijven

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = \mathbf{k} \times \frac{g\rho}{f} \nabla_p \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla_p (\ln \rho), \quad (6.13)$$

In de oceanografie wordt deze vergelijking gebruikt om grootschalige oceaanstromen af te leiden uit het waargenomen dichtheidsveld. Dit staat bekend als de dynamische methode.

De gradientoperator in (6.12) heeft betrekking op een isobarisch vlak. Met behulp van (4.1) kunnen we voor de atmosfeer dus schrijven

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = -\mathbf{k} \times \frac{R}{fp} \nabla_p T,$$

of ook

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = \mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla_p (\ln T), \quad (6.14)$$

waar we nogmaals de hydrostatische vergelijking en de toestandsvergelijking gebruikt hebben. In de meteorologie staat deze relatie bekend als de thermische wind-vergelijking.

Volgens de bovenstaande vergelijkingen wordt de verticale gradient van de geostrofische stroming bepaald door horizontale dichtheidsgradiënten op dezelfde

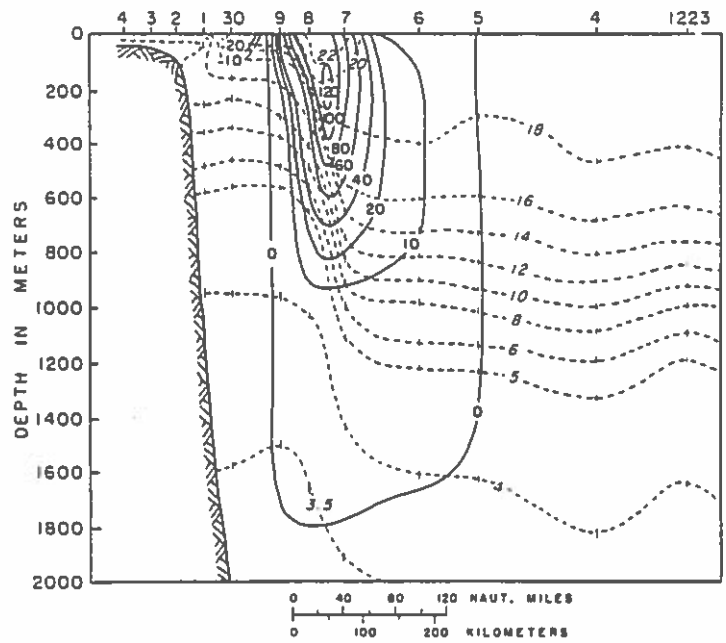


Fig. 1. A section through the Gulf Stream off Chesapeake Bay. Dashed lines, isotherms, deg C; solid lines, isobaths, cm/sec. Hydrographic stations shown at top. (Composite of figs. 5 and 27 in ISELIN, 1936.)

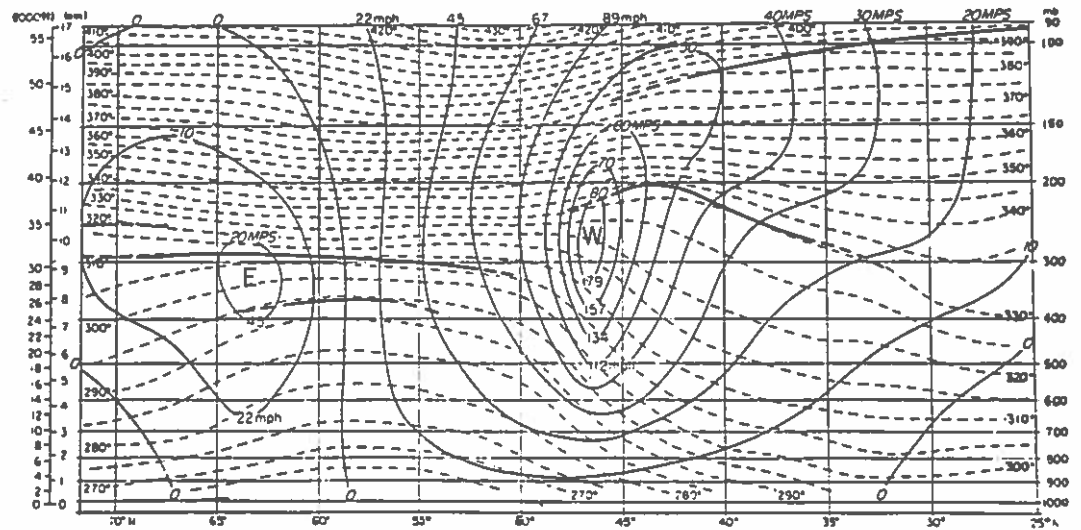


Fig. 2. Mean cross section for 0300 GCT 30 November 1946, showing average distribution of geostrophic west wind (solid lines, m/sec and mi/hr) and potential temperature (dashed lines, deg K), in a case with an approximately straight westerly jet stream. Heavy lines are tropopauses. (PALMÉN and NAGLER, 1948.)

Figuur 6.1. Thermisch wind evenwicht in de oceaan (a) en in de atmosfeer (b).

manier als de geostrofische stroming zelf samenhangt met de horizontale drukgradienten. Op het noordelijk halfrond neemt de stroomsnelheid toe met de hoogte als de dichtheid t.o.v. de stroomrichting naar rechts afneemt of als de temperatuur naar rechts toeneemt (zie figuur 6.1a,b).

Uit (6.12) volgt dat de geostrofische stroming niet varieert in de verticaal als de dichtheid constant is in een isobarisch vlak of, met andere woorden, als de dichtheid alleen afhangt van de druk. Dit wordt een *barotroop* medium genoemd. Een speciaal geval van een barotroop medium is een *homogeen* medium. In dit geval is de dichtheid constant en is de geostrofische stroming dus onafhankelijk van de hoogte. Er moet echter op gewezen worden dat de niet-geostrofische stroming in zo'n medium wel degelijk kan variëren als een functie van de hoogte, b.v. ten gevolge van de turbulente wrijving die we zullen bespreken in de laatste twee hoofdstukken. Tenslotte zij nog vermeld dat een niet-barotroop medium *baroklien* wordt genoemd.

In een baroklien medium is de dichtheid niet constant in een isobarisch vlak. Dit is vooral het geval in de nabijheid van zogenaamde "fronten". Om redenen waar we hier niet op in zullen gaan, zijn in roterende media, temperatuur- en dichtheidsgradiënten vaak geconcentreerd in smalle langgerekte gebieden, die "fronten" worden genoemd. Vanwege het thermisch wind evenwicht moeten deze fronten gepaard gaan met een sterke verticale windschering. In de atmosfeer leidt dit, bijvoorbeeld op gematigde breedte, tot een windsnelheidsmaximum nabij de tropopause (zie figuur 6.1b). Dit windmaximum kan zeer langgerekt zijn en krijgt zodoende de vorm van een "straalstroom". Figuur 6.1c toont de ligging van de straalstroom op 11 juli 1984.

Ook in de oceaan is dikwijls sprake van een straalstroom. De golfstroom is hier een voorbeeld van (zie figuur 6.1a). Of de straalstroom het *gevolg* is van de sterke barocliniciteit is niet direkt duidelijk. Er kan alleen worden geconstateerd dat de dichtheidsverdeling (of de temperatuurverdeling) en de stroming zich zodanig aan elkaar hebben *aangepast* dat er thermisch "wind" evenwicht heerst.

6.5 Het gradient wind evenwicht

Volgens (3.17) wordt de horizontale component van de versnelling gegeven door

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h . \quad (6.15)$$

Gebruikmakend van (2.7) en van het feit dat $f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h = f V_h \mathbf{n}$ wordt dit

$$\frac{dV_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} , \quad (6.16a)$$

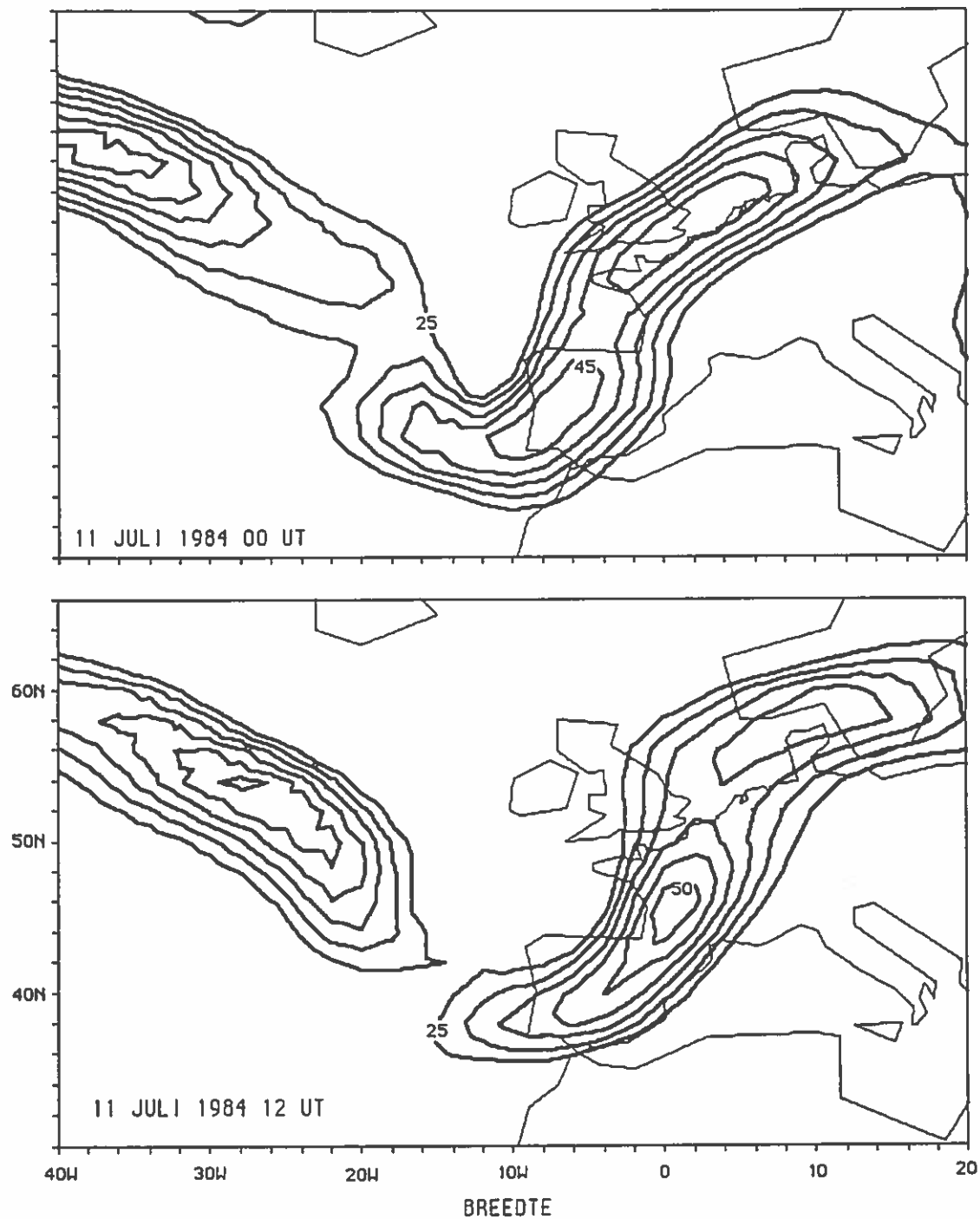
$$\frac{V_h^2}{R_t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f V_h , \quad (6.16b)$$

waarin de parameters s en n de afstanden zijn in respectievelijk de t en n richting. Als de beweging evenwijdig aan de isobaren is, dan is $\partial p / \partial s = 0$, en dan is de snelheid in de bewegingsrichting constant. De stroming is dan in gradient wind evenwicht. Als de isobaren recht zijn ($|R_t| \rightarrow \infty$) dan reduceert dit tot het geostrofisch evenwicht.

Het gradient wind evenwicht wordt gegeven door (6.16b). Deze vergelijking kan als volgt worden herschreven.

$$V_h^2 + f R_t V_h + \frac{R_t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 . \quad (6.17)$$

De gradientwindsnelheid is dus te schrijven als



Figuur 6.1c. De ligging van de straalstroom op 11 juli 1984 boven west Europa en de Atlantische oceaan. Getoond wordt de windsnelheid in m/s op het 300 hPa vlak (op ongeveer 10 km hoogte) op twee tijdstippen volgens de analyse van het ECMWF (Europees Centrum voor Middellange termijn verwachtingen).

$$V_h = \frac{-fR_t}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R_t^2}{4} - \frac{R_t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}} \quad (6.18)$$

Niet alle oplossingen van vergelijking (6.18) zijn fysisch realistisch, omdat deze reëel moet zijn en niet negatief mag zijn. De tweede eis is een gevolg van de definitie van het natuurlijke coördinaten stelsel.

OPGAVE 6.2.

- (a) Wat is het teken van de horizontale drukgradient in een hogedrukgebied waarin de deeltjes anticyclonaal rond draaien?
- (b) Geef een uitdrukking voor de maximaal mogelijke absolute waarde van de horizontale drukgradient in een hogedrukgebied.
- (c) Bestaat er in een "normaal" cyclonaal lagedrukgebied ook zo'n limiet?
- (d) De werkelijke windsnelheid in de atmosfeer wordt weleens benaderd door de geostrofische wind met behulp van de formule, $V_{geo} = -(1/f\rho)(\partial p/\partial n)$. Hierbij wordt onder andere de kromming van de stroming verwaarloosd. Leid een uitdrukking af voor de relatie tussen de geostrofische wind V_{geo} bij een gegeven drukgradient en de gradient wind V_{grad} bij diezelfde drukgradient. Is V_{grad} groter of kleiner dan V_{geo} in een hogedrukgebied?

OPGAVE 6.3: Een cyclonale wervel bevindt zich in gradient wind evenwicht en in hydrostatisch evenwicht. De kern van de wervel is kouder dan de omgeving. Laat zien dat de intensiteit van de wervel toeneemt met de hoogte.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, Haltiner en Martin.

7 STABILITEITSANALYSE

7.1 Hydrostatische stabiliteit

In sectie 5.2 is het hydrostatische evenwicht geïntroduceerd. Op grond van schaalanalyse is hier afgeleid dat de verticale versnelling kan worden verwaarloosd ten opzichte van de zwaartekrachtsversnelling als de horizontale schaal van de bewegingen groot is ten opzichte van de verticale schaal. Toch kan nog niet met zekerheid worden gezegd dat het hydrostatisch evenwicht ook altijd een goede benadering is voor het verticale krachten-evenwicht. Om meer zekerheid hierover te krijgen, moet de stabiliteit van dit evenwicht worden geanalyseerd. Hiertoe kijken we naar de ontwikkeling in de tijd van kleine verstoringen van het evenwicht. Als deze verstoringen groeien in de tijd, dan is het evenwicht niet mogelijk, ofwel onstabiel.

Er zijn verschillende (wiskundige) manieren om de stabiliteit van een evenwichtstoestand te analyseren. In dit hoofdstuk zullen we de meest eenvoudige en fysisch inzichtelijke methode hanteren: de zogenaamde "parcel method". We zullen deze methode eerst toepassen op de meest eenvoudige vorm van stabiliteit, namelijk hydrostatische stabiliteit. In latere secties zal het langzamerhand meer ingewikkeld worden als we de stabiliteit van de dynamische evenwichtstoestanden, zoals het geostrofisch evenwicht, gaan bekijken.

We beschouwen een vloeistofpakketje¹ dat op en neer beweegt in een omgeving die voldoet aan het hydrostatisch evenwicht (4.8). De dichtheid en de druk van het vloeistofpakketje kunnen worden geschreven als

$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x,y,z,t) , \quad (7.1a)$$

$$p = p_0(z) + p'(x,y,z,t) , \quad (7.1b)$$

Op basis van (4.10) kunnen we, als we de Coriolisversnelling en de viscositeit verwaarlozen, voor het vloeistofpakketje schrijven:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g . \quad (7.2)$$

Deze vergelijking beschrijft hoe een warme vloeistofbel stijgt of daalt onder invloed van de verticale storings-drukgradientkracht en de "gereduceerde" zwaartekracht of "Archimedeskracht" die is geassocieerd met de wet van Archimedes die zegt dat een voorwerp in een vloeistof in hydrostatisch evenwicht een opwaartse kracht ondervindt die gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof. De Archimedeskracht wordt ook wel "buoyancy" kracht genoemd. We nemen voor het gemak even aan dat de storingsdruk, p' , verwaarloosbaar is. Dus, de dichtheid van het vloeistofpakketje verandert niet terwijl de druk binnen de vloeistofbel zich exact aan de omgeving aanpast. De vergelijking voor de verticale snelheid van de vloeistofbel wordt nu

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\rho'}{\rho_0} g . \quad (7.3)$$

Stel dat de bel zich eerst op een niveau $z=z^*$ bevindt, waar de dichtheid ρ^* is. Dan is de dichtheid in de nabije omgeving van dit niveau te schrijven als

¹Voor een kritische beschouwing van het begrip "vloeistofpakketje": zie Bohren en Albrecht, p. 109-111.

$$\rho_0 \equiv \rho^* + \frac{d\rho_0}{dz} \delta z . \quad (7.4)$$

De grootheid $(d\rho_0/dz)$ is de "stratificatie" of gelaagdheid. Als de vloeistofbel zijn dichtheid, ρ^* behoudt bij een uitwijking δz (in feite is dit alleen in de oceaan een goede veronderstelling; zie sectie 7.2) dan wordt (7.2):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \frac{g \left(\rho^* + \frac{d\rho_0}{dz} \delta z - \rho^* \right)}{\rho^*} . \quad (7.5)$$

We hebben hierin de variatie in de omgevingsdichtheid in de noemer verwaarloosd. Dus

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = -N^2 \delta z , \quad (7.6)$$

waarin

$$N^2 \equiv \frac{-g}{\rho^*} \frac{d\rho_0}{dz} \text{ [s}^{-2}\text{]} . \quad (7.7)$$

N wordt de "Brunt-Väisälä frequentie" genoemd. Het is een maat voor de statische stabiliteit. Vergelijking (7.6) heeft een oplossing van de vorm

$$\delta z = \text{Re} \{ A \exp(\pm i N t) \} . \quad (7.8)$$

Hierin is A een imaginaire amplitude. Als $N > 0$ zal de vloeistofbel rond zijn initiële (evenwichts) positie oscilleren met een periode

$$\tau = \frac{2\pi}{N} . \quad (7.9)$$

Deze zogenaamde "buoyancy"-oscillaties zijn kennelijk alleen mogelijk als $d\rho_0/dz < 0$. Als $d\rho_0/dz > 0$ dan is $N^2 < 0$. Dus, N is imaginair en kan daardoor worden geschreven als

$$N = i |\lambda| . \quad (7.10)$$

Substitutie in (7.8) levert

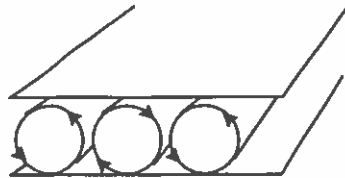
$$\delta z = A \exp \{ |\lambda| t \} . \quad (7.11)$$

De uitwijking δz zal dus exponentieel in de tijd groeien. Dit noemen we hydrostatische onstabieleit. Als $d\rho_0/dz = 0$ ($N = 0$) dan noemen we de toestand neutraal.

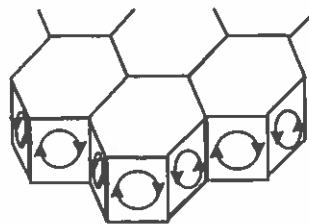
De circulatie die het gevolg is van hydrostatische onstabieleit noemt men "convectie". In de bovenstaande analyse hebben we ons alleen maar beziggehouden met één vloeistofdeeltje. Als vloeistofdeeltjes stijgen, zal er in een nagenoeg onsamendrukbare vloeistof, zoals water, vanwege massabehoud een compenserende daalstroom optreden. De mogelijke circulatiepatronen die dan kunnen ontstaan zien we in figuur 7.1. Deze patronen zien wij in de vorm van wolkenstraten en ook bijna hexagonale wolkenformaties dagelijks op satelliefoto's van de aarde¹.

¹(zie bv. <http://orbit-net.nesdis.noaa.gov/arad/fpdt/nwasat.html>).

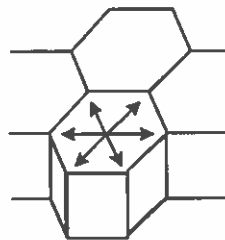
(a) roll pattern



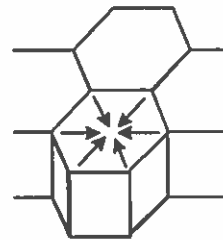
(b) hexagonal pattern



(c) outward surface flow

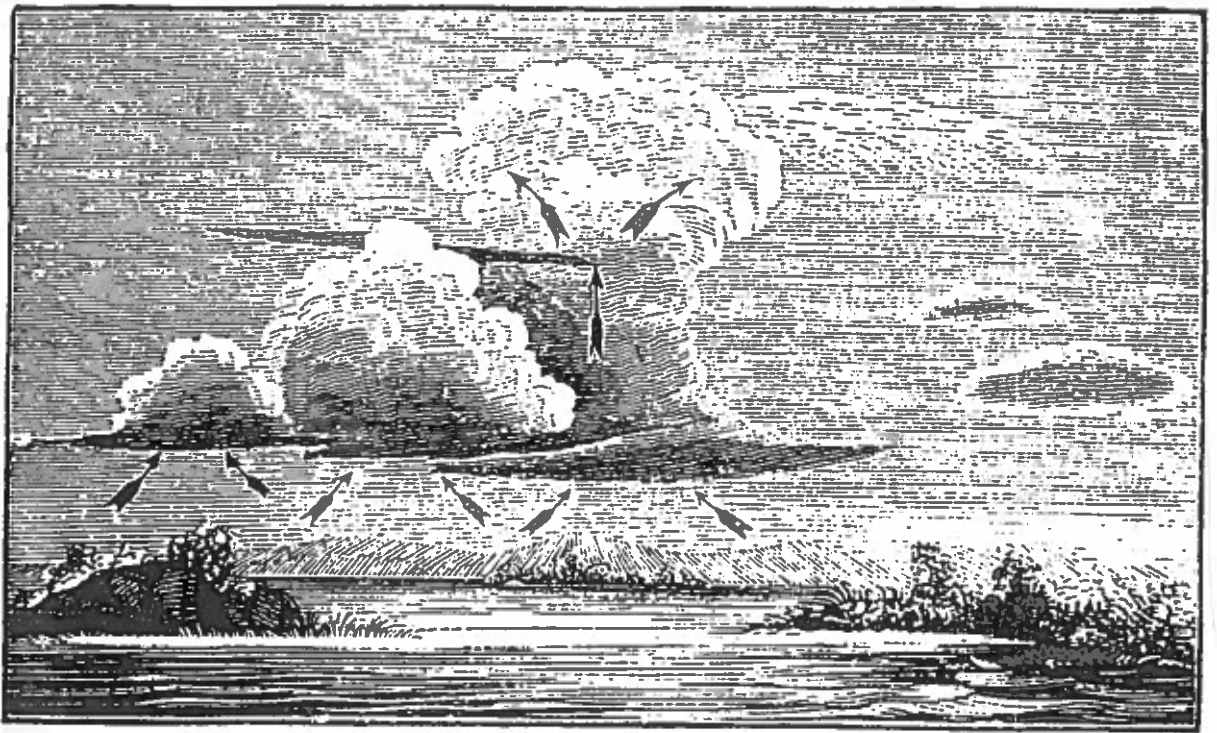


(d) inward surface flow



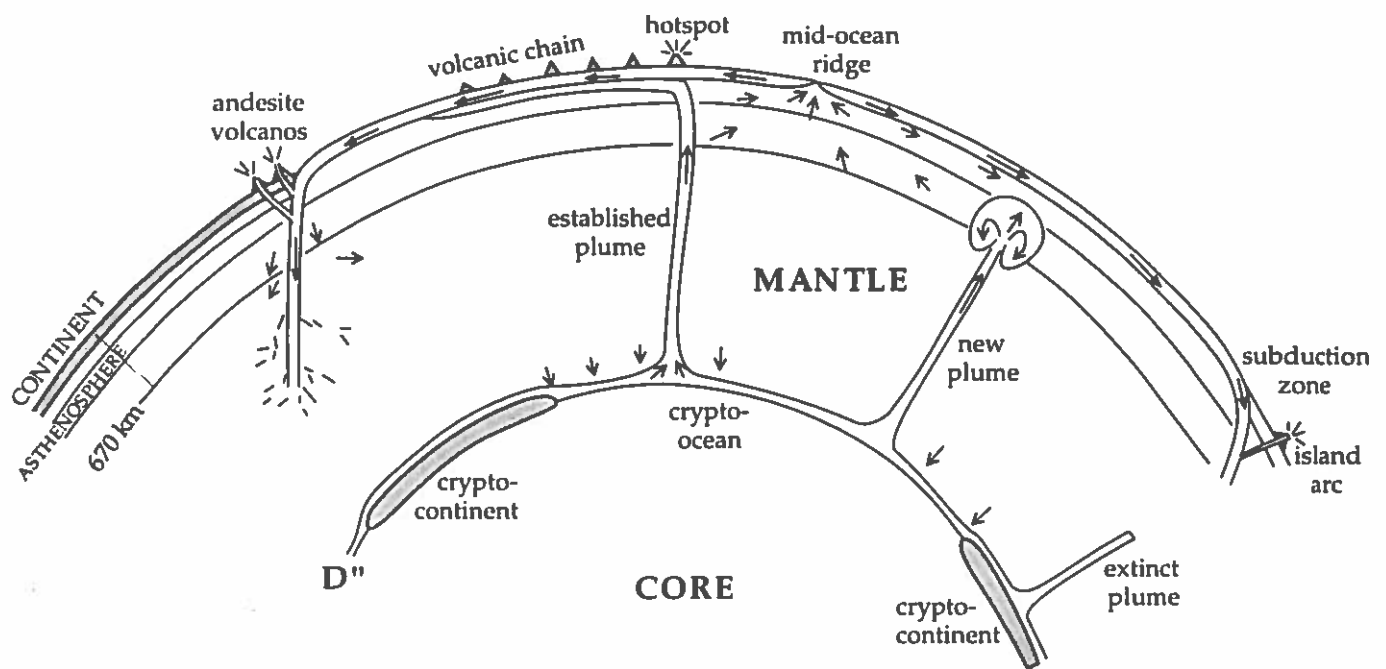
Some patterns of steady convection in a plane layer heated from below. (a) Convection rolls, (b) vertical flow in hexagonal patterns, for which the surface flow may be (c) outward away from or (d) inward toward the center of the cell (after Busse, 1989).

Figuur 7.1. (uit Lowrie)



Figuur 7.2.
Storms (1841).

Formation of cumulus clouds by convection (Espy, 1841), from Espy, *Philosophy of*



Figuur 7.3. (uit Lowrie)

An idealized cross-section through the mantle, showing convective flow and the relationship of mantle plumes to the D''-layer (after Stacey, 1992).

7.2 Hydrostatische onstabieleit in de atmosfeer.

De bovenstaande stabiliteitsanalyse is alleen van toepassing op de oceaan omdat water nagenoeg onsamendrukbaar is en omdat het verwaarlozen van de effecten van viscositeit toelaatbaar is. In de atmosfeer is de dichtheid van een luchtpakketje vanwege samendrukbaarheid geen behouden grootte. In dit geval is het aan te raden om een andere behouden grootte te gebruiken, namelijk de potentiële dichtheid of potentiële temperatuur (zie vgl. 5.27). Het blijkt dat de verticale component van de bewegingsvergelijking (7.2) voor de atmosfeer kan worden herschreven in termen van de potentiële temperatuur, θ , en een functie Π , die is gedefinieerd als

$$\Pi \equiv \frac{c_p T}{\theta} = c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa, \quad (7.12)$$

waarin $\kappa = R/c_p$. De functie Π heet de Exner functie, naar de Oostenrijkse meteoroloog Exner die in het begin van deze eeuw leefde.

OPGAVE 7.1:

(a) Schrijf de verticale component van de bewegingsvergelijking:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (7.13)$$

in termen van θ en Π (i.p.v. p en ρ).

(b) Stel

$$\Pi = \Pi_0(z) + \Pi'(x,y,z,t), \quad (7.14a)$$

$$\theta = \theta_0(z) + \theta'(x,y,z,t), \quad (7.14b)$$

Neem aan dat voor de referentietoestand (θ_0, Π_0) hydrostatisch evenwicht geldt en dat $\theta' < \theta_0$. Laat zien dat de verticale component van de bewegingsvergelijking kan worden geschreven als:

$$\frac{dw}{dt} = -\theta_0 \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\theta_0} g. \quad (7.15)$$

(Buoyancy, $B = \theta'/\theta_0$). Beschouw (weer) een luchtbel die zich op een hoogte $z=z_0$ bevindt met een potentiële temperatuur $\theta=\theta^*$ en een zetje, δz , in de verticale richting krijgt. Verwaarloos Π' .

(c) Laat zien dat de Brunt-Väisälä frequentie in dit geval kan worden geschreven als

$$N^2 = \frac{g}{\theta^*} \frac{d\theta_0}{dz}. \quad (7.16)$$

(d) Wat is de waarde van N op een hoogte $z=1$ km in een atmosfeer waar θ lineair toeneemt van 295 K naar 305 K in de onderste 2 km?

(e) Wat is de waarde van N op een diepte van 500 m in een oceaan waar de dichtheid lineair toeneemt met de diepte van 1024 kg m⁻³ aan het oppervlak naar 1028 kg m⁻³ op een diepte van 1000m?

De theorie van convectie in de atmosfeer wordt gecompliceerd door dat er in de stijgtak van de circulatie latente warmte vrijkomt bij condensatie van waterdamp in wolken (figuur 7.2). Het belang van dit effect neemt toe met toenemende temperatuur. Als het effect van vallende en weer verdampende regendruppels

wordt verwaarloosd, kan worden aangetoond dat een verzadigde luchtbel met een temperatuur van ongeveer 15°C na een 1 km stijging 6.5°C kouder is. Dit is 3.5°C warmer dan op grond van "droog"-adiabatische stijging zou worden verwacht. In de tropen of in de zomer (ong. 30°C) is de temperatuur afname van een stijgende verzadigde luchtbel per km stijging ongeveer 4.5°C! Latente warmte is dus een zeer belangrijk element in de dynamica van atmosferische convectie.

7.3 Hydrostatische onstabieleit in de aarde

We hebben in het voorgaande de effecten van moleculaire viscositeit en moleculaire warmtegeleiding buiten beschouwing gelaten. Deze effecten zijn inderdaad van ondergeschikt belang in de atmosfeer en de oceaan. In de mantel van aarde, waar convectie volgens de huidige inzichten op uitgebreide schaal voorkomt, kunnen deze effecten niet worden verwaarloosd. Beide effecten werken de verticale versnelling van het warme vloeistofmonster tegen. De omstandigheden voor het optreden van convectie worden dan niet alleen bepaald door de verticale dichtheidsgradient of het verschil in dichtheid tussen opstijgende vloeistof en dalende vloeistof, maar ook door de kinematische viscositeitscoëfficiënt ν en de thermische diffusiviteit κ . Lord Rayleigh heeft dit in 1916 theoretisch aangetoond. Uit zijn theorie blijkt dat het optreden van convectie in een bijna onsamendrukbare vloeistof wordt bepaald door dimensieloze grootte,

$$Ra = \frac{g\alpha_T\Delta TH^3}{\kappa\nu}.$$

Hierin is ΔT het temperatuurverschil tussen de onderkant en de bovenkant van de vloeistoflaag. De afkorting Ra staat voor *Rayleighgetal*. Merk op dat κ en ν allebei in de noemer staan, m.a.w. viscositeit en geleiding hinderen convectie. In de ideale situatie van convectie van een Newtoniaanse vloeistof tussen twee perfect geleidende en perfect gladde platen, treedt convectie pas op als $Ra > 657$. In het bovenste deel van de mantel (diepte: 70-670 km) is $\Delta T = 60$ K, $\alpha_T = 2 \times 10^{-5}$ K⁻¹, $\kappa = 10^{-6}$ m²s⁻¹ en $\nu = 10^{18}$ m²s⁻¹. Met $g = 10$ m s⁻², is $Ra = 2592$. De conclusie is dat convectie in de mantel waarschijnlijk een belangrijk mechanisme is waarmee warmte vanuit de kern naar buiten wordt afgevoerd (figuur 7.3).

7.4 Kelvin-Helmholtz onstabieleit

De Brunt-Väisälä frequentie bepaalt de stabiliteit van een stromend medium maar gedeeltelijk. Om dit te illustreren, beschouwen we een horizontale stroming met verticale snelheidsgradienten in een stabiel gelaagde vloeistof. Deze situatie komt zeer vaak voor in bijvoorbeeld de grenslaag van de atmosfeer.

Beschouw twee vloeistofpakketjes met eenheidsvolume op verschillende hoogte in deze stroming. De snelheid van het vloeistofpakketje op hoogte $z + \delta z$ is $U + \delta U$, terwijl de snelheid van het vloeistofpakketje op hoogte z is U . We willen voorwaarden afleiden waaronder "menging" van deze vloeistofpakketjes mogelijk is. "Menging" betekent hier dat de vloeistofpakketjes op gelijke hoogte moeten komen. Hiertoe moeten ze, vanwege de stabiele gelaagdheid, een "potentiële energie barriere" overwinnen. Het kost een zekere hoeveelheid arbeid om verticale bewegingen tot stand te brengen in een stabiel gelaagde vloeistof. Arbeid A is gedefinieerd als kracht maal afstand, dus

$$A = \int_{z_1}^{z_1 + \zeta} F(z) dz \quad (7.17)$$

voor een vloeistofpakketje dat van $z=z_1$ naar $z=z_1 + \zeta$ gebracht wordt. F is de kracht (in dit geval de buoyancy kracht) die op het pakketje werkt. Deze kan worden geschreven als

$$F = g (\rho(z_1) - \rho(z_1 + \zeta)) \quad (\text{per volume-eenheid!}) \quad (7.18)$$

Dit kan worden herschreven als

$$F = -g \zeta \frac{d\rho}{dz} + \mathcal{O}(\zeta^2) \quad (7.19)$$

(Taylor reeks ontwikkeling rond het punt $z=z_1$). Hieruit volgt dat

$$A \equiv \int_0^\zeta g \rho \beta \zeta d\zeta = \frac{1}{2} \rho g \beta \zeta^2 \quad (7.20)$$

waarin

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (7.21)$$

een maat is voor de statische stabiliteit. De netto arbeid die nodig is om de twee vloeistofpakketjes te mengen, op een hoogte $z+\gamma\delta z$, ($0 < \gamma < 1$), is

$$A = \frac{1}{2} \rho g \beta ((\gamma\delta z)^2 + (1-\gamma)^2(\delta z)^2) \geq \frac{1}{4} \rho g \beta (\delta z)^2. \quad (7.22)$$

A is namelijk minimaal als $\gamma=1/2$. De snelheid van het "gemengde" vloeistofpakketje moet zijn: $(1/2)(U+U+\delta U)$ om aan impuls behoud te voldoen (we verwaarlozen hier veranderingen in dichtheid). Hierdoor is de netto verandering in de kinetische energie per volume-eenheid:

$$K = \frac{1}{2} \rho (U + \delta U)^2 + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{4} \rho (U + U + \delta U)^2, \quad (7.23)$$

ofwel

$$K = \frac{\rho}{4} (\delta U)^2. \quad (7.24)$$

Deze kinetische energie is beschikbaar voor de menging. Als dit niet voldoende is, m.a.w. als $K < A$, of als

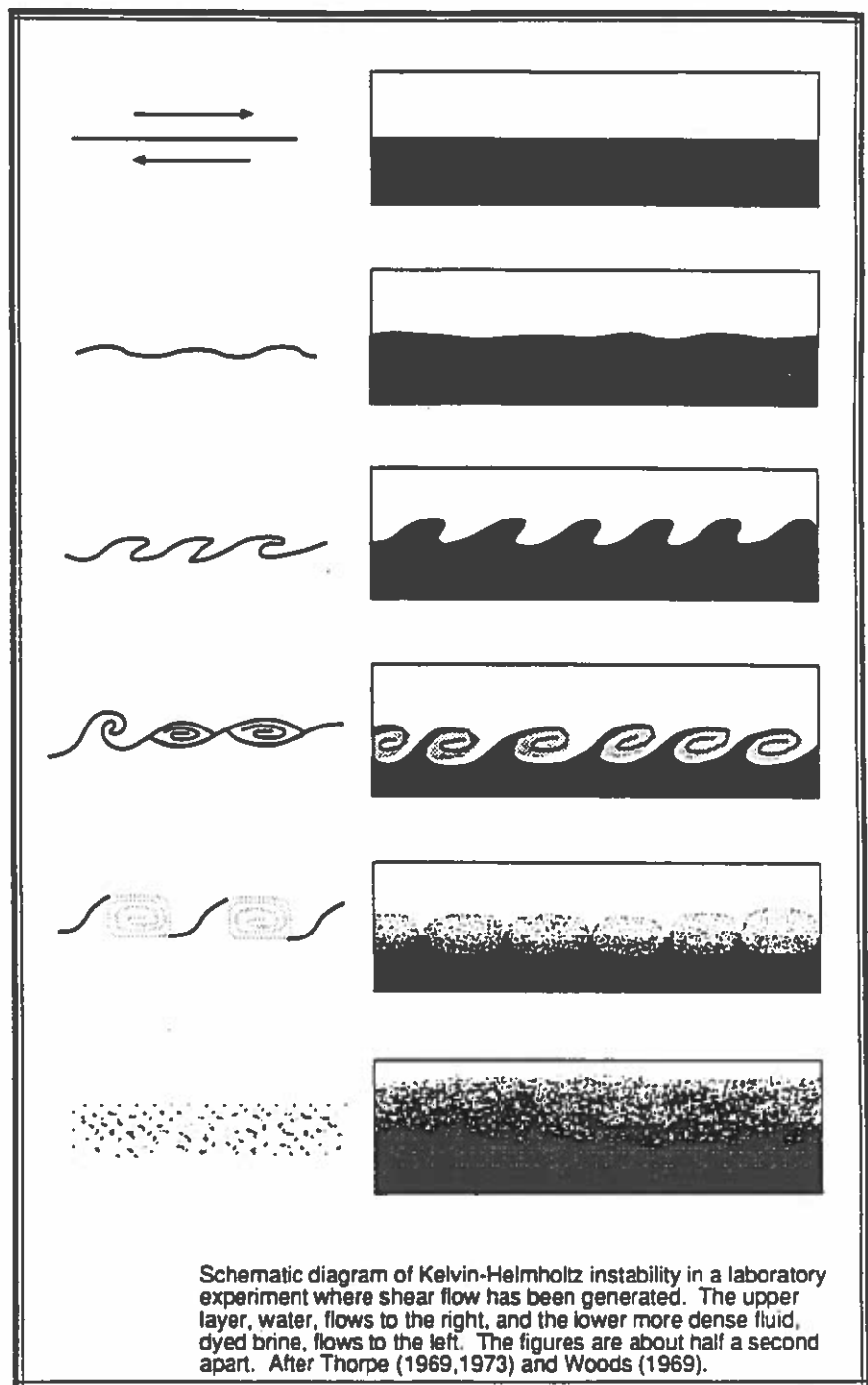
$$\frac{\rho}{4} (\delta U)^2 < \frac{1}{4} \rho g \beta (\delta z)^2, \quad (7.25)$$

dan is menging niet mogelijk. We spreken dan van een dynamisch stabiele situatie. De basisstroming, $U(z)$, is stabiel. De bovenstaande voorwaarde voor stabiliteit kan ook worden geschreven als

$$Ri > 1, \quad (7.26)$$

waarin

$$Ri \equiv \frac{g\beta}{\left(\frac{dU}{dz}\right)^2}. \quad (7.27)$$



Figuur 7.4. (uit Stull, 1988)

Ri is een dimensieloos getal dat het Richardson getal wordt genoemd. Als $Ri < 1$ dan is er voldoende schering om onstabieleit (menging) eventueel mogelijk te maken. Deze onstabieleit heet ook wel Kelvin-Helmholtz onstabieleit. De turbulente wervels in de grenslaag van de atmosfeer zijn mogelijk het gevolg van Kelvin-Helmholtz onstabieleit. Figuur 7.4 geeft een schematische indruk van de ontwikkeling van Kelvin-Helmholtz onstabieleit

7.5 Inertiaal oscillaties in een zonale stroming en behoud van impuls

We zullen in de komende secties ingaan op de stabiliteit van het geostrofisch evenwicht. In sectie 3.5 hebben we gezien dat een deeltje in een roterende vloeistof een periodieke beweging kan uitvoeren door toedoen van de Coriolis kracht. Aangezien deze oscillaties van belang zijn voor de stabiliteit van het geostrofisch evenwicht zullen we hier nu verder op ingaan.

Beschouw een uniforme stroming u die voldoet aan geostrofisch evenwicht. Er is dus een evenwicht tussen de Corioliskracht, F_{cor} , en de drukgradientkracht, F_p . Stel voor het gemak alle x -afgeleiden gelijk aan nul. De x -component van de bewegingsvergelijking (3.15) wordt nu

$$\frac{du}{dt} - fv = 0. \quad (7.28)$$

Aangezien $v = dy/dt$ kunnen we uit de bovenstaande vergelijking een behouden grootheid,

$$M = u - fy, \quad (7.29)$$

afleiden. M is het absolute impuls per massa-eenheid.

Stel dat een deeltje in een zonale stroming een zetje, δy , krijgt in de y -richting. Stel voorts dat $\delta y > 0$. Als gevolg van behoud van impuls moet de snelheid van dit deeltje toenemen. Als er verder niets verandert in de omgeving van dit deeltje, zal de drukgradientkracht onvoldoende zijn om de toegenomen Corioliskracht op het deeltje tegen te werken. Het deeltje zal daarom worden teruggedreven naar zijn oorspronkelijke positie $y = y_0$. Dit is een manifestatie van "inertiële", of "gyroskopische" stabiliteit. Waarschijnlijk zal het deeltje doorschieten door de oorsprong $y = y_0$. Het zal vervolgens weer een teruggedrijvende kracht ondervinden en zodoende een oscillatie gaan uitvoeren rond $y = y_0$. Deze oscillaties worden inertiaal- of traagheidsoscillaties genoemd.

Oscillaties zijn een manifestatie van stabiliteit. De vraag is echter: bestaat er ook zoiets als inertiële onstabiliteit?

7.6 Stabiliteit van het geostrofisch evenwicht

We zullen de deeltjesmethode gebruiken om de stabiliteit van het geostrofisch evenwicht te onderzoeken. Beschouw weer een zonale stroming, u_g , die voldoet aan geostrofisch evenwicht. Er geldt dan

$$u_g = \frac{-1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.30)$$

De bewegingsvergelijkingen worden

$$\frac{du}{dt} = f \frac{dy}{dt}, \quad (7.31)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu = f(u_g - u). \quad (7.32)$$

We beschouwen weer een deeltje dat met de geostrofische stroming mee beweegt langs de lijn $y=y^*$ en een zetje, δy , krijgt in de positieve y -richting. De nieuwe zonale snelheid op $y=y^* + \delta y$ kan uit (7.31) worden gevonden:

$$u(y^* + \delta y) = u_g(y^*) + f \delta y . \quad (7.33)$$

We laten een niet-homogene geostrofische stroming toe, met andere woorden u_g is afhankelijk van y . In de straalstroom in de atmosfeer is dit altijd het geval. Met andere woorden, de stroomsnelheid varieert sterk in de richting dwars op de stroming.

De geostrofische wind in het punt $y=y^* + \delta y$ kan worden benaderd door een Taylorreeks ontwikkeling als volgt:

$$u_g(y^* + \delta y) = u_g(y^*) + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \dots \quad (7.34)$$

De y -component van de vergelijking op $y=y^* + \delta y$ wordt

$$\frac{dv(y^* + \delta y)}{dt} \equiv f(u_g(y^* + \delta y) - u(y^* + \delta y)) . \quad (7.35)$$

We hebben hier alweer aangenomen, zoals steeds bij de deeltjes methode, dat er niets veranderd in de drukverdeling door de meridionale beweging van het vloeistofdeeltje. Als we (7.33) en (7.34) in (7.35) substitueren krijgen we

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = f \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} - f \right) \delta y . \quad (7.36)$$

Dus:

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} + f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \delta y = 0 . \quad (7.37)$$

Dit is opnieuw de slinger-vergelijking. De oplossing van deze vergelijking is

$$\delta y = \text{Re} \{ A \exp(\pm i F t) \} , \quad (7.38)$$

waarin

$$F^2 = f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) . \quad (7.39)$$

Afhankelijk van het teken van $(f - \partial u_g / \partial y)$ zal het vloeistofdeeltje geforceerd worden om terug te keren naar de oorsprong of versneld worden. Aangezien

$$f - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{-\partial M_g}{\partial y} \quad (7.40)$$

wordt het stabiliteitscriterium

$$\frac{\partial M_g}{\partial y} < 0 \quad \text{STABIEL} ; \quad (7.41a)$$

$$\frac{\partial M_g}{\partial y} = 0 \quad \text{NEUTRAAL} ; \quad (7.41b)$$

$$\frac{\partial M_g}{\partial y} > 0 \quad \text{INSTABIEL} ; \quad (7.41c)$$

Inertiële onstabieleit van een "geostrofische" stroming is dus inderdaad mogelijk. Deze onstabieleit is afhankelijk van de gradient in de impulsverdeling. De

horizontale gradient van de impulsverdeling speelt dus dezelfde rol in dit probleem als de vertikale gradient in de (potentiële) dichtheidsverdeling bij hydrostatische stabiliteit. Net als de Brunt-Väisälä frequentie, N , is F een fundamentele frequentie in de atmosfeer en de oceaan. N is de frequentie die hoort bij oscillaties rond het hydrostatisch evenwicht, terwijl F de frequentie is die hoort bij oscillaties rond het geostrofisch evenwicht. Er is dus een fundamentele analogie tussen een gestratificeerde vloeistof en een roterende vloeistof. Yih (1980)¹ heeft dit als volgt geformuleerd:

The analogy between the flow of a fluid with density variation and fluid flow in an accelerating or rotating frame of reference has been generally recognized. In the eighteenth century, d'Alembert already recognized that the mass-times-acceleration term in Newton's famous equation could be moved to the other side of the equation and be considered as a force, and in fact a body force of $-a$ per unit mass, acting in the direction opposite to that of the acceleration, which has the magnitude a . The body is then in equilibrium and at rest in a frame of reference accelerating with the body. In this noninertial system, the acceleration, which may vary with time and space, manifests itself in the form of body forces. In a linearly accelerating system, the acceleration manifests itself in the form of gravity. In a rotating system, the centripetal acceleration and the Coriolis acceleration take the form of the centrifugal force and the Coriolis force, respectively, both of which are body forces.

De grootte $-\partial M_g/\partial y$, wordt ook wel vorticiteit genoemd. Dit begrip, dat in het college stroomingsleer en transportverschijnselen al uitgebreid ter sprake is gekomen, speelt in de geofysische stroomingsleer een centrale rol. In hoofdstuk 8 zullen we hier uitgebreid op ingaan.

7.7 Stabiliteit van het gradient wind evenwicht (behoud van impulsmoment)

Als de stroming cirkel-symmetrisch is, zoals bij benadering in een cycloon, dan is het goed om de bewegingsvergelijkingen (3.15-16) in cilindrische coördinaten (r, ϑ) te schrijven. We krijgen dan de volgende twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u - \frac{v^2}{r} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v + \frac{u v}{r} + f u = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} .$$

Hierin zijn u en v , respectievelijk, de radiële (r) en de tangentiële (ϑ) component van de snelheid. De tweede term in het linkerlid kan worden geschreven als

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial}{\partial z} .$$

De bewegingsvergelijkingen voor een axisymmetrische stroming in de atmosfeer of de oceaan zijn

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} , \quad (7.42)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u v}{r} + f u = 0 . \quad (7.43)$$

Uit (7.43) volgt

$$\frac{dM^*}{dt} = 0 , \quad (7.44)$$

¹Yih, C-S, 1980: Stratified flow. Academic Press, New York. 418 pp.

waarin nu

$$M^* \equiv \nu r + \frac{1}{2} f r^2 . \quad (7.45)$$

M^* is het impulsmoment per massa-eenheid. Het gradient wind evenwicht volgt uit (7.42) met $du/dt=0$ en (7.43) met $dv/dt=0$. De eerste vergelijking levert een relatie tussen ν en de radiale drukgradient (6.18) en de tweede relatie levert daarna $u=0$.

We maken gebruik van het behoud van M^* om te kijken welke verdeling van $\nu(r)$ mogelijk (stabiel) zijn.

Beschouw twee vloeistofringen met gelijke massa op afstanden $r=r_1$ en $r=r_2$ ($>r_1$). Deze ringen verwisselen vervolgens van plaats. Als dit energie gaat kosten, zal dit niet vanzelf gebeuren.

Kinetische energie per massa eenheid, E is gedefinieerd als

$$E = \frac{\nu^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{M^*}{r} - \frac{1}{2} f r \right]^2 \quad (7.46)$$

We vergelijken nu de energie voor het verwisselen van de vloeistofringen (E_I) en de energie daarna (E_F). De uitdrukkingen voor deze twee grootheden zijn

$$E_I = \frac{1}{2} \left[\frac{M^*_1}{r_1} - \frac{1}{2} f r_1 \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{M^*_2}{r_2} - \frac{1}{2} f r_2 \right]^2 \quad (7.47)$$

$$E_F = \frac{1}{2} \left[\frac{M^*_2}{r_1} - \frac{1}{2} f r_1 \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{M^*_1}{r_2} - \frac{1}{2} f r_2 \right]^2 \quad (7.48)$$

De verandering ΔE volgt hier eenvoudig uit:

$$2\Delta E = 2(E_F - E_I) = (M^{*2}_2 - M^{*2}_1) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) . \quad (7.49)$$

Het kost energie om het gradient wind evenwicht te verstoren als $\Delta E > 0$. Het gradient wind evenwicht is stabiel als dit inderdaad het geval is, m.a.w. als

$$M^{*2}_2 > M^{*2}_1, \text{ ofwel als } \frac{dM^{*2}}{dr} > 0 . \quad (7.50)$$

Dus, als het kwadraat van het impulsmoment afneemt met r is de wervel onstabiel voor axisymmetrische verstoringen. We zien hier dat stabiliteit afhangt van de radiële gradient van het impulsmoment. We zullen in het volgende hoofdstuk zien dat deze grootheid direkt gerelateerd is aan de vorticheit.

Als $f=0$ dan reduceert dit probleem tot het probleem van de stabiliteit van het cyclostrofisch evenwicht, ook wel aangeduid als het "Taylor probleem". De onstabieleit die optreedt als M afneemt met r wordt ook wel centrifugaal onstabieleit genoemd. Rayleigh heeft dit probleem in 1916 al theoretisch bestudeerd en kwam uit op het criterium (7.50), dat daarom het "Rayleigh criterium" wordt genoemd. In 1923 heeft G.I. Taylor centrifugaal onstabieleit in laboratorium waargenomen.

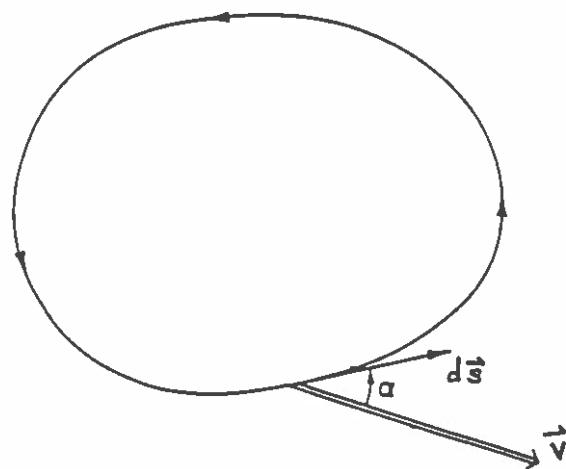
OPGAVE 7.2: In een laminair stromend onsamendrukbare vloeistof met vertikale windschering kunnen kleine storingen gaan groeien als

$$Ri \equiv \frac{g \frac{d\rho}{dz}}{\left(\frac{dU}{dz} \right)^2} < 1 .$$

Waar komt de energie voor de groei vandaan als

$$\frac{d\rho}{dz} < 0 ?$$

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, Kundu.



Figuur 8.1. Circulatie rond een gesloten kromme. v is positief tegen de wijzers van de klok in.

8

CIRCULATIE, VORTICITEIT EN DIVERGENTIE

8.1 Divergentie en vorticiteit

In de stromingsleer spelen twee begrippen uit de vectoranalyse een belangrijke rol, namelijk de divergentie en de vorticiteit. De divergentie is gedefinieerd als $\nabla \cdot \mathbf{v}$ en werd reeds besproken in hoofdstuk 4. De vorticiteit ω is de rotatie van een snelheidsvector, $\nabla \times \mathbf{v}$, en heeft, evenals de snelheidsvector zelf, drie componenten ofschoon men ook wel deze term gebruikt om de verticale component van de rotatie van een snelheidsvector aan te duiden.

Bijvoorbeeld in cartesische coördinaten geldt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \equiv \omega = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} . \quad (8.2)$$

De volgende stellingen gelden voor een willekeurig coördinatenstelsel.

Uit (8.2) volgt dat voor een willekeurige scalaire grootheid χ geldt

$$\nabla \times \nabla \chi = 0 . \quad (8.3)$$

d.w.z. dat de gradient van een functie rotatievrij (irrotational) is. Omgekeerd kan bewezen worden dat een rotatievrije vector voorgesteld kan worden als de gradient van een functie. Dus als de vorticiteit van het snelheidsveld nul is ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) dan geldt

$$\mathbf{v} = \nabla \chi . \quad (8.4)$$

χ wordt de snelheidspotentiaal genoemd en we spreken van een potentiaalstroming.

Uit (8.1) - (8.2) volgt ook voor een willekeurige vector $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 . \quad (8.5)$$

d.w.z. dat de vorticiteit divergentievrij (nondivergent) is en omgekeerd dat een divergentievrije vector geschreven kan worden als de rotatie van een andere vector. Van bijzonder belang is het tweedimensionale geval. Een divergentievrije horizontale vector ($\nabla \cdot \mathbf{v}_h = 0$) kan namelijk voorgesteld worden als

$$\mathbf{v}_h = k \times \nabla \psi . \quad (8.6)$$

De functie ψ staat bekend als de stroomfunctie. De samenhang van deze functie met het begrip stroomlijn gedefinieerd in hoofdstuk 2 wordt duidelijk als men schrijft

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v dx - u dy ,$$

waarin we (8.6) gesubstitueerd hebben. Volgens (2.1) geldt dan langs een horizontale stroomlijn dat $d\psi=0$ of $\psi = \text{constant}$.

8.2 Circulatie

Integratie van de divergentie over een volume leidt tot een oppervlakte-integraal

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (8.7)$$

waar het oppervlak S het volume V insluit. Dit is de stelling van Gauss. Integratie van de vorticeit over een oppervlak geeft een integraal langs een gesloten kromme C die het oppervlak begrenst.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.8)$$

Dit is de stelling van Stokes. In deze vergelijkingen is $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaal op het oppervlak, $d\sigma$ een oppervlakte-element en $d\mathbf{s}$ een lijnelement. Het rechterlid van (8.8) wordt de circulatie (Γ) genoemd (zie figuur 8.1). Voor een rotatievrije vector is de circulatie rond een gesloten kromme dus gelijk aan nul. Dit volgt ook uit (8.4) omdat in dit geval

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \nabla \chi \cdot d\mathbf{s} = d\chi$$

langs de kromme en is natuurlijk

$$\oint d\chi = 0.$$

De materiële afgeleide van de circulatie rond een gesloten keten van vloeistofdeeltjes kan als volgt geschreven worden

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s}. \quad (8.9)$$

De laatste term is gelijk aan

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_C d|\mathbf{v}|^2 = 0. \quad (8.10)$$

Daaruit volgt dat de materiële afgeleide van de circulatie gelijk is aan de circulatie van de materiële versnelling.

In de eerste term van het rechterlid van (8.9) substitueren we de bewegingsvergelijking. Volgens (3.1) - (3.3) luidt deze in een absoluut coördinaten systeem

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi_a.$$

waar ϕ_a de zwaartekrachtspotentiaal voorstelt. Voor de absolute circulatie krijgt men dan

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_C \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi_a \right) \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \left(\frac{dp}{\rho} + d\phi_a \right). \quad (8.11)$$

Voor een homogeen medium verdwijnt het rechterlid en de circulatie rond de keten is dus onafhankelijk van de tijd. Daaruit volgt dat, als een medium oorspronkelijk rotatievrij is, de vorticeit gelijk moet blijven aan nul tenzij andere processen (zoals wrijving) een rol spelen. Dit is de circulatiestelling van Kelvin.

Voor een baroclien medium daarentegen vinden we met behulp van (8.8)

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot ds = - \int_S \left(\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot n d\sigma = - \int_S \left(\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \right) \cdot n d\sigma \quad (8.12)$$

waar we gebruik gemaakt hebben van (8.3). Dit resultaat wordt vaak het Bjerknes-theorema genoemd en toont aan dat veranderingen in absolute circulatie (en dus vorticeit) worden bepaald door de zgn. solenoïdale vector

$$\mathbf{N} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p .$$

De absolute circulatie (vorticeit) is samengesteld uit de relatieve circulatie (vorticeit) van de beweging in het roterende coördinatenstelsel plus de circulatie (vorticeit) van de roterende aarde zelf. Op deze wijze wordt uit (8.12) een vergelijking verkregen voor de relatieve circulatie maar in de praktijk gebruikt men de nu volgende vorticeitsvergelijking.

OPGAVE 8.1: Bereken de relatieve circulatie rond een vierkant met zijden van 1000 km in een westwaartse stroming (stroming uit het oosten) die met 10 m/s per 500 km in noordwaartse richting afneemt. Wat is de gemiddelde relatieve vorticeit in dit gebied?

8.3 De vorticeitsvergelijking

Circulatie is een scalaire maat voor de vorticeit. Aangezien vorticeit een vektor is (zie (8.2)), geeft een discussie van de circulatie een vrij kwalitatief en niet compleet beeld van het vorticeitsveld. We zullen daarom de vorticeitsvergelijking afleiden.

Vanwege de vektoridentiteit,

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \equiv \omega \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (8.13)$$

kunnen we de bewegingsvergelijking (3.4) schrijven als

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (2\Omega + \omega) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} - \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} . \quad (8.14)$$

Om de vergelijking voor ω te vinden, moeten we de bovenstaande vergelijking uitwendig vermenigvuldigen met ∇ . Het resultaat is:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times \{ (2\Omega + \omega) \times \mathbf{v} \} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} . \quad (8.15)$$

We hebben verder de volgende vektor-identiteit:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} .$$

Dus

$$\nabla \times \{ (2\Omega + \omega) \times \mathbf{v} \} \equiv (2\Omega + \omega) \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) (2\Omega + \omega) - \{ (2\Omega + \omega) \cdot \nabla \} \mathbf{v} .$$

Een van de vier termen in de identiteit is weggefallen omdat de divergentie van de absolute vorticeit gelijk aan nul is, ofwel $\nabla \cdot \omega_a \equiv \nabla \cdot (2\Omega + \omega) = 0$. Het resultaat is

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(2\Omega + \omega) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)(2\Omega + \omega) + \{ (2\Omega + \omega) \cdot \nabla \} \mathbf{v} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} . \quad (8.16)$$

De eerste term in het rechterlid is de zgn. "vortex-strekkingsterm". De tweede term in het rechterlid is de vorticiiteitsadvectieterm. We kunnen ook schrijven:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(2\Omega + \omega) \equiv \frac{d\omega_a}{dt} . \quad (8.17)$$

De derde term in het rechterlid van (8.16) is de zogenaamde "kantelingsterm". De laatste term is weer de solenoidale term.

In het college zal nader worden ingegaan op de fysische interpretatie van de vortex-strekkingsterm en van de kantelingsterm.

8.4 De verticale component van de vorticiiteitsvergelijking

In deze sectie bespreken we de verticale component van de vorticiiteitsvergelijking, alsmede enkele gangbare benaderingen die hier in worden gemaakt. De verticale component van de vorticiiteit, ζ (gedefinieerd in (8.2)) speelt een belangrijke rol in de dynamika van grootschalige stromingen. Een vergelijking voor ζ kan worden afgeleid uit vergelijkingen (3.15) en (3.16). Differentiëren van (3.15) naar y en van (3.16) naar x en afgetrekken van de resulterende vergelijkingen levert, na enig rekenwerk (pas op de niet-lineaire termen; de "rechte" d's!) de volgende vorticiiteitsvergelijking:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - v \frac{\partial f}{\partial y} . \quad (8.18)$$

Er zijn vier effecten die bijdragen tot verandering in vorticiiteit: Convergentie, kanteling, barocliniciteit en het zogenaamde " β -effect". Dit laatste effect (de vierde term in het linkerlid van (8.18)) is in feite advectie van planetaire vorticiiteit. Dit effect komt in sectie 9.4 en 9.5 ter sprake.

OPGAVE 8.2: Vorticiiteit in cyclindrische coördinaten (r, ϑ, z) . De vorticiiteit in deze coördinaten is:

$$\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_z$$

waarin $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_z$, de eenheids vectoren in respectievelijk de radiële, tangentiële en verticale richting. De snelheids componenten u en v corresponderen met respectievelijk de radiële en tangentiële richting.

(a) Leid een relatie af tussen het impulsmoment per massa-eenheid, M^* (zie 7.45), en de verticale component van de absolute vorticiiteit in een cirkel-symmetrische wervel.

(b) Het snelheidsveld in een axisymmetrische cycloon wordt gegeven door

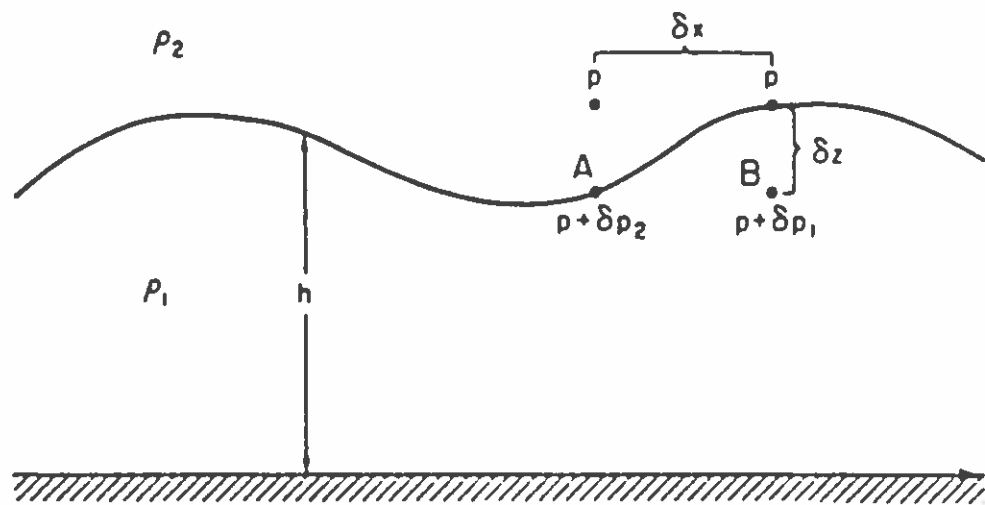
$$\mathbf{v} = \frac{\Omega r}{R_0} \mathbf{e}_\vartheta \text{ als } r \leq R_0 ,$$

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega R_0}{r} \mathbf{e}_\vartheta \text{ als } r > R_0 .$$

Hierin zijn R_0 en Ω constanten. Wat is de verticale component van de vorticiiteit als een functie van r . Maak hier een grafiekje van.

(b) Bereken de circulatie rond de curve $r=R_0$.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Pedlosky en Holton.



Figuur 9.1. Het "lagen" model.

9

VRIJE GOLVEN IN NIET VISCEUZE VLOEISTOFFEN

9.1 Inleiding

"Golven vormen een zeer algemeen verschijnsel in de natuur, veel algemener dan men veelal vermoedt. Natuurlijk, oorspronkelijk is dit woord alleen gebruikt voor watergolven. Aan het water is het verschijnsel golven het eerst opgemerkt. En hoezeer de mensen van tegenwoordig er ook aan gewend zijn om niet alleen bij water, maar ook bij diverse andere verschijnselen van golven te spreken - men denke aan radiogolven en geluidsgolven -, toch hebben wij allen als kinderen het woord en het begrip golven het eerst geleerd als iets dat bij het water hoort." Aldus introduceert Groen (in de jaren zestig buitengewoon hoogleraar fysische oceanografie aan de Universiteit Utrecht) het verschijnsel golven in zijn bekende boek "De wateren van de Wereldzee" (zie de lijst van boeken voor in dit diktaat).

In dit hoofdstuk zullen we aan de hand van een relatief eenvoudig model van een gelaagde, roterende vloeistof zien dat, ook in water, golven vele verschijningsvormen kunnen hebben, vooral als rotatie in het spel is. Het model in kwestie is afgebeeld in figuur (9.1). Het bestaat uit twee onsamendrukbare lagen. De dichtheid van de onderste laag is ρ_1 . De dikte van deze laag is h . De tweede laag, met dichtheid ρ_2 is oneindig dik. We zullen de eigenschappen van zogenaamde "zwaartekrachts"golven onderzoeken die zich langs het scheidingsvlak tussen de twee lagen kunnen voortplanten. Dit scheidingsvlak zou de tropopause in de atmosfeer of de thermocliene in de oceaan kunnen voorstellen, maar ook gewoon het oceaanwateroppervlak.

9.2 Golven in ondiep water

We nemen aan dat er in de bovenste laag geen horizontale drukgradient heerst. De verticale afmetingen worden klein verondersteld ten opzichte van de horizontale afmetingen, zodat de hydrostatische vergelijkingen toegepast mogen worden (zie sectie 6.1). De bewegingen zijn in eerste benadering horizontaal maar we zullen zien dat verticale bewegingen moeten toegelaten worden om aan de randvoorwaarden te voldoen.

Voor de twee punten (A) en (B) langs de x -as (zie figuur 9.1) geldt, respectievelijk,

$$p + \partial p_1 = p + \rho_1 g \partial z = p + \rho_1 g \frac{\partial h}{\partial x} \partial x \quad (9.1a)$$

$$p + \partial p_2 = p + \rho_2 g \partial z = p + \rho_2 g \frac{\partial h}{\partial x} \partial x \quad (9.1b)$$

Hierbij hebben we het hydrostatisch evenwicht aangenomen. $\partial h / \partial x$ is de helling van het "vrije" oppervlak. We nemen nu de limiet ∂x naar 0. Dan krijgen we drukgradient in de onderste laag:

$$\lim_{\partial x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(p + \partial p_2) - (p + \partial p_1)}{\partial x} \right\} = -g \Delta \rho \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (9.2)$$

waarin $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$. De bewegingsvergelijkingen voor de onderste laag worden

$$\frac{du}{dt} = f v - \frac{g \Delta \rho}{\rho_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (9.3a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{g\Delta\rho}{\rho_1} \frac{\partial h}{\partial y} . \quad (9.3b)$$

De continuïteitsvergelijking (4.3) kan met behulp van de benadering (4.5) geschreven worden als

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (9.4)$$

Aangezien de drukgradient in de bewegingsvergelijkingen onafhankelijk is van z , zullen u en v ook onafhankelijk van z zijn. De continuïteitsvergelijking kan dus gemakkelijk worden geïntegreerd van $z=0$ tot $z=h$. Dit levert

$$w(h) - w(0) = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) . \quad (9.5)$$

Aangezien $w(0)=0$ en $w(h)=dh/dt$ volgt

$$\frac{dh}{dt} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) . \quad (9.6)$$

Vergelijkingen (9.3) en (9.6) worden de "ondiep water vergelijkingen" genoemd. De aanduiding "ondiep" komt voort uit de voorwaarden voor de geldigheid van de hydrostatische benadering. De horizontale schaal (of golflengte) van de bewegingen (of golven) moet veel groter zijn dan de verticale schaal (de diepte, h) (zie sectie 6.1).

We kijken nu naar het gedrag van kleine verstoringen ten opzichte van een gemiddelde tijdsonafhankelijke "basis-toestand" (deze basis-toestand zou de rusttoestand kunnen zijn), zoals wat er gebeurt als een kleine steen in een vijver wordt gegooid. We splitsen daartoe de variabelen op in een gemiddelde toestand en een storing als volgt:

$$u = U + u' , \quad (9.7a)$$

$$v = V + v' , \quad (9.7b)$$

$$h = H + \eta . \quad (9.7c)$$

We veronderstellen nu dat u' , v' en η klein zijn t.o.v. respectievelijk U , V en H .

We nemen aan dat U , V en H onafhankelijk van de tijd zijn. We kunnen, bijvoorbeeld, voor (9.3a) schrijven:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + (U+u') \frac{\partial(U+u')}{\partial x} + (V+v') \frac{\partial(U+u')}{\partial y} = f(V+v') - g' \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} . \quad (9.8)$$

De basistoestand voldoet ook aan de bewegingsvergelijking. Dus:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g' \frac{\partial H}{\partial x} . \quad (9.9)$$

Deze vergelijking kan van de vorige afgetrokken worden. We nemen aan dat U en V constantes zijn en dat producten van storingsgrootheden verwaarloosd kunnen worden t.o.v. de storingsgrootheden zelf (dus storingen moeten klein zijn; hoe klein precies is niet zomaar te zeggen). Dan reduceert vergelijking (9.8) tot volgende lineaire vergelijking:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} = fv' - g' \frac{\partial \eta}{\partial x} .$$

Vergelijking (9.8) is nu "gelineariseerd" t.o.v. de basistoestand. We zullen ons hier beperken tot de rusttoestand als basis. Dat betekent dat $U=0$ en $V=0$. Vergelijkingen (9.3a,b en (9.6), gelineariseerd rond deze toestand, worden

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = f v' - g' \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (9.10a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -f u' - g' \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (9.10b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (9.10c)$$

Hierin hebben we aangenomen dat H een constante is en dat $\eta \ll H$. De parameter g' wordt de "gereduceerde zwaartekracht" genoemd, gedefinieerd als

$$g' \equiv \frac{g \Delta \rho}{\rho_1}. \quad (9.11)$$

We differentiëren (9.10c) partieel naar de tijd. M.b.v. (9.10a,b) volgt hieruit dat (met f is constant!)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g' H \nabla^2 \eta - H f \zeta. \quad (9.12)$$

Hierin is

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \text{ en } \zeta \equiv \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}. \quad (9.13)$$

ζ is the vertikale component van de vorticeit.

Als $f=0$ (geen aardrotatie) dan wordt (9.12)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g' H \nabla^2 \eta. \quad (9.14)$$

Dit is een voorbeeld van de golfvergelijking. Een oplossing van deze vergelijking is

$$\eta = A \exp \{ i (lx + my - \omega t) \}, \quad (9.15)$$

(A is een amplitude) mits aan de volgende zogenaamde "dispersie-relatie" wordt voldaan (ga dit na):

$$\omega^2 = g' H (l^2 + m^2). \quad (9.16)$$

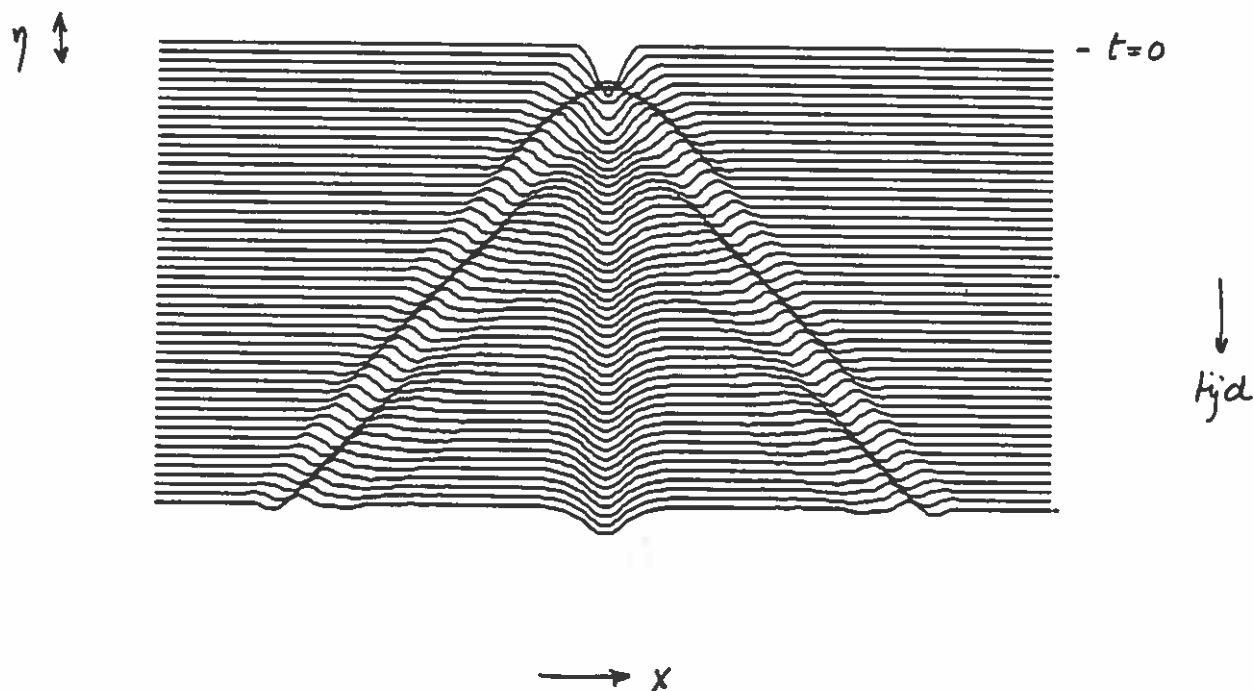
Dit is de dispersierelatie voor oppervlakte zwaartekrachtsgolven (in het Engels: "interfacial or surface gravity waves") in "ondiep" water. Het geeft een relatie tussen de frequentie, ω , en de golfgetallen, l en m . De fasesnelheid, c , van de golven is gerelateerd aan de frequentie via

$$c = \frac{\omega}{k}, \text{ waarin } k = \sqrt{l^2 + m^2}. \quad (9.17)$$

Dus

$$c = \sqrt{g' H}. \quad (9.18)$$

De fasesnelheid hangt kennelijk af van g' , m.a.w. van de dichtheidssprong, $\Delta \rho$. Golven langs het grensvlak bewegen relatief langzaam als $\Delta \rho$ klein is.



Figuur 9.2. Zwaartekrachts-inertiaal golven in het één-laag model. Resultaten van een integratie van vgl. 9.3a,b en 9.6 m.b.v. de computer. Getoond wordt de hoogte van het vrije oppervlak als functie van x op regelmatig verdeelde tijdstippen. Dispersie is het gevolg van rotatie. Merk op dat de groepssnelheid lager is dan de fase snelheid. Merk verder op dat niet alle potentiële energie in de begin toestand in de vorm van zwaartekrachts-inertiaalgolven het gebied uitgaat. In het midden van het gebied treedt aanpassing aan geostrofisch evenwicht op (zie hoofdstuk 10).

9.3 Het effect van rotatie op zwaartekrachtsgolven ($f=\text{constant}$)

Het effect van de Corioliskracht op zwaartekrachtsgolven onderzoeken we door de voorwaarde $f=0$ los te laten. We nemen echter wel aan dat f constant is. Vergelijking (9.12) wordt dan inhomogeen. We hebben een extra vergelijking voor de vorticeit (ζ) nodig om het probleem op te lossen. Deze vergelijking kunnen we afleiden uit (9.10a) en (9.10b). Het resultaat is

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (9.19)$$

We hebben de accenten weggelaten. Dit zullen we, voor wat betreft u en v , in het vervolg blijven doen. Met behulp van (9.10c) levert dit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{f}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (9.20)$$

Veronderstel oplossingen van de vorm,

$$\eta = A \exp \{ i (lx + my - \omega t) \}, \quad (9.21a)$$

$$\zeta = B \exp \{ i (lx + my - \omega t) \}. \quad (9.21b)$$

Substitutie in (9.12) en (9.20) levert vergelijkingen voor A en B :

$$\begin{aligned} \frac{i\omega f}{H} A - i\omega B &= 0; \\ (\omega^2 - g'Hk^2) A - HfB &= 0. \end{aligned}$$

Er zijn niet-triviale oplossingen als de determinant van dit lineaire stelsel vergelijkingen gelijk aan nul is. Hieruit volgt weer een dispersie relatie:

$$\omega^2 = g'Hk^2 + f^2 \quad (9.22a)$$

of

$$c^2 = g'H + \frac{f^2}{k^2}. \quad (9.22b)$$

Dus, het stelsel (9.12) en (9.20) heeft golven als oplossing, mits aan de bovenstaande relatie wordt voldaan. Deze golven worden zwaartekrachts-inertiaal golven genoemd (in het Engels: "gravity-inertia waves"). Tevens wordt de naam, "Poincaré-golven" gebruikt. Poincaré golven zijn in feite een mengeling van twee soorten golven. Dit is in te zien door twee gevallen te onderscheiden:

(1) $f=0$. Dit geeft pure zwaartekrachtsgolven met een fase-snelheid gegeven door (9.18).

(2) $g'=0$. Dit geeft pure inertiaal golven die het gevolg zijn van de inertiale stabiliteit (zie secties 3.5 en 7.6). De fasesnelheid van inertiaal golven is

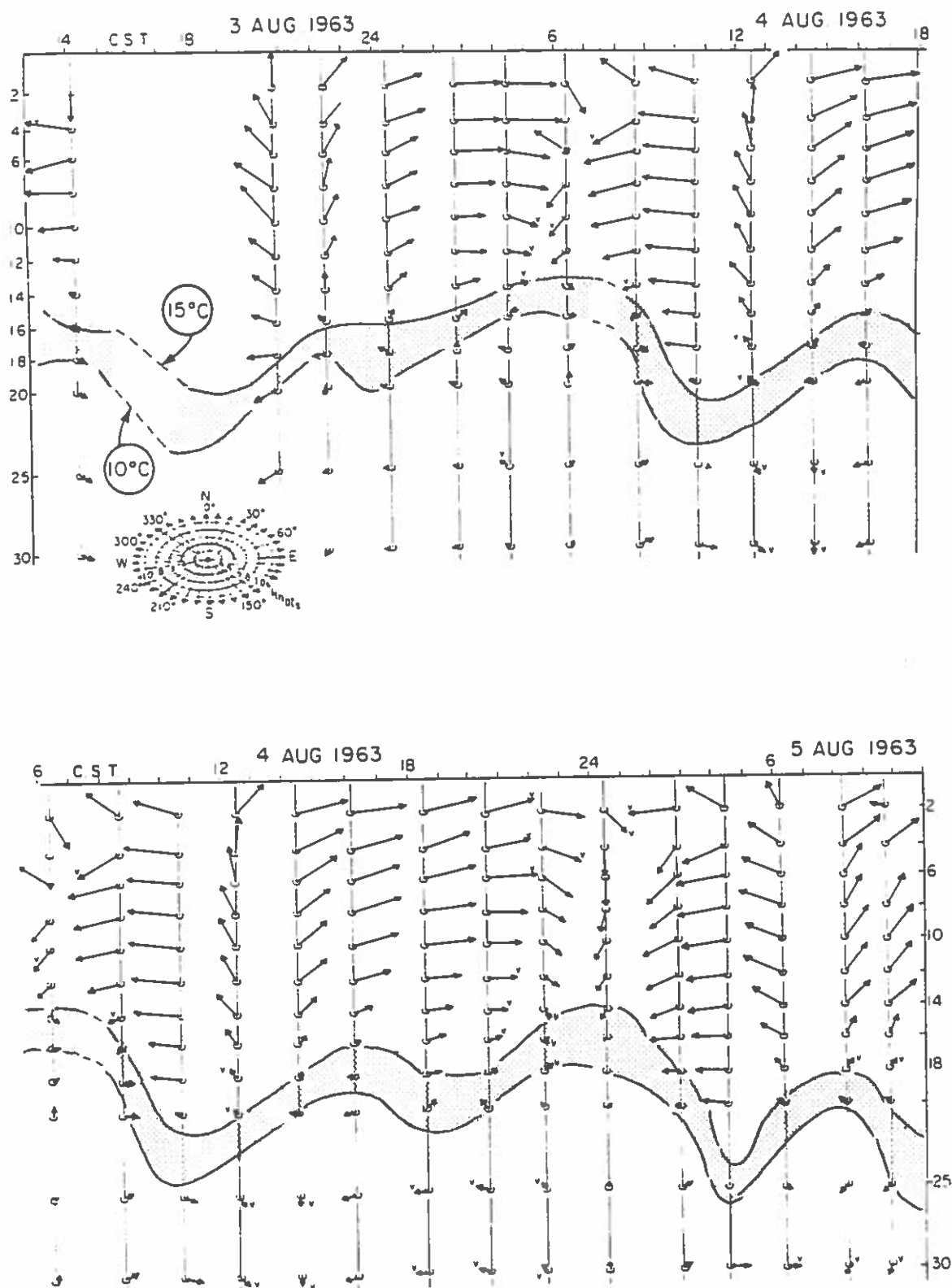
$$c = \pm \frac{f}{k}. \quad (9.22c)$$

Hieraan zien we dat de fasesnelheid afhankelijk is van de golflengte van de golf. We noemen dit "dispersie". Pure zwaartekrachtsgolven vertonen geen dispersie, omdat c onafhankelijk is van k . Dat betekent dat de golf niet verandert van vorm.

De groepssnelheid c_g van Poincaré golven is

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g'H}{c}. \quad (9.23)$$

Figuur 9.3. (uit Gill, 1982).



Observations of currents and thermal structure in the upper 30 m of Lake Michigan, August 3-5, 1963. The arrows indicate direction and speed in accordance with the current rose, and the shaded portion indicates the thermocline as denoted by the 10° and 15° isotherms. The two diagrams, which are overlapping in time, are separated by 17 hr, which is the dominant period. The local inertial period is 17.5 hr. Note the approximate two-layer structure in both temperature and velocity, and the anticyclonic rotation with time of velocity vectors. [From Mortimer (1971, Fig. 85).]

Vergelijken we (9.23) met (9.22b), dan zien we dat een groep Poincaré golven zich langzamer voortplant dan de individuele kammen binnen de groep (zie figuur 9.2). Dit komt door het effect van rotatie op de golven. Pure inertiaal golven transporteren geen energie (ga dit na). Figuur 9.3 toont een voorbeeld van Poincaré golven in Lake Michigan.

Het is mogelijk een golflengte of lengteschaal te identificeren waarbij de invloed van de Corioliskracht belangrijk wordt. Dit halen we uit het rechterlid van (9.22b). De tweede term wordt belangrijker dan de eerste term als

$$L \equiv \frac{2\pi}{k} \gg \frac{2\pi\sqrt{g'H}}{f} \equiv 2\pi a \quad (9.24)$$

De lengteschaal, a , heet de "Rossby deformatiestraal". Deze lengteschaal zullen we nog veelvuldig terug zien.

9.4 Potentiele vorticitetsvergelijking in ondiep water ($f \neq \text{constant}$)

We zullen nu een vergelijking afleiden voor het behoud van een grootte die potentiele vorticeit wordt genoemd. Potentiele vorticeit in het ondiep water model is gedefinieerd als

$$\zeta_{\text{pot}} \equiv \frac{\zeta + f}{h} \quad (9.25)$$

De verticale component van de vorticeit, ζ , is gedefinieerd in (9.13). Het behoud van ζ_{pot} kan worden afgeleid uit vergelijkingen (9.3a,b) en (9.6). Differentieer daartoe (9.3b) naar x en (9.3a) naar y en trek de resultaten van elkaar af. Hieruit volgt een vergelijking voor de vorticeit:

$$\frac{d\zeta}{dt} = - (f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - v \frac{df}{dy} \quad (9.26)$$

Let op de rechte d 's en de y -afhankelijkheid van f . Vergelijkingen (9.6) en (9.26) kunnen worden gecombineerd tot één vergelijking van de volgende vorm,

$$\frac{d\zeta_{\text{pot}}}{dt} = 0 \quad (9.27)$$

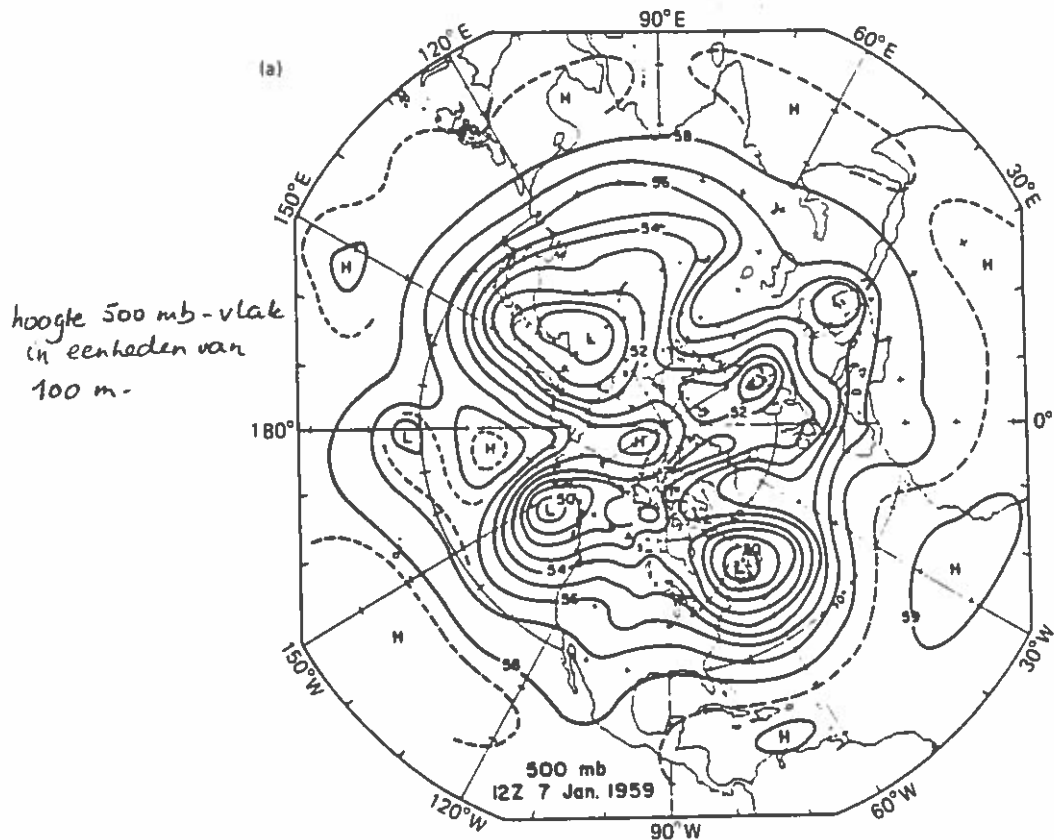
Deze behoudswet zal in het vervolg van het college (hoofdstukken 10 tot en met 13) een uiterst belangrijke rol gaan spelen. Vergelijking (9.27) betekent dat de absolute vorticeit toeneemt met de verticale expansie (horizontale contractie) van een vloeistoflaag.

In de geofysische stromingsleer vindt het beginsel (9.27) twee belangrijke toepassingen. De eerste betreft veranderingen van de Coriolisterm f tussen de equator en de polen. In ons coördinatenstelsel verandert f alleen langs de y -as en de gradient wordt geschreven als $\beta = df/dy$. Deze grootte staat bekend als de beta-parameter. De tweede toepassing heeft betrekking op veranderingen van de dikte ($H + \eta$) en in het bijzonder van de topografie van de aarde of de zeebodem. We kunnen dit als volgt kort illustreren.

In het algemeen kan η verwaarloosd worden ten opzichte van H en ζ ten opzichte van f , behalve als deze grootheden gedifferentieerd worden. Gemakshalve nemen we nu aan dat H evenals f alleen verandert langs de y -as. Dit betekent dat

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + v \frac{dH}{dy}$$

Vergelijking (9.26) kan dus worden geschreven als



Figuur 9.4a. De golven in de stroming op 500 mb. worden geïdentificeerd als Rossby golven.

Figuur 9.4b. De gemiddelde hoogte van het 500 hPa-vlak tussen 35° N en 60° N als functie van de lengte (80°O-80°W) en de tijd (12 dec. 1973 tot 21 dec. 1973). De gestippelde lijnen geven aan hoe specifieke troggen (geassocieerd met Rossbygolven) in de zonale richting bewegen. (uit Kurz, 1990)

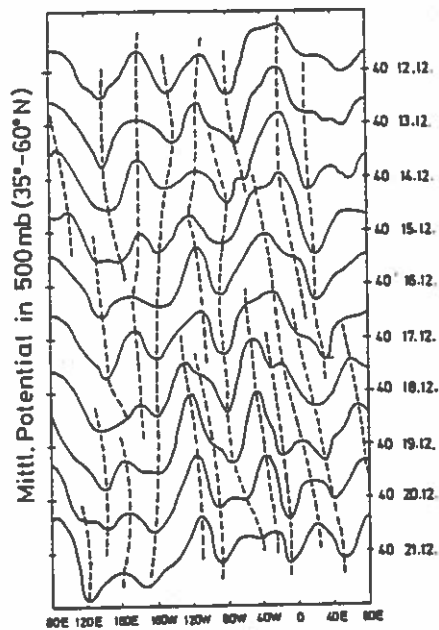


Abb. 9.2
Kontinuitätskarte für den Zeitraum 12. - 21. 12. 1973

$$\frac{d\zeta}{dt} - \frac{f}{H} \frac{d\eta}{dt} + v(\beta - \alpha) = 0. \quad (9.28)$$

waar we gedefinieerd hebben $\alpha = (f/H)dH/dy$. Dit toont aan dat het β -effect geheel analoog is aan het topografisch effect. In de literatuur worden de resulterende vorticeitsveranderingen respectievelijk aangeduid als de "planetary vorticity tendency" en de "topographic vorticity tendency". In laboratoriumexperimenten met roterende bassins wordt deze analogie benut om het beta-effect te simuleren m.b.v. een hellende bodem.

9.5 Quasi-geostrofische benadering en Rossby golven

Tenslotte zullen we nog een benadering aanstippen die sterk heeft bijgedragen tot de ontwikkeling van de theorie van grootschalige bewegingen in de atmosfeer en de oceaan. We doen dat aan de hand van (9.28). Eerst vervangen we de coëfficiënten in deze vergelijking door gemiddelde waarden. Dus f en β worden nu in de vergelijking als constanten behandeld (hetgeen bekend staat als de β -vlak benadering) en hetzelfde geldt voor H en α . Vervolgens lineariseren we de vergelijking door de advectione bijdragen tot de materiële afgeleiden te verwaarlozen en we stellen gemakshalve dat de oplossing onafhankelijk is van y zodat de vorticeit geschreven kan worden als $\zeta = \partial v / \partial x$. Vergelijking (9.28) wordt dan

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{f}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} + v(\beta - \alpha) = 0. \quad (9.29)$$

Omdat deze vergelijking twee afhankelijke variabelen bevat moeten we hier in het algemeen een andere vergelijking aan toevoegen. Nu blijkt echter dat onder bepaalde voorwaarden de geostrofische vergelijking kan worden gebruikt (6.11). In het ondiep water model van figuur (9.1) wordt dit

$$v = \frac{g'}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (9.30)$$

Substitutie van (9.30) in (9.29) levert een vergelijking in één enkele onbekende, η .

Deze laatste vergelijking laat een periodieke oplossing toe van de vorm $\eta = \eta_0 \exp[i(lx - \omega t)]$ (zie vgl. 9.15). Door substitutie van deze algemene oplossing in de vergelijking vindt men dat de golfsnelheid, $c = \omega/l$ moet voldoen aan

$$c = \frac{\alpha - \beta}{l^2 + \alpha^{-2}}. \quad (9.31)$$

Deze oplossing staat bekend als een Rossbygolf of ook wel een "planetary wave" of een "topographic wave" afhankelijk van de relatieve bijdrage van β en α .

Er moet wel opgemerkt worden dat de geostrofische formule (9.30) hier pas ingevoerd werd nadat de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen waren omgezet in de vorticeitsvergelijking. De oplossing is dus in feite niet geostrofisch maar men spreekt van de *quasi-geostrofische* benadering. Het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen (9.12) en (9.20) met $f = \text{constant}$, heeft zwaartekrachts-inertiaal golven als oplossing. De quasi-geostrofische vergelijking (9.29) inclusief (9.30) heeft echter een heel ander type golf als oplossing. Zwaartekrachts-inertiaal golven zijn kennelijk niet meer mogelijk. Ze zijn "weggefilterd". Men spreekt dan ook wel van een "gefilterde" vergelijking. De quasi-geostrofische benadering heeft een belangrijke rol gespeeld in het begin van de numerieke weersverwachting (begin jaren 50). De dynamika van grootschalige weersystemen wordt voornamelijk bepaald door de relatief langzame (ga na) beweging van Rossbygolven (zie figuur

Oorlogschirurgie in Papoea Nieuw Guinea

Overlevenden van de vloedgolf in Papoea Nieuw Guinea vertellen hun Nederlandse artsen „verschrompelde verhalen“.

Door onze correspondent

FRANK VERMEULEN

JAKARTA, 20 JULI. In zijn eigen

huis vielen vrijdag bij het vallen

van de avond de schuldertjes van de

muur en de glazen uit de kast. Toch

ligt het dorp Alaipe, waar de Ne-

derlandse arts Bart Vullings samen

met zijn collega Menno Swier is ge-

stationeerd namens de Stichting

Memisa, nog zo'n 20 kilometer van

het gebied dat op dat moment werd

getroffen door „palmboom-hoge”

vloedgolven. „In ons eigen dorp

kwaam het water niet verder dan

twee meter hoog”, vertelt Vullings

over de telefoon. Hij registreerde

twee zware schokken: om half ze-

ven en om tien voor zeven.

Sinds vrijdagavond hebben hij,

zijn collega Swier en nog een Me-

nisa-arts uit een nabijgelegen

dorp, Marië-Louise Rodewijk, te-

samen met een Franscaneer broe-

der in het ziekenhuis van Alaipe

zo'n 250 tot 300 patiënten behan-

deld, mensen die getroffen waren

door de vloedgolven. „Het zijn

twee of drie golven geweest”, zegt

Vullings. „Precies duidelijk is het

niet. De getroffen dorpen lagen op

overheer gedagen, de brakwater-

lagune in die daarachter ligt en ver-

volgens weer teruggestroomd. Dat

ging gepaard met veel geweld.”

De patiënten die Vullings en zijn

collega's gisteren en vandaag heb-

ben behandeld, vertellen „ver-

schrikkelijke verhalen”. Vullings:

„Vaak gaat het om mensen met

grote gezinnen, gezinnen die er nu

niet meer zijn. Een moeder vertel-

de me dat haar kind haar uit de ar-

men werd geslagen door het water.

Ze kon alleen maar toezien hoe het

verderop tegen een huis aan ge-

goid werd door het water voordat

het in de golven verdween.”

De artsen hebben de afgelopen

dagen „oorlogschirurgie” moeten

uitvoeren, vertelt Vullings. „We

zien veel botbreuken en disloca-

ties, zeg maar armen uit de kom,

maar ook veel lelijke, immidde-

stinkende wonden. Ik ben twee da-

gen bezig geweest met het verwij-

deren van stukken hout uit benen,

armen en buiken.”

Sinds de Australische lucht-

macht vanochtend in de nabijgele-

gen provinciehoofdstad Vanimo

een noodhospitaal met 50 bedden

heeft ingericht, is de druk op het

„Wij hebben zo'n 300 patiënten ge-

zien. In het plaatsje Wiwek, hier in

de buurt zijn vijftig mensen behan-

deld en in Vanimo ongeveer 500”,

aldus Vullings. „Maar er zijn 1.500

tot 3.000 doden geschat. In

toeval schat men dat er zes-

thuisdaden mensen in de vier ver-

dweden dorpen woonden. Er zijn

dus nog veel vermisten.” Volgens

de Nederlandse arts zijn leger en

politie vandaag bezig geweest met

het zoeken naar overlevenden en

het bergen van lichamen. „Aan-

vaankijk zijn veel mensen begraven,

maar inmiddels is men om re-

den van hygiëne overgegaan tot

het verbranden van de doden”,

zegt Vullings. De hulpverlening

aan overlevenden begon vandaag

op gang te komen. „Dat is erg be-

langrijk want de mensen hebben

niet meer, zelfs geen kleding.

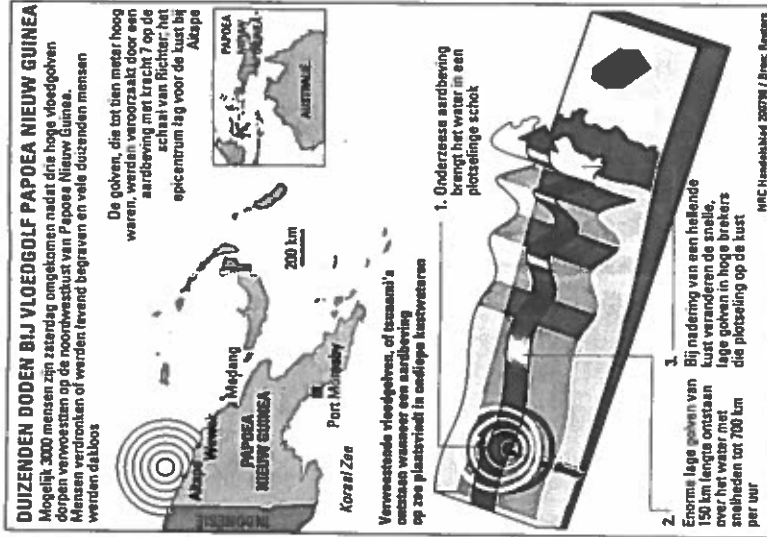
Maar kleren, voedsel en schoon

water worden nu aangevoerd. Een

rehabilitatieprogramma is het vol-

gende want de mensen moeten he-

lenmaal opnieuw beginnen.”



Waarschuwing voor tsnoenami had geen zin

stingen of aardverschuivingen tsnoenami's opwekken. Geleiden hebben er niets mee te maken. De opeenvolgende vloedgolven, met toppen die 100 à 200 kilometer uit- een liggen, halen in open water snelheden tot boven de 1000 kilo- meter per uur. De amplitude vari- eert, maar ligt berekend de 60 cen- timeter. Doordat de golven elkaar zo traag opvolgen, soms met tus- senpoelen van een uur, merken schepen in open zee weinig tot niets.

Anders ligt dat aan de kust. Wanneer de vloedgolven in ondiep water komen, remt de wrijving met de zeebodem hun snelheid af. Als gevolg hiervan, zo leert de golfme- chanica, neemt de amplitude sterk toe, in extreme gevallen tot 50 me- ter. Zelfs kunnen de golven voor- ver tuimelen, zoals bij branding het geval is. Overigens kondigt een tsnoenami zich juist aan met het te- rugtrekken van de zee — zoals de golven van een binnenvaartschip in een kanaal de walkanten kun- nen droogtrekken. Na enkele mi- nuten arriveert alsnog de eerste golfloop, met verwoestend effect.

De vloedgolven in Papoea Nieuw Guinea waren naar schat- ting tot tien meter hoog. De ergst bekende tsnoenami uit de geschie-

denis, in 1703 bij Ava in Japan, dookde meer dan honderduizend kustbewoners. De uitbarsting van de Krakatau, in 1883 in de Straat Soenda, creëerde vloedgolven tot 30 meter hoogte die op Java en Su- mata 36.000 slachtoffers eisten.

Op 1 april 1954 vormde een se- rie vloedgolven op Hawaï, ver- oorzaakt door een zeebeving bij de Aleoeten op 3000 kilometer af- stand, aanleiding tot het instellen van een tsnoenami-waarschuwing- dienst voor de Grote Oceaan, ge- vestigd in Honolulu. Seismografi- sche stations, rondom de Grote Oceaan gelegen, sturen hun gege- vens naar dit centrum. Op die ma- nier kon de tsnoenami als gevolg van een beving bij Chili op 22 mei 1960 in Japan bijna een dag van te- voren worden aangekondigd.

In Papoea Nieuw Guinea had dit systeem geen zin, ook al waren de kustdorpen voorzien van de modernste communicatieappa- raat. Omdat het epicentrum zo dicht voor de kust lag, voltrok de ramp zich al na enkele minuten na de beving. Overigens stuurde Ho- nolulu kort na de schokken wel de- gelijk een bericht uit waarin de be- ving werd gemeld. 'No Pacific-wide tsunami was generated', voegde de waarschuwingdienst er aan toe.

Door onze redactie wetenschappers ROTTERDAM, 20 JULI. De serie vloedgolven die vrijdagochtend de noordwestkust van Papoea Nieuw Guinea teisterde, is veroorzaakt door een onderzeese aardbeving in de Grote Oceaan. Deze had 30 ki- lomter buiten de kust plaats en bezat een kracht van 7,0 op de schaal van Richter.

Vloedgolven, ook bekend onder de naam tsnoenami, zijn op de weid- se oceaan ongevaarlijk. Maar zo- dra ze de kust naderen, ligt een ramp in het verschiet.

Behalve zeebevingen kunnen ook oceanische vulkaanuitbar-

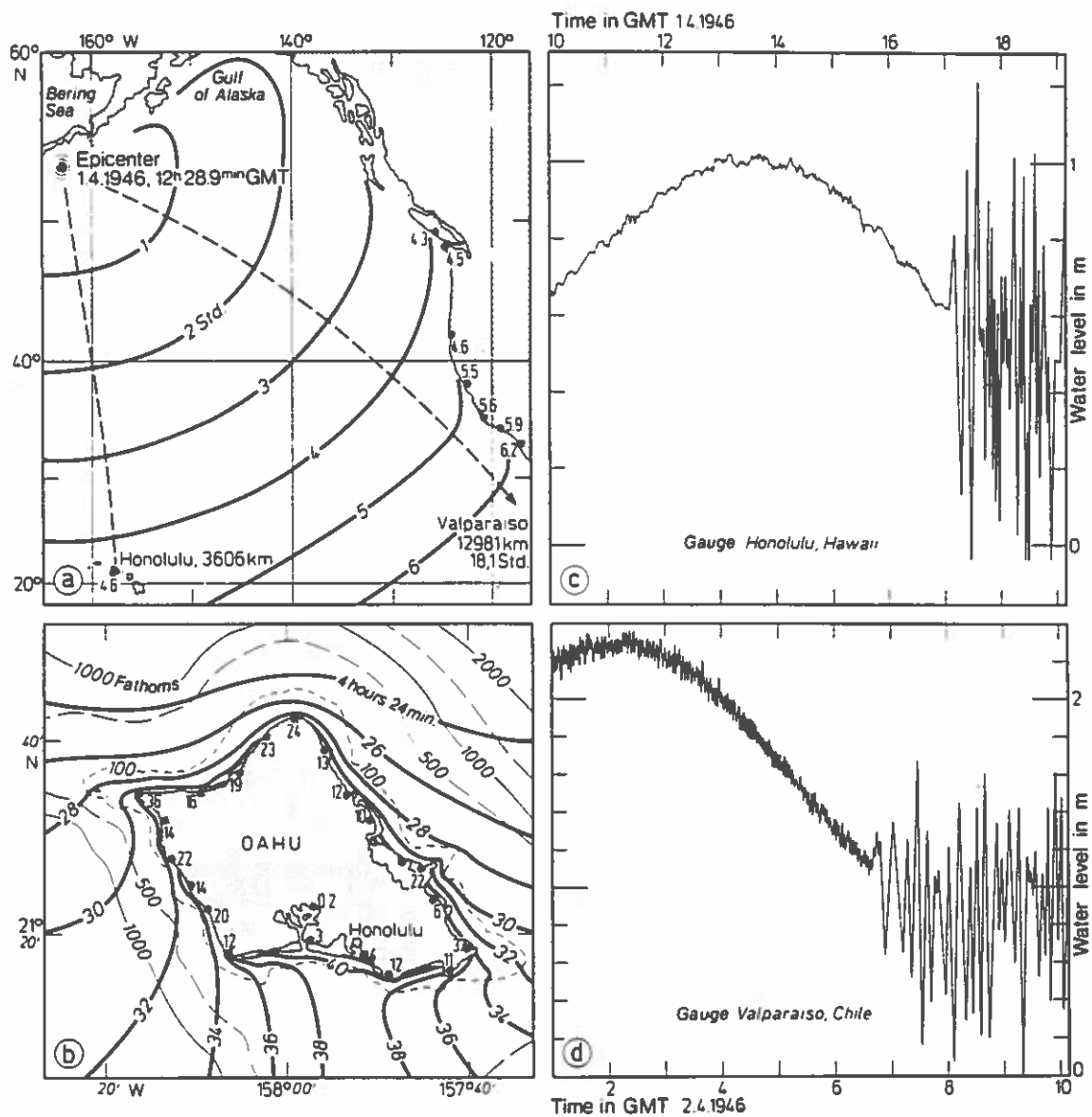


Fig. 8.33. (a) Travel time of the tsunami in the North Pacific Ocean, expressed in hr after the quake in the Aleutian Trench on April 1, 1946, 12h 58.9min GMT. (b) Maximum range of tsunami (in feet) on the Hawaiian island of Oahu on April 1, 1946 and the calculated travel time from the epicenter in hr and min. Depth in fathoms. (c) (d) Gauge records of the tsunami in Honolulu and in Valparaíso. (a, c, d after Green, 1946; b after Shepard et al., 1950.)

Figuur 9.5. Uit Dietrich et al. (1975).

9.4). Een computer model moet deze golven goed kunnen beschrijven. De relatief snelle zwaartekrachts-inertiaal golven werken in eerste instantie storend in zo'n model. Bovendien vereist de simulatie van deze golven veel computer-kracht. Aangezien in het begin van het computer tijdperk (eind jaren 40-begin jaren 50) deze rekenkracht niet voorhande was, werden gefilterde modellen geïntroduceerd. Deze modellen hebben echter ook een grote stimulans gegeven aan de theoretische ontwikkeling van de geofysische stromingsleer.

Er kan nog opgemerkt worden dat men in plaats van (9.30) vaak de zgn. "rigid lid" benadering toepast, waarbij gesteld wordt $\partial\eta/\partial t=0$, d.w.z. dat horizontale divergentie ten gevolge van bewegingen van het vrije oppervlak uitgesloten wordt. Vergelijking (9.29) bevat dan ook maar één enkele onbekende en de oplossing heeft dezelfde vorm als (9.31) maar de tweede term van de noemer ontbreekt. Voor zeer lange golven met golflengtes veel groter dan de Rossby deformatie straal (dus $l \ll a-1$), is dit natuurlijk een slechte benadering die zou leiden tot onaanvaardbaar grote golfsnelheden. In hoofdstuk 11 zullen we uitgebreid ingaan op golven die bestaan dankzij een gradient in de potentiële vorticititeit.

OPGAVE 9.1: Teken het dispersie-plaatje (frequentie als functie van golfgetal) voor Rossby golven (vergelijking 9.31). Bij welke waarde van l verandert de groepsnelheid van Rossby-golven van teken?

OPGAVE 9.2: Beschouw de verticale component van de vorticitieitvergelijking (9.26). Stel dat $\partial\zeta/\partial z=0$ (vertikaal homogene vloeistof). U en L zijn respectievelijk karakteristieke snelheids- en lengteschalen van de bewegingssysteem waar we in zijn geïnteresseerd. Neem f (de coriolis parameter) (10^{-4} s^{-1}) als karakteristieke frequentie. Verder is $\beta=df/dy=10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$.

- (a) Schrijf u, v, ζ, x, y en t in termen van U, L en f en dimensieloze grootheden $u^*, v^*, \zeta^*, x^*, y^*$ en t^* .
- (b) Schrijf vgl. (9.26) in termen van deze dimensieloze grootheden.
- (c) Door welke dimensieloze parameters wordt de oplossing van de vorticititeitsvgl. (9.26) bepaald?

OPGAVE 9.3: Tsoenami's zijn lange golven die worden opgewekt door bijvoorbeeld een onderzeese aardbeving. In 1946 werd Hawaii getroffen door een Tsoenami die ruim 4 uur eerder was opgewekt nabij Alaska, 3606 km van Honolulu vandaan (zie figuur 9.5).

- (a) Wat is de fase-snelheid van deze golf?
 - (b) Leid hier een gemiddelde diepte van de oceaan uit af. Klopt dit een beetje met de werkelijkheid?
- (Zie ook het artikel uit de NRC van 20 juli 1998)

OPGAVE 9.4: Stel dat we te maken hebben met een roterende bak met water (dichtheid= ρ) die is afgesloten met een horizontaal deksel. De bak heeft een vlakke(niet hellende) bodem. De bovenrand van deze waterlaag is dus niet vrij. De bewegingsvergelijkingen voor dit systeem, gelineariseerd rond de rusttoestand, zijn (9.10a,b,c) met $\eta=0$. Substitueer oplossingen van de vorm $A \exp \{i(lx-my-\omega t)\}$ en leid de dispersierelatie af voor zogenaamde inertiaal golven. Vertonen deze golven dispersie? Wat is de groepsnelheid van deze golven?

9.6 Massa-divergentie in Rossbygolven in de atmosfeer.

Het zal na bestudering van de eerste vijf secties van dit hoofdstuk wel duidelijk zijn geworden dat vaste onderdelen bij de analyse van golfverschijnselen zijn, het lineariseren van de vergelijkingen, het substitueren van een golfvormige oplossing

zoals (9.15), en het afleiden en interpreteren van een dispersie-relatie. In deze sectie zullen we de eigenschappen van golven op een geheel andere manier analyseren. We zullen ons hierbij met name richten op de typisch geofysische golven, namelijk planetaire Rossby golven in de atmosfeer.

In de vrije atmosfeer (ver boven het aardoppervlak) waait de wind in hoofdzaak evenwijdig aan de isobaren. Dit wordt beschreven door de gradient wind relatie (6.16b). We zullen deze relatie gebruiken in de nu volgende analyse van een "ideale" Rossby golf. We volgen hierbij het klassieke artikel van Bjerknes en Holmboe uit 1944¹ waarin de eerste voorzichtige doorbraak werd gemaakt in de theorie van planetaire golven in relatie tot depressie-vorming. De aanpak van Bjerknes en Holmboe is niet erg exakt, maar is wel fysisch inzichtelijk. Het vormt bovendien een goed tegenwicht ten opzichte van de wellicht wat abstracte golf-theorie die tot nu toe in dit hoofdstuk is behandeld.

We maken gebruik van figuur 9.6, waarin een deel van het patroon van isobaren, behorend bij een planetaire golf op grote hoogte in de troposfeer wordt getoond. Men noemt dit ook wel een "isobarisch kanaal".

Het longitudinale massa-transport door respektievelijk de ingang (de "trog") en de uitgang (de "rug") van dit kanaal met verticale dikte δz , is $\rho(V\delta n\delta z)$ en $\rho'(V'\delta n'\delta z)$. De grootheden met accenten refereren naar de rug. De longitudinale massa-divergentie, D , tussen de trog en de rug is

$$D = (\rho'V'\delta n' - \rho V\delta n)\delta z . \quad (9.32)$$

De gradient wind relatie (6.16b) kan worden geschreven als

$$\rho V\delta n = \frac{-\delta p}{K_t V + f} . \quad (9.33)$$

Hieruit volgt dat (9.32) kan worden geschreven als

$$D = \frac{K_t V + f - K'_t V' - f'}{(K'_t V' + f')(K_t V + f)} \delta p \delta z . \quad (9.34)$$

Het toepassen van de formule van Blaton (6.29) bij respektievelijk de trog en de rug levert

$$K_t V = K_s(V - C) ; \quad K'_t V' = K'_s(V' - C) . \quad (9.35)$$

Hierin is C de snelheid waarmee het golfpatroon zich in zonale richting verplaatst. Als we aannemen dat het stroomlijnenpatroon een perfecte sinus is, dan geldt $K_s = -K'_s$. Vergelijking (9.34) kan nu worden geschreven als

$$D = \frac{(2K_s(U - C) - \beta\Delta y)\delta p\delta z}{(K'_t V' + f')(K_t V + f)} , \quad (9.36)$$

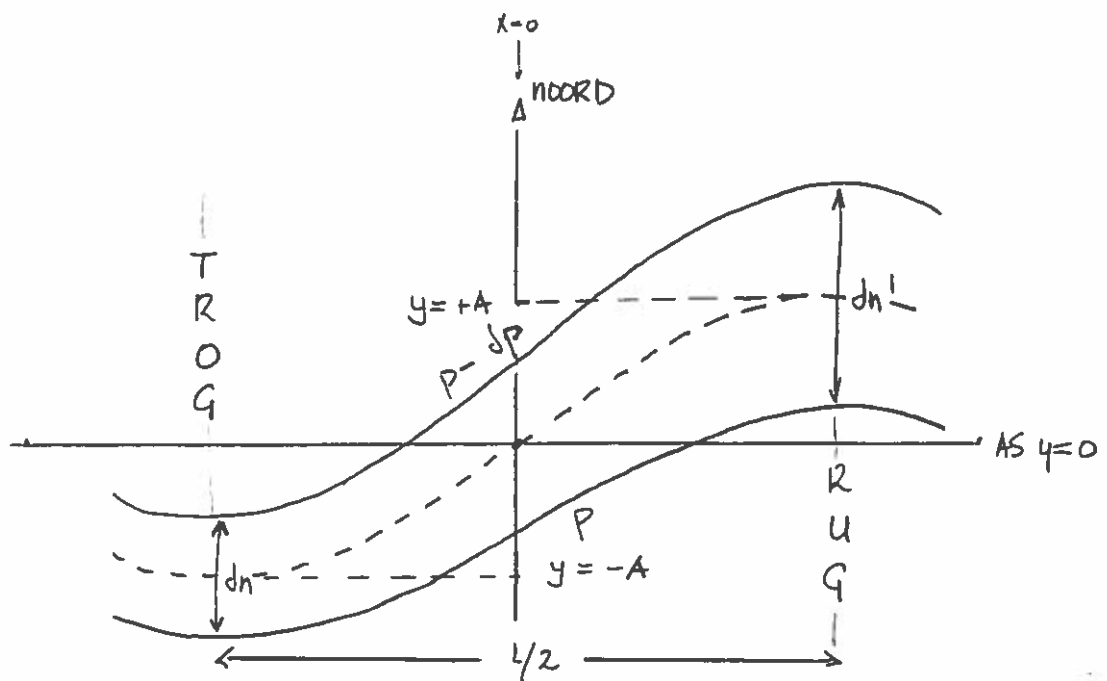
waarin

$$f' - f = \beta\Delta y \quad \text{met} \quad \beta = \left(\frac{df}{dy}\right)_{y=0} , \quad (9.37)$$

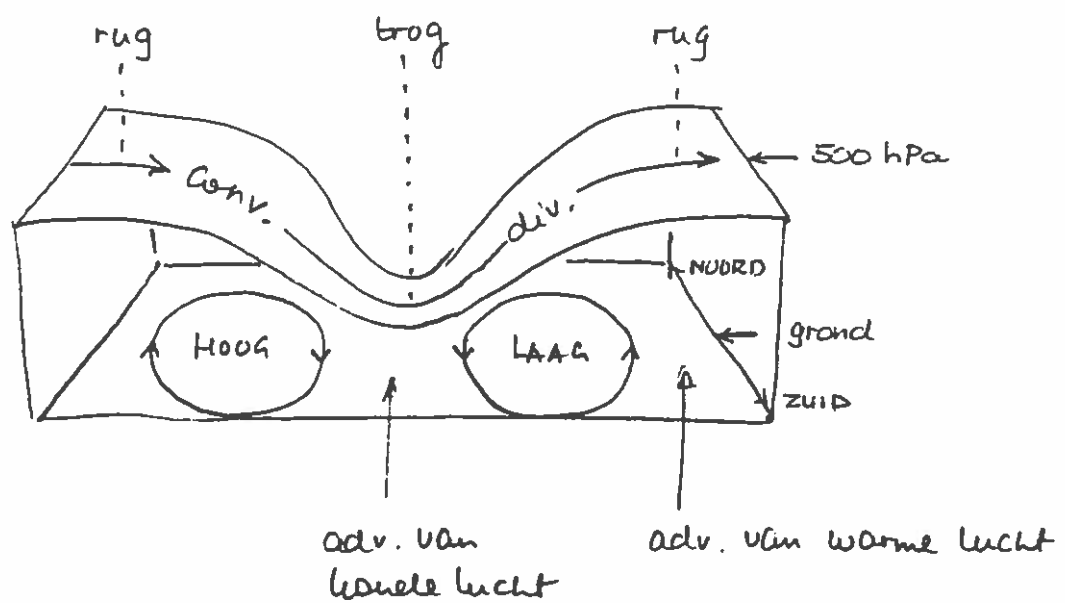
en

$$U = \frac{1}{2}(V + V') . \quad (9.38)$$

¹Bjerknes, J., and J. Holmboe, 1944: On the theory of cyclones. *Journal of Meteorology*, 1, 1-22.



Figuur 9.6. Een "isobarisch kanaal".



Figuur 9.7. De ligging van de druk systemen nabij de grond ten opzichte van de golf op grote hoogte.

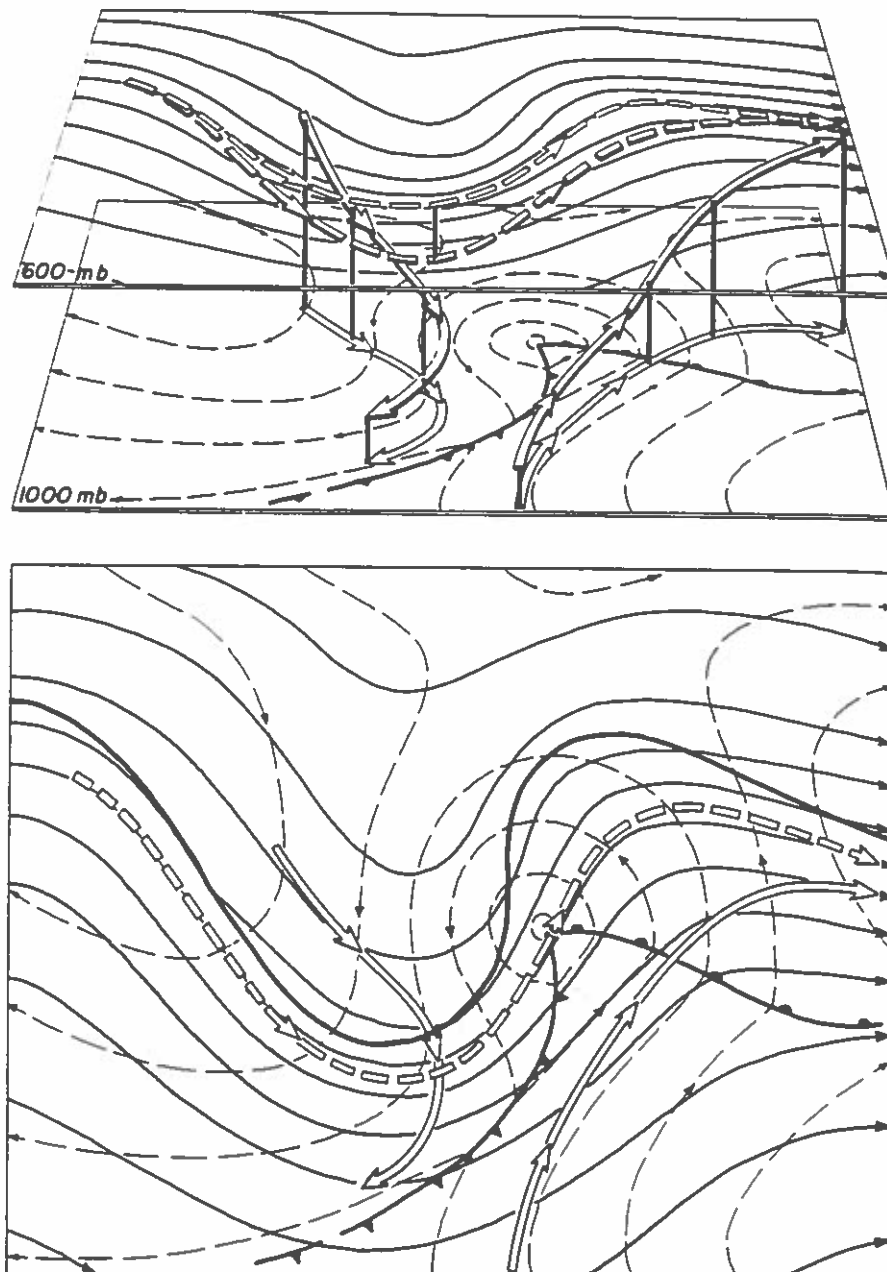


FIG. 10.20 Lower part shows schematic 1000-mb and 600-mb contours relative to a frontal wave; heavy lines are corresponding fronts. Upper part shows a perspective view of the same, with three-dimensional trajectories of air parcels originating in the central part of the cold air, in lower levels in the warm sector, and in the middle-tropospheric warm air near the polar front. Thin-line arrows in top figure, which correspond to those in lower diagram, show projections of three-dimensional trajectories onto the 1000-mb or 600-mb surface. The three portions of each trajectory are for approximately equal time intervals.

Figuur 9.8. Uit Palmén en Newton (1969).

De stroomlijnen kunnen worden beschreven door de functie

$$y = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{L} (x - Ct) \right\} . \quad (9.39)$$

Als we ons realiseren dat

$$K_s = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \begin{cases} \text{dus } K_s = \frac{+4\pi^2 A}{L^2} & \text{in de trog} \\ \text{dus } K_s' = \frac{-4\pi^2 A}{L^2} & \text{in de rug} \end{cases} \quad (9.40)$$

(zie figuur 9.6) dan volgt voor de massa-divergentie,

$$D = \frac{2K_s \delta p \delta z \left(U - C - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \right)}{(K_t' V' + f')(K_t V + f)} . \quad (9.41)$$

Het teken van de noemer in deze vergelijking is positief (zie vgl. 6.16b). Dus, het teken van de massa-divergentie wordt bepaald door de grootte tussen haakjes in de teller. Met andere woorden, de massa-divergentie is positief als

$$U - C - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} > 0 . \quad (9.42)$$

Van massa-divergentie is vooral sprake als de windsnelheid, U , groot is. De massa-divergentie ten oosten van de trog zal dus het grootst zijn in de kern van de straalstroom op ongeveer 300 hPa (een hoogte van 10 km) (zie figuur 6.1a). Er kan nu gemakkelijk aangetoond worden dat de massa-divergentie ten westen van de trog negatief is als aan de bovenstaande relatie is voldaan.

Er zijn twee effecten die de massa-divergentie in een Rossbygolf bepalen: het zogenaamde "breedte effect" (de variatie van f met de breedte) en het zogenaamde "krommingseffect" (de variatie van de gradientwindsnelheid in afhankelijkheid van de kromming van de trajectoriën). Deze twee effecten werken elkaar tegen als het gaat om hun effect op de divergentie. Het krommingseffect, bijvoorbeeld, veroorzaakt massa-divergentie ten oosten van de trog. Bij hoge windsnelheden domineert dit effect. Omdat massa-divergentie leidt tot drukdaling onderin, zijn deze feiten van belang bij het ontstaan van depressies. Dit zal in sectie 9.7 nader worden toegelicht.

Volgens (9.41) is de stroming divergentieloos als

$$C = U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \equiv U - \frac{\beta}{l^2} . \quad (9.43)$$

Dezelfde dispersie-relatie resulteert (afgezien van de factor U) als we in (9.29) de zogenaamde "rigid lid" benadering maken ($\partial\eta/\partial t=0$) en stellen dat $\alpha=0$. Het blijkt dat het niveau in de atmosfeer waar $D=0$ gemiddeld op ongeveer 500 hPa (ruim 5000 meter) ligt.

9.7 Depressie-vorming

We hebben gezien dat horizontale divergentie van massa bij voorkeur optreedt ten oosten van een trog in een golvende straalstroom. Dit heeft een daling van de druk aan de grond tot gevolg. Als gevolg van deze drukdaling ontstaat er een gebied met gesloten isobaren met een cyclonale circulatie in de lagere delen van de atmosfeer, zoals aangegeven in figuur (9.7). Deze cyclonale circulatie kan de golf op grotere hoogte weer versterken. Dit komt doordat de cyclonale circulatie rond het laag gepaard gaat met advectie van warme lucht uit het zuiden precies onder de rug op

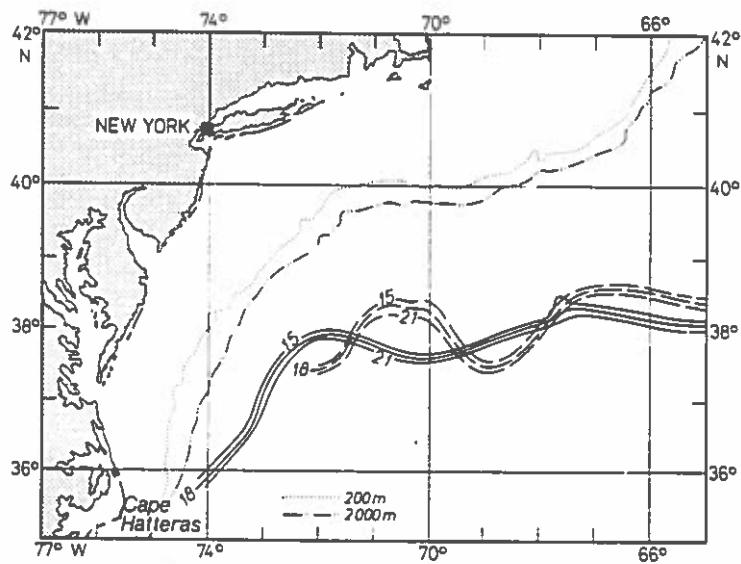


Fig. 7.22. Displacement of the Gulf Stream within two weeks, deduced from the average temperature of the uppermost 200 m on June 8 (solid isotherms for 15, 18, and 21°C) and on June 21-22, 1950 (dashed isotherms). (After Fuglister and Worthington, 1951.)

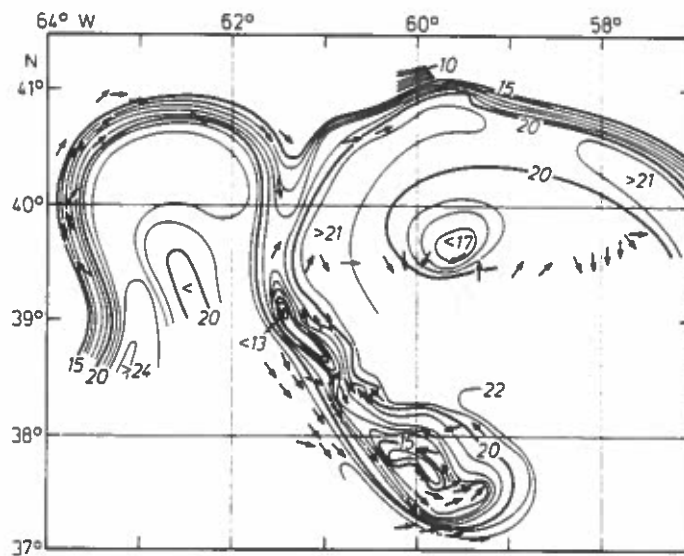


Fig. 7.23. Example of the separation of a cyclonic eddy from the Gulf Stream, deduced from the average temperature of the uppermost 200 m on June 17, 1950, and the current direction based on observations made with the GEK from the moving vessel. (According to Fuglister and Worthington, 1951.)

Figuur 9.9. Uit Dietrich et al. (1975).

grotere hoogte. Hierdoor gaat de druk stijgen op grotere hoogte, hetgeen leidt tot versterking van de rug. Het omgekeerde is het geval ten westen van de kern van de depressie. Advectie van koude lucht leidt daar juist tot druk-daling op grotere hoogte en verterking van de trog. De groei van de golf op grotere hoogte gaat gepaard met toenemende massa-divergentie ten oosten van de trog, hetgeen weer het uitdiepen van de depressie op lagere hoogte bevordert. We hebben dus te maken met een zichzelf versterkend proces, ofwel een onstabieliteit. De mate van onstabieliteit hangt af van de intensiteit van de straalstroom en de temperatuur tegenstellingen van zuid naar noord. Deze twee grootheden zijn overigens gekoppeld via de thermische wind relatie. We noemen deze onstabieliteit, "barocliene onstabieliteit". Er zijn exakte criteria uit de vergelijkingen af te leiden die aangeven wanneer en bij welke zonale golflengte deze onstabieliteit bij voorkeur optreedt. Eén zo'n criterium zal in hoofdstuk 13 ter sprake komen. In het derde jaars college dynamische meteorologie zal meer aandacht worden besteed aan dit onderwerp.

Figuur (9.8) toont schematisch de drie-dimensionale structuur van een jonge depressie op gematigde breedte.

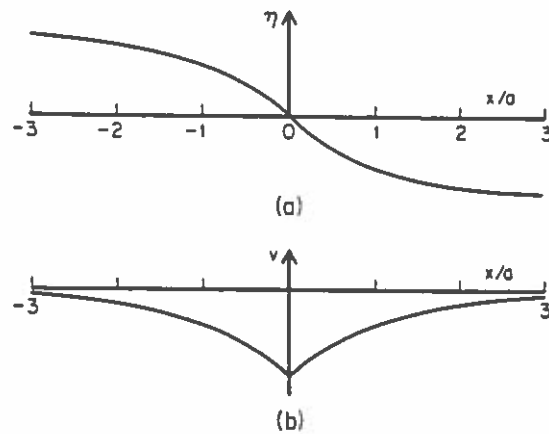
Barocliene onstabieliteit kan natuurlijk ook optreden in de oceaan, bijvoorbeeld bij de golfstroom. Op satelliet foto's worden hier inderdaad wervels waargenomen. Het is echter niet waarschijnlijk dat deze wervels ook het gevolg zijn van barocliene onstabieliteit zoals hierboven is beschreven. Het lijkt er eerder op dat deze wervels het gevolg zijn van het "uitslaan" van meanders in de golfstroom waardoor "bellen" warm en koud water naar, respectievelijk, het noorden en het zuiden bewegen. Deze koude en warme wervels komen geheel los van de golfstroom (zie figuur 9.9).

Een dergelijk proces is in de atmosfeer waarschijnlijk de oorzaak van het ontstaan van vrij grootschalige lagedrukgebieden met een koude kern (zogenaamde "cold-core cut-off lows"). Een grote "druppel" koude lucht wordt hierbij als het ware losgelaten vanuit het frontale gebied en gaat vervolgens een eigen leven leiden ten zuiden van het front. Deze "afgesnoerde" koude lagedrukgebieden kunnen een relatief lang leven hebben (enkele weken) en vooral in de herfst boven de warme Middelandse zee overvloedige regenval veroorzaken.

Depressies in de atmosfeer ontstaan ook dikwijls achter grote bergketens. Een bekend voorbeeld hiervan is het zogenaamde "Genua laag" dat ontstaat bij een intense noordelijke stroming over de Alpen.

Voor de volledigheid noemen we hier nog een vierde mechanisme dat een bijdrage kan leveren tot de groei van een depressie of cycloon, namelijk diabatische opwarming. Voorbeelden van diabatische warmtebronnen zijn latente warmte die vrijkomt bij condensatie van waterdamp, absorptie van straling, of gewoon fluxen van voelbare warmte vanuit het aard-oppervlak of het zee-oppervlak. Tropische cyclonen hebben hun bestaan hier aan te danken. Ook thermische lagedrukgebieden, zoals boven Spanje en Turkije in de zomer, zijn hier het gevolg van.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Gill, Holton, Haltiner en Martin.



The geostrophic equilibrium solution corresponding to adjustment from an initial state that is one of rest but has uniform infinitesimal surface elevation $-\eta_0$ for $x > 0$ and elevation η_0 for $x < 0$. (a) The equilibrium surface level η , which tends toward the initial level as $x \rightarrow \pm \infty$. The unit of distance in the figure is the Rossby radius $a = (gH)^{1/2}/f$, where g is the acceleration due to gravity, H the depth of fluid, and f twice the rate of rotation of the system about a vertical axis. (b) The corresponding equilibrium velocity distribution, there being a "jet" directed along the initial discontinuity in level with maximum velocity equal to $(gH)^{1/2}$ times η_0 .

Figuur 10.1. (uit Gill, 1982).

10

AANPASSING AAN GEOSTROOF EVENWICHT

10.1 Probleemstelling

In hoofdstuk 6 hebben we de evenwichtstoestanden die mogelijk zijn in een gestratificeerde, roterende niet visceuze vloeistof geïdentificeerd. In hoofdstuk 7 hebben we de stabiliteit van een aantal van deze evenwichtstoestanden bestudeerd. In hoofdstuk 9 hebben we gekeken naar de oscillaties en golven die kunnen optreden in een stabiel gelaagde roterende vloeistof. Een vraag die nog niet is beschouwd is: hoe ontstaat een bepaald evenwicht, met name het geostrofisch evenwicht? Om hier enig inzicht in te krijgen gaan we nu kijken wat er gebeurt in een homogene laag water als het vrije oppervlak wordt verstoord. De verstoring zal aanleiding geven tot zwaartekrachts-inertiaal golven. We zien in figuur 9.2 hoe deze golven in het vrije oppervlak eruit zien. De golven lopen vanuit de "bron" naar beide kanten weg met een groepssnelheid die overeenkomt met (9.23). In een niet roterend systeem ($f=0$) zal de vloeistof terugkeren naar de toestand van rust waarbij het vrije oppervlak horizontaal is. We zien echter in figuur 9.2 dat een deel van de storing in het midden van het domein blijft bestaan. Een deel van de potentiële energie die er bij het begin is "ingepompt" is niet omgezet in golven maar in een geostrofische stroming. Deze geostrofische stroming wordt gegeven door,

$$fv = g' \frac{\partial \eta}{\partial x} , \quad (10.1a)$$

$$fu = -g' \frac{\partial \eta}{\partial y} . \quad (10.1b)$$

We zullen in dit hoofdstuk onderzoeken waarom de roterende vloeistof zich bij voorkeur aanpast aan het geostrofisch evenwicht en niet de rusttoestand.

Om de wiskunde relatief eenvoudig te houden, laten we de initiële "verstoring" uit een "stap" in het profiel van $\eta(x)$ bestaan:

$$\eta = -\eta_0 \operatorname{sgn}(x) , \quad (10.2)$$

waarin $\operatorname{sgn}(x)=+1$ als $x>0$ en $\operatorname{sgn}(x)=-1$ als $x<0$. Verder is de vloeistof in rust ($u=0$; $v=0$). Er is in deze toestand duidelijk geen evenwicht. De vraag is nu: wat gebeurt er vervolgens? Natuurlijk zullen er golven ontstaan, maar tevens zal er rond $x=0$ een aanpassing plaatsvinden aan het geostrofisch evenwicht. We zullen zien dat dat komt door het behoud van potentiële vorticeiteit.

We zullen ons beperken tot kleine verstoringen van het vrije oppervlak, m.a.w. $\eta_0 \ll H$. We mogen dan uitgaan van de gelineariseerde vergelijkingen. De gelineariseerde vorticeitsvergelijking (9.20) kan worden geschreven als

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H} \right) = 0 . \quad (10.3)$$

Dit is een vorm van behoud van potentiële vorticeiteit (de gelineariseerde versie van (9.27)). De potentiële vorticeiteit is in dit geval gedefinieerd als,

$$\zeta_{\text{pot}} = \frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H} . \quad (10.4)$$

Vanwege het lineariseren is het behoud lokaal! Op $t=0$ wordt de potentiële vorticeitsverdeling gegeven door:

$$\zeta_{\text{poi}}(t=0) = \frac{\eta_0}{H} \operatorname{sgn}(x) . \quad (10.5)$$

Dit moet vanwege (10.3) op elk tijdstip blijven gelden. Hieruit volgt dat

$$Hf\zeta = \eta f^2 + \eta_0 f^2 \operatorname{sgn}(x) . \quad (10.6)$$

Substitueren we dit in (9.12) dan volgt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g'H\nabla^2 + f^2 \right) \eta = -\eta_0 f^2 \operatorname{sgn}(x) . \quad (10.7)$$

In het uiteindelijke evenwicht geldt $\partial^2 \eta / \partial t^2 = 0$. Dus

$$(g'H\nabla^2 - f^2) \eta = \eta_0 f^2 \operatorname{sgn}(x) . \quad (10.8)$$

De oplossing van deze vergelijking (die continu en antisymmetrisch is om $x=0$) is

$$\frac{\eta}{\eta_0} = -\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(x) \exp\left(\frac{-x \operatorname{sgn}(x)}{a}\right) , \quad (10.9a)$$

waarin

$$a = \frac{\sqrt{g'H}}{f} . \quad (10.9b)$$

De parameter, a , heeft de dimensie van lengte, en heeft de naam "Rossby Deformatie Straal" gekregen, ter ere van de beroemde Zweedse meteoroloog-oceanograaf die het bovenstaande probleem eind jaren dertig van deze eeuw voor het eerst identificeerde (zie sectie 9.3).

Uit (10.1a,b) volgt dat in het evenwicht

$$u = 0 ; \quad (10.10a)$$

$$v = \frac{-g'\eta_0}{fa} \exp\left(\frac{-|x|}{a}\right) . \quad (10.10b)$$

De uniforme stroming in de y -richting, gegeven door (10.10b) is in evenwicht met de drukgradient ten gevolge van de helling in het profiel van het vrije oppervlak gegeven door (10.9a) (zie figuur 10.1). De verstoring in het vrije oppervlak heeft zich over een afstand in de orde van de Rossby deformatie straal uitgespreid (zie figuur 10.1). Het proces waarbij het vrije oppervlak vanuit de toestand, gegeven door (10.2), overgaat in de toestand, gegeven door (10.9a), noemen we aanpassing aan geostrofisch evenwicht ("geostrophic adjustment").

10.2 Energie-huishouding van het aanpassingsproces

We hebben gezien dat als het vrije oppervlak wordt verstoord er niet alleen golven worden opgewekt die wegllopen, maar er vindt ook een aanpassing plaats aan het geostrofisch evenwicht. Met andere woorden, een deel van de potentiële energie die in een niet roterende vloeistof zou verdwijnen blijft achter in het gebied rond $x=0$.

De vraag is nu: hoeveel potentiële energie blijft er achter in het geostrofisch evenwicht, in verhouding tot de potentiële energie die verdwijnt door "uitstraling" door zwaartekrachts-inertiaal golven? Voordat we hier een antwoord op kunnen geven, moeten we eerst potentiële energie, P , per oppervlakte-eenheid en kinetische energie, K , per oppervlakte-eenheid definiëren. De definities zijn

$$P \equiv \frac{1}{2} \rho_1 g' \eta^2, \quad (10.11a)$$

$$K \equiv \frac{1}{2} \rho_1 H (u^2 + v^2). \quad (10.11b)$$

De kinetische energie vergelijking (gelineariseerd) kan worden afgeleid uit de twee bewegingsvergelijkingen (9.10a,b). Vermenigvuldiging van (9.10a) met $\rho_1 H u$ en (9.10b) met $\rho_1 H v$ en optellen van de twee resulterende vergelijkingen levert

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -g' \rho_1 H \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (10.12)$$

De Coriolis termen zijn verdwenen. Dit is logisch. De keuze van het assenstelsel mag geen bron van energie zijn.

De potentiële energie vergelijking (gelineariseerd) volgt uit (9.10c). Vermenigvuldiging van deze vergelijking met $\rho_1 g' \eta$ levert

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -g' \rho_1 H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (10.13)$$

De vergelijking voor de totale energie, $K+P$, is dan

$$\frac{\partial (K+P)}{\partial t} = -g' \rho_1 \left(\frac{\partial \eta H u}{\partial x} + \frac{\partial \eta H v}{\partial y} \right). \quad (10.14)$$

Voor de eenvoud stellen we alle y -afgeleiden gelijk aan nul. We integreren (10.14) vervolgens over het gebied $|x| < X$. Dit geeft

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -g' \rho_1 \eta H u \Big|_{-X}^{+X}, \quad (10.15)$$

waarbij

$$E \equiv \int_{-X}^{+X} (K+P) dx. \quad (10.16)$$

E is de totale energie, per lengte-eenheid in de y -richting, in het gebied $|x| < X$. De totale energie in het gebied $|x| < X$ verandert volgens het linkerlid van (10.15) alleen door fluxen van energie in en uit de rand van het gebied.

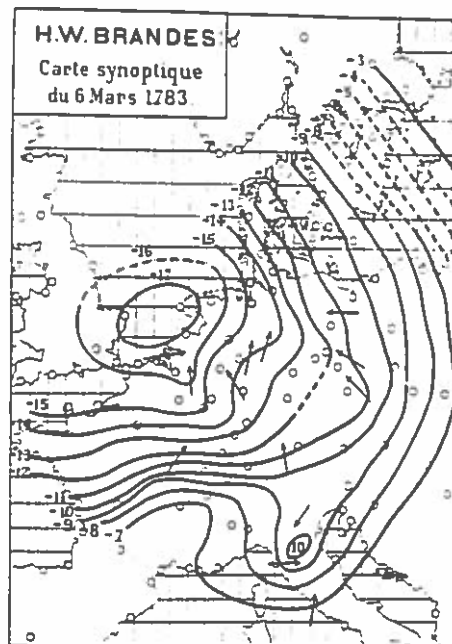
Met de bovenstaande definities van energie zijn we in staat om uit te rekenen hoeveel energie er is verdwenen tijdens het in sectie (10.1) beschouwde geostrofische aanpassingsproces. De verandering in de potentiële energie, per lengte-eenheid in de y -richting, is

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho_1 g' \left(\eta(t=0)^2 - \eta(t=\infty)^2 \right) dx. \quad (10.17)$$

Mede wegens symmetrie rond $x=0$ wordt dit

$$\Delta P = \rho_1 g' \eta_0^2 \int_0^{\infty} \left(-\exp\left(-\frac{2x}{a}\right) + 2\exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right) dx. \quad (10.18)$$

De integraal in (10.18) levert $(3a/2)$. Dus



A reconstruction by Hidebrandsson and Teisserenc de Bort (1898) of the early synoptic maps of Brandes (1820), based on data collected by the Mannheim Society. The contours are of pressure deviation from the mean value in lines ($\frac{1}{12}$ of a Parisian inch or about 3 mb), and the arrows show wind direction.

Figuur 10.2. (uit Gill, 1982).

$$\Delta P = \frac{3}{2} a \rho_1 g' \eta_0^2 \quad . \quad (10.19)$$

De verandering in de kinetische energie per lengte-eenheid in de y -richting is

$$\begin{aligned} \Delta K &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho_1 H \left((v(t=0))^2 - (v(t=\infty))^2 \right) dx \\ &= \rho_1 H \left(\frac{g' \eta_0}{fa} \right)^2 \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{2|x|}{a} \right) dx \quad . \end{aligned} \quad (10.20)$$

De integraal levert $(a/2)$. Dus

$$\Delta K = \frac{1}{2} a \rho_1 g' \eta_0^2 \quad . \quad (10.21)$$

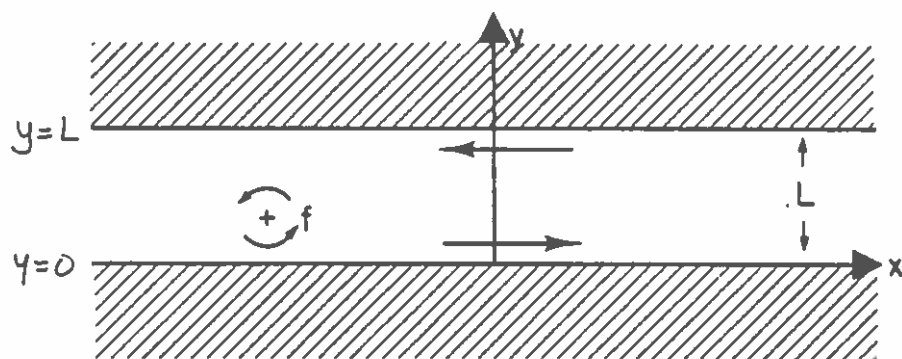
Dit is slechts één derde van de potentiële energie die is vrijgekomen! Twee derde van de potentiële energie is kennelijk verdwenen. Dit moet het gevolg zijn van uitstraling door de zwaartekrachts-inertiaalgolven.

10.3 Waarom is er Geostrofisch evenwicht?

Een roterende vloeistof keert na een verstoring niet terug naar de evenwichts toestand van rust, maar past zich aan aan het geostrofisch evenwicht. De fundamentele reden hiervoor is dat er met de verstoring in het vrije oppervlak behalve potentiële energie, die beschikbaar is voor omzetting in kinetische energie, ook potentiële vorticititeit wordt geïntroduceerd. Aangezien potentiële vorticititeit behouden is, kan er geen terugkeer naar de rusttoestand plaatsvinden. In de hierboven besproken lineaire theorie is potentiële vorticititeit zelfs *lokaal* behouden.

Het woord "geostrofisch" of "geostroof" is voor het eerst gebruikt door Shaw in 1916. Deze term is dus slechts 75 jaar oud. Dit geeft aan hoe langzaam het belang van dit evenwicht is doorgedrongen sinds de uitvinding van de barometer door Torricelli in 1643. Pas tweehonderd jaar later begon er wat inzicht te komen in de relatie tussen druk en stroming, hoewel vele onderzoekers in de negentiende eeuw er maar half bewust van waren. In 1820 tekende Brandes een weerkaart (zie figuur 10.2) op grond van gegevens uit 1783 waarin duidelijk te zien is dat de wind min of meer langs de isobaren loopt. Toch zijn er in de negentiende eeuw nog verhitte discussies gevoerd over de richting van de wind t.o.v. de isobaren in cyclonen. Met name Espy en Redfield in America waren felle tegenstanders van elkaar op dit gebied. Het was natuurlijk moeilijk om de theoriën te toetsen aan de hand van waarnemingen omdat die heel schaars waren, zeker simultane grondwaarnemingen over een groot gebied. Effecten van wrijving dichtbij het aardoppervlak verstoren het beeld behoorlijk, zoals we later zullen zien (hoofdstuk 15). Waarnemingen op grote hoogte waren er helemaal niet. Radiosondes waren pas begin deze eeuw op grote schaal beschikbaar. De regel van Buys Ballot (1857) ("als je op het noordelijk halfrond staat met de rug naar de wind, dan neemt de luchtdruk naar links toe af") is ook maar een onbewuste uitdrukking van het geostrofische evenwicht. Ferrel (1859) was waarschijnlijk de eerste die het geostrofisch evenwicht wiskundig formuleerde. De belangrijke lengte-schaal die geassocieerd is met dit evenwicht, de Rossby deformatiestraal, komt pas in 1937 dankzij de Zweedse oceanograaf-meteoroloog, Rossby, "boven tafel".

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Gill, hoofdstuk 7; Holton, sectie 7.6.



The infinite channel of width L , rotating with angular velocity $f/2$.

Figuur 11.1. Een oneindig uitgestrekt kanaal (breedte L) dat roteert met een hoeksnelheid $f/2$ (uit Pedlosky, 1987).

11

EFFECTEN VAN RANDEN EN FORCERING OP GOLVEN

11.1 Golven in een kanaal (Kelvin golven en getijden)

De tot nu toe besproken theorie geeft een goede indruk van de mogelijke oscillaties en de bijbehorende frequenties in een roterende niet visceuze vloeistof. We hebben echter nog niet onderzocht wat het effect is van de begrensdheid van de vloeistof. Dit is zeker voor de oceanen van belang, met name als we de opvallende verschijningsvorm van de getijde-golf in vooral ondiepe en begrensde zeeën zoals de Noordzee willen verklaren.

We beschouwen daarom de stroming in een kanaal (zie figuur 11.1). Het domein is dus begrensd in de y -richting terwijl het onbegrensd blijft in de x -richting. De vergelijkingen die de dynamica van verstoringen met kleine amplitude in dit kanaal beschrijven zijn (9.12) en (9.20) ($f=\text{constant}$). Differentiëren van (9.12) naar t en substitutie van (9.20) levert één vergelijking voor η ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - g'H \nabla^2 \eta \right\} = 0 . \quad (11.1)$$

De randvoorwaarden zijn: $v=0$ op $y=0$ en $y=L$ (zie figuur 11.1). Uit de basis vergelijkingen, (9.10a) (9.10b) en (9.10c), kunnen we een vergelijking voor v vinden in termen van η . Differentiëren van (9.10b) naar t levert, met behulp van (9.10a) en (9.10c),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) v = -g' \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta . \quad (11.2)$$

Evenzo levert de afgeleide van (9.10a) naar t , met behulp van (9.10b) en (9.10c),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) u = -g' \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta . \quad (11.3)$$

Toepassen van de randvoorwaarden levert met behulp van (11.2),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = 0 \quad \text{op } y=0 \text{ en } y=L . \quad (11.4)$$

Substitutie van de golf-vormige oplossing,

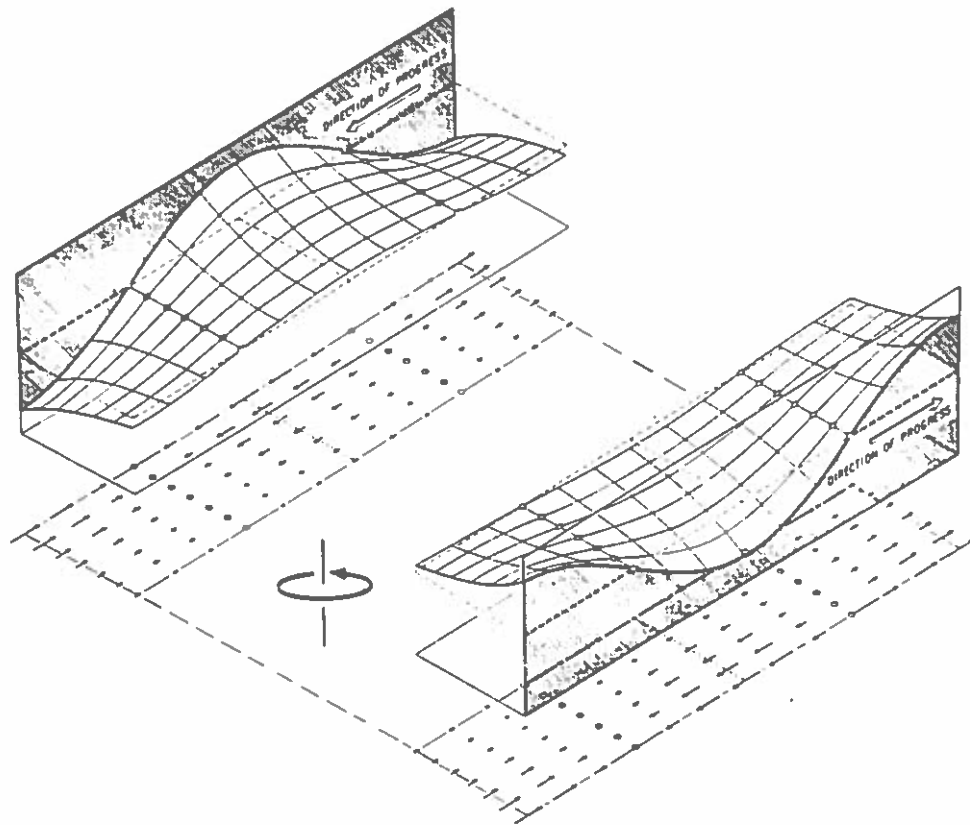
$$\eta = \text{Re} [\bar{\eta}(y) \exp \{i(kx - \omega t)\}] \quad (11.5)$$

in (11.1) levert een vergelijking voor de y -afhankelijke amplitude, $\bar{\eta}(y)$:

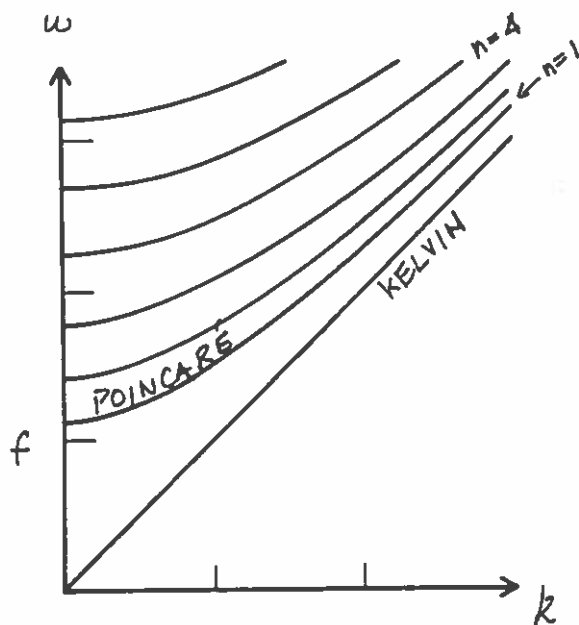
$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{dy^2} + \left\{ \frac{\omega^2 - f^2}{g'H} - k^2 \right\} \bar{\eta} = 0 . \quad (11.6)$$

Deze amplitude hangt af van de randvoorwaarden. Substitueren we (11.5) in (11.4) dan krijgen we twee voorwaarden voor $\bar{\eta}(y)$ op de randen van het kanaal.

Figuur 11.2. (uit Gill, 1982).



Northern hemisphere Kelvin waves on opposite sides of a channel that is wide compared with the Rossby radius. In each vertical plane parallel to the coast, the currents (shown by arrows) are entirely within the plane and are exactly the same as those for a long gravity wave in a nonrotating channel. However, the surface elevation varies exponentially with distance from the coast in order to give a geostrophic balance. This means Kelvin waves move with the coast on their right in the northern hemisphere and on their left in the southern hemisphere. [From Mortimer (1977)]



Figuur 11.3. Dispersie-plaatje voor Poincaré-golven en Kelvin golven in een kanaal.

$$\frac{d\bar{\eta}}{dy} + \frac{kf}{\omega} \bar{\eta} = 0 \text{ op } y=0 \text{ en } y=L . \quad (11.7)$$

De algemene oplossing van (11.6) is

$$\bar{\eta} = A \sin \alpha y + B \cos \alpha y , \quad (11.8)$$

waarin

$$\alpha^2 = \left(\frac{\omega^2 - f^2}{g'H} - k^2 \right) , \quad (11.9a)$$

of

$$\omega^2 = g'H(\alpha^2 + k^2) + f^2 . \quad (11.9b)$$

In (11.9b) herkennen we een dispersie relatie. Toepassen van de randvoorwaarden levert twee vergelijkingen voor respectievelijk A en B :

$$\alpha A + \frac{kf}{\omega} B = 0 , \quad (11.10a)$$

$$\left(\alpha \cos \alpha L + \frac{kf}{\omega} \sin \alpha L \right) A - \left(\alpha \sin \alpha L - \frac{kf}{\omega} \cos \alpha L \right) B = 0 . \quad (11.10b)$$

Hieruit kunnen we een uitdrukking voor α vinden. De matrix van de coëfficiënten van dit lineaire stelsel vergelijkingen is dus:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{kf}{\omega} \\ \alpha \cos \alpha L + \frac{kf}{\omega} \sin \alpha L & -\alpha \sin \alpha L + \frac{kf}{\omega} \cos \alpha L \end{bmatrix} . \quad (11.11)$$

Er zijn niet-triviale oplossingen als de determinant van deze matrix gelijk aan nul is. Dat levert

$$\left\{ \alpha^2 + \left(\frac{kf}{\omega} \right)^2 \right\} \sin \alpha L = 0 . \quad (11.12)$$

Substitutie van (11.9a) in (11.12) leidt tot

$$(\omega^2 - f^2)(\omega^2 - g'Hk^2) \sin \alpha L = 0 . \quad (11.13)$$

Er zijn drie mogelijkheden:

(i)

$$\sin \alpha L = 0 . \quad (11.14)$$

Dit leidt tot

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \text{ met } n=1, 2, 3, \dots \quad (11.15)$$

($n \neq 0$ omdat anders $\bar{\eta}(y) = B$ waardoor niet aan de randvoorwaarden zou kunnen worden voldaan). Met (11.15) wordt de oplossing,

$$\eta = \text{Re} \left[(A \sin \frac{n\pi}{L} y + B \cos \frac{n\pi}{L} y) \exp \{i(kx - \omega t)\} \right] . \quad (11.16)$$

Dit is een Poincaré-golf met een discreet golfgetal, α , in de y -richting.

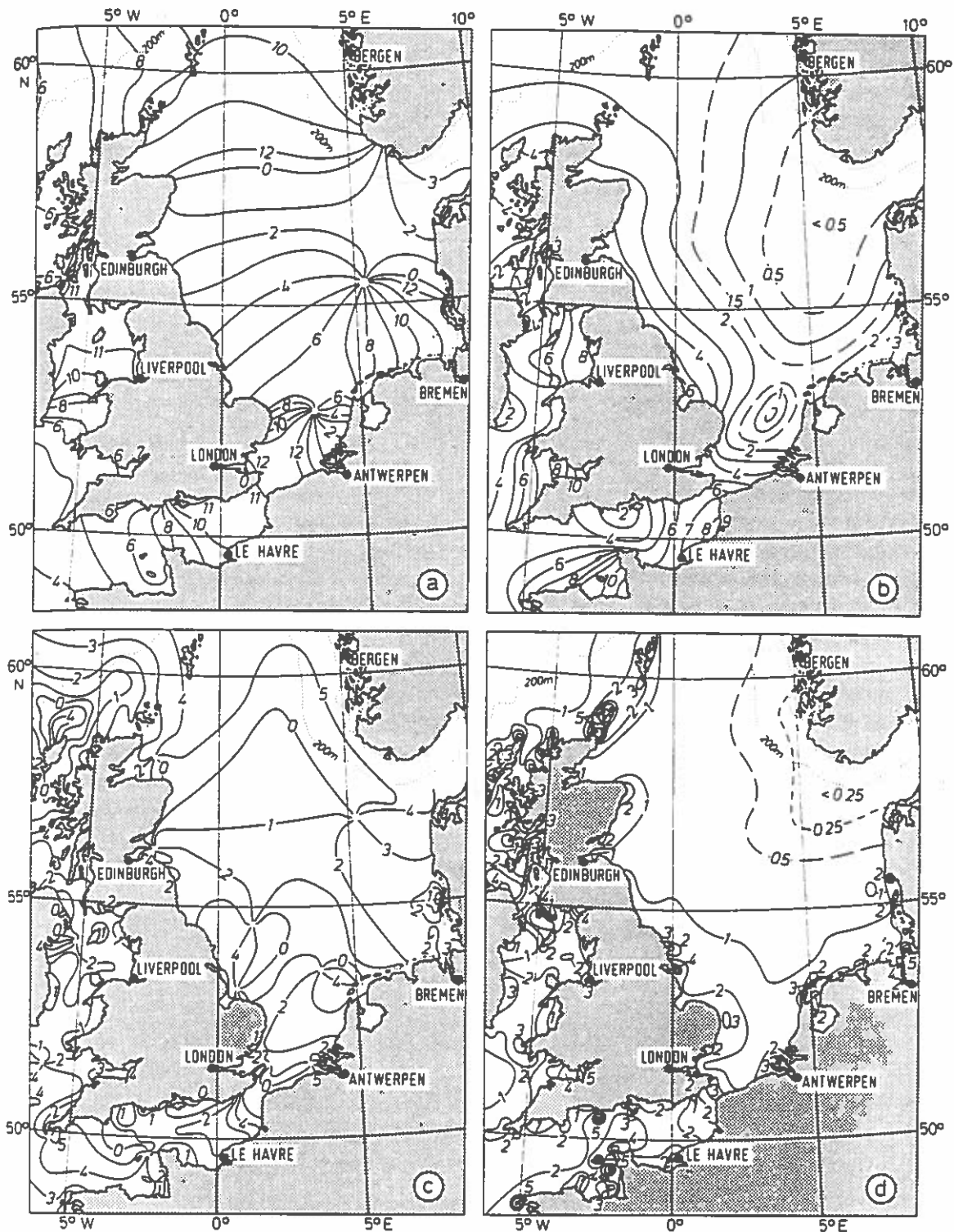


Fig. 9.12. Tides and tidal currents of the North Sea. (a) Cotidal lines of the semidiurnal M_2 tide, referred to the mean passage of the moon over the Greenwich meridian (after German Hydrogr. Institute, 1970). (b) Mean spring tidal range $2(M_2 + S_2)$ in m (after German Hydrogr. Institute, 1970). (c) Lines of equal time of occurrence of the maximum tidal current (in hr) during mean spring tide, referred to the moon's mean passage over the Greenwich meridian (after Sager, 1967). (d) Mean maximum velocity (in knots) of the tidal current at spring tide (after Sager, 1967).

Figuur 11.4. Het getij in de Noordzee (uit Dietrich et al., 1975).

(ii)

$$\omega^2 = g'Hk^2 \text{ ofwel } c^2 = g'H. \quad (11.17)$$

Dit is een golf met dezelfde frequentie en fase-snelheid als een gewone zwaartekrachtsgolf met $f=0$. Uit (11.9a) volgt echter dat

$$\alpha^2 = \frac{-f^2}{g'H} \text{ ofwel } \alpha = \pm i \frac{f}{\sqrt{g'H}} = i \frac{f}{c}. \quad (11.18)$$

De functie, $\bar{\eta}(y)$ is nu te schrijven als volgt:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= A \sin \alpha y + B \cos \alpha y = \operatorname{Re}[C \exp i \alpha y] = \operatorname{Re}[C] \exp \frac{f}{c} y \\ &= \operatorname{Re}[C] \exp \frac{\pm y}{a}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

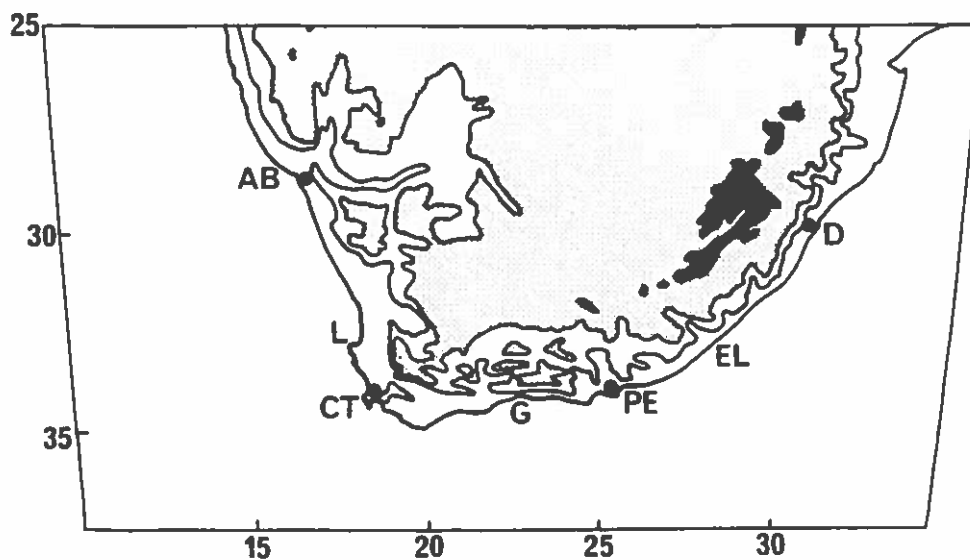
Hierin is a de Rossby deformatie straal, gedefinieerd in (10.9b). A , B en C zijn willekeurige amplitudes. We hebben hier te maken met een nieuw type golf, genaamd "Kelvin golf". Deze golf bestaat dankzij de rand. Kijkend in de richting van de voortplanting, heeft de golf zijn grootste amplitude aan de rechter wand (zie figuur 11.2). De amplitude valt exponentieel af vanaf de wand, met een karakteristieke lengte-schaal gelijk aan a .

OPGAVE 11.1: Toon aan, met behulp van (11.2), dat $v=0$, hetgeen betekent dat er geostrofisch evenwicht heerst in de y -richting.

Kelvin golven in de zee worden dagelijks waargenomen in de vorm van het getij. Eb en vloed ontstaan door de omwenteling van maan en aarde om hun gemeenschappelijke zwaartepunt. Dit gaat gepaard met een verschillende mate van aantrekking die verschillende punten op aarde ondervinden. In de zogenaamde "dynamische getijden theorie" van Laplace wordt het getij beschouwd als een gedwongen golf. Echter, alleen in de grote Zuidelijke oceaan kan het getij de hele aarde rondgaan en is dus een gedwongen golf. Over het algemeen treedt een complicatie op door de afwisseling van zee en land. In de meeste zeeën is het getij een vrije golf. Beschouw als voorbeeld de Atlantische oceaan. Waar deze oceaan in verbinding staat met de Zuidelijke oceaan trekken voortdurend ongeveer twee maal per etmaal verheffingen van de zeespiegel voorbij. Deze zullen zich in de Atlantische oceaan naar het noorden voortplanten als een vrije golf. De periode van deze golf is dezelfde als bij de bron, dus een half maan-etmaal (12 uur en 25 minuten), maar de snelheid wordt hier niet voorgeschreven door de maan, maar door de diepte van de oceaan. De Atlantische oceaan heeft ook nog een "eigen" getij. Voor zee-gebieden van beperkte omvang, zoals de Noordzee, die min of meer het karakter hebben van een Randzee, is het eigen getij van veel minder belang dan de van buiten geïnduceerde schommelingen.

In het getij in de Noordzee, dat wordt gedomineerd door het hoofdmaangetij, herkennen we de typische eigenschappen van een Kelvin golf (zie figuur 11.4). Het getij in de Noordzee wordt gedomineerd door het hoofdmaangetij. Het bestaat uit een aantal cellen. In een dergelijke cel loopt de getijgolf tegen de wijzers van de klok rond, waarbij in het centrum van de cel, amphidromie genoemd, het verticale getij verwaarloosbaar is, terwijl de amplitude naar de kust toe steeds groter wordt. Het is gebruikelijk om op de kaart de lijnen van gelijke amplitude en fase met elkaar te verbinden. In de Noordzee zijn in beginsel drie amphidromische cellen: de zuidelijke amphidromie wordt aangetroffen op de plaats van de Hoofden, de middelste noordwestelijk van de Duitse bocht en de noordelijke is gedegenereerd en ligt in feite op het vaste land van Noorwegen.

Het getij in de Noordzee wordt opgewekt door het getij in de Atlantische oceaan. Het dringt voornamelijk door de Noordrand naar binnen, de invloed van het nauw



Topographic and location map for southern Africa. AB refers to Alexander Bay, L to Langebaanweg, CT to Cape Town, G to George, PE to Port Elizabeth, EL to East London, and D to Durban. The first contour inland from the coastline is the 500 m contour, that enclosing the stippled region is the 1000 m contour and that enclosing the shaded region is the 1500 m contour.

Figuur 11.5. (uit Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1990).

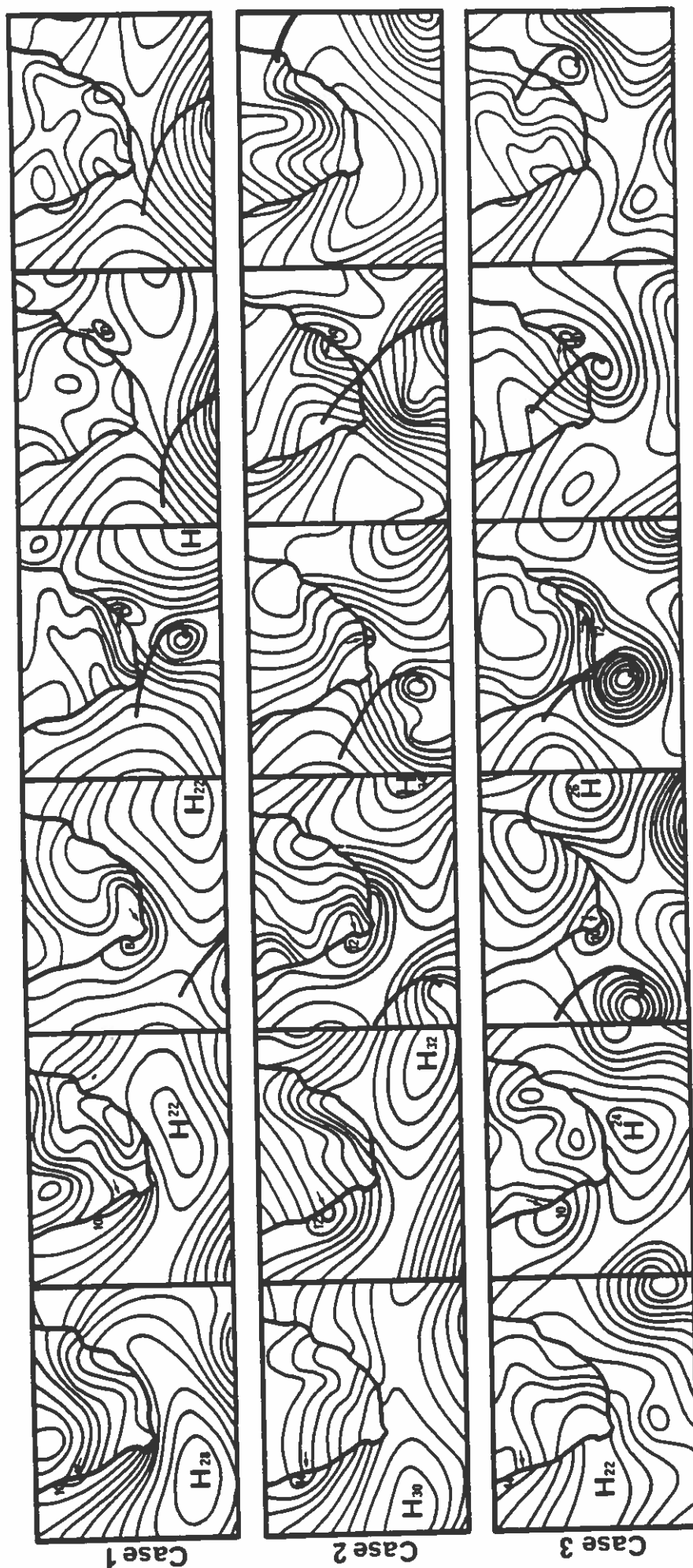
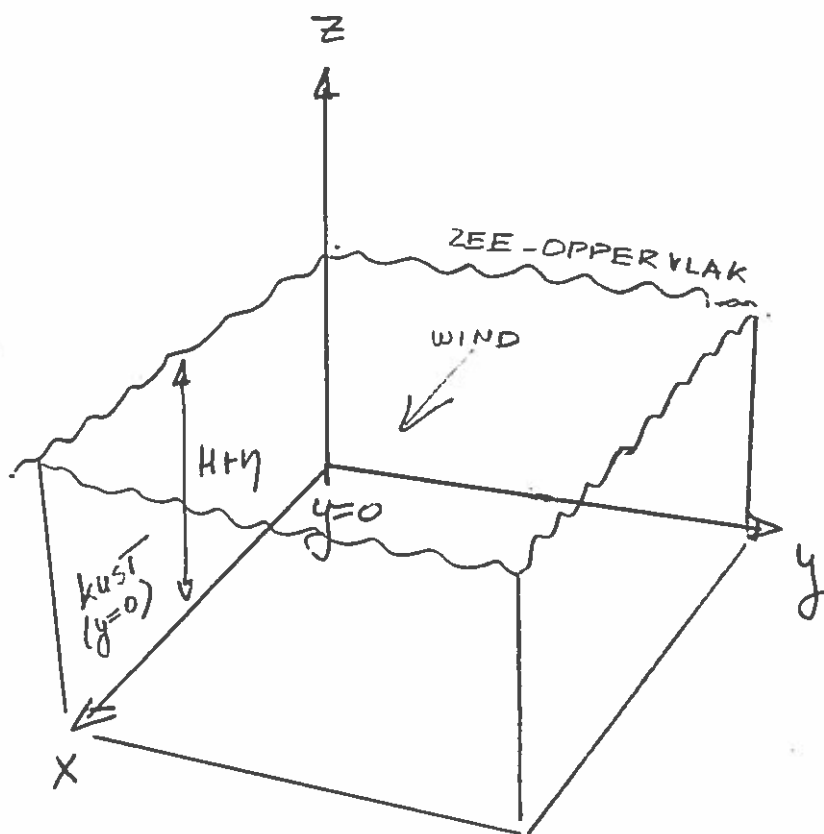


Figure 11.6. (uit Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1990).

Surface synoptic pressure maps at 1400 GMT daily obtained from the South African Weather Bureau. The map borders for each panel are 20–45° S, 5–45° E. In each figure, H refers to the ridging anticyclone, the bold line to the trailing mid-latitude frontal system and the arrow to the coastal low. Case 1 extends over 6–11 February 1981; case 2 over 15–20 September 1981 and case 3 over 18–23 April 1980. Pressures over the sea are given as the difference in millibars from 1000 mb and the isobars are contoured at 2 mb intervals. Over the continent, the isolines refer to the 850 mb surface contoured at 10 geopotential metre (gpm) intervals.



Figuur 11.7.

van Calais is gering en voorbij Texel niet meer merkbaar. De direkte invloed van de getijverwekkende kracht is eveneens zeer gering; deze geeft slechts aanleiding tot een getij met een amplitude van 1-2 cm. De verklaring van dit laatste is, dat de resonantiefrequenties van de Noordzee zover van de frequentie van de exciterende, getijverwekkende kracht afliggen, dat de responsie gering is. Als voorbeeld van een besloten waterbekken, dat kleiner is dan de Noordzee, maar waar de resonantiefrequentie dicht bij de frequentie van de exciterende kracht ligt, kan het Eriemeer in Noord Amerika genoemd worden. De laagste resonantie frequentie van dit meer komt overeen met een periode van 14 uur; een waarde die dus niet zoveel verschilt van de periode van het hoofdmaansgetij, 12 uur en 25 minuten. Als gevolg daarvan heeft het relatief kleine Eriemeer dan ook 8 cm getijverschil. Andere grote meren kunnen veel minder getij hebben. Het Baikalmeer bijvoorbeeld, heeft een resonantieperiode van 4.5 uur, en daarom slechts 1.5 cm getij.

Een belangrijke eigenschap van Kelvin golven, in verband met het getij, is dat alle frequenties mogelijk zijn, dit in tegenstelling tot Poincaré golven (zie figuur 11.3). Aangezien de getij-forcing een frequentie bezit die voor relatief kleine zee-gebieden in het algemeen kleiner is dan de minimale frequentie van Poincaré golven, zullen alleen Kelvin golven worden aangeslagen door deze forcing. Met andere woorden het getij in een zee met beperkte afmetingen manifesteert zich als een Kelvin golf (zie figuur 11.4).

OPGAVE 11.2: Voor welke minimale kanaal-breedte, L , zal de getij-forcing met periode 12.5 uur een Poincaré golf aanslaan. Stel $f=1.16 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (dit correspondeert met een breedte van 53°), $g'=9.8 \text{ ms}^{-2}$ en $H=70 \text{ m}$ (gemiddelde diepte van de Noordzee).

Ook in de atmosfeer, worden wel eens golf-verschijnselen waargenomen die worden toegeschreven aan Kelvin golven. Het meest opvallende voorbeeld hiervan vinden we langs de Zuid-Afrikaanse kust. Deze kust is relatief stijl (zie figuur 11.5). Regelmatig worden hier lage druk gebiedjes gesignaleerd die vanaf Namibië om de kaap, "geplakt" aan de kust, in oostelijke richting bewegen (op het zuidelijke halfrond is alles gespiegeld t.o.v. het noordelijk halfrond; de Coriolis is naar "links" gericht) (zie figuur 11.6).

(iii) De derde mogelijke oplossing van (11.13) is een oscillatie met frequentie,

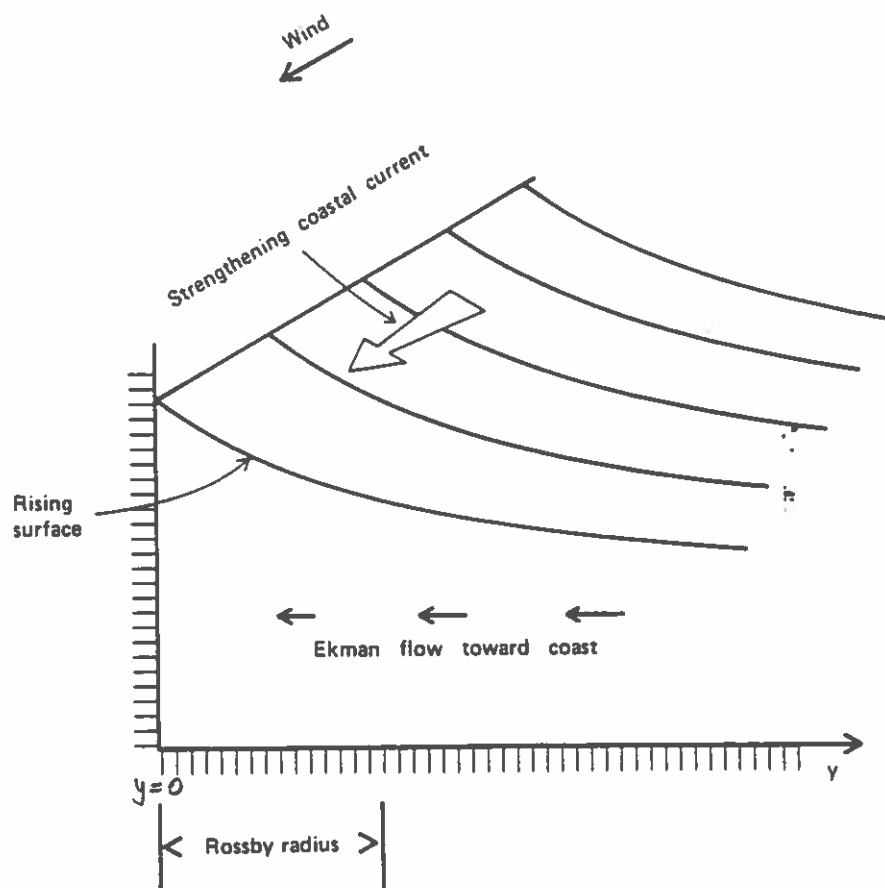
$$\omega = \pm f. \quad (11.20)$$

Pedlowsky (1987) (p. 79-81) laat zien dat deze oplossing fysisch niet realistisch is, gegeven de randvoorwaarden.

11.2 Stormvloeden

In 1953 werd 25000 vierkante kilometer in Groot Britanië en Nederland overstroomd (bedenk hierbij dat het totale land-oppervlak van Nederland ongeveer 30000 vierkante kilometer bedraagt). Dit was het gevolg van een zogenaamde stormvloed ("storm surge" in het Engels). Veel grote overstromingen zijn hier het gevolg van. Een stormvloed wordt opgewekt (of geforceerd) door de wind. Vanwege de rotatie van de aarde is de invloed van de wind op de stroming echter minder triviaal dan men in eerste instantie zou denken. De combinatie van forcing en rotatie kan tot onverwachte effecten leiden, die we hier aan de hand van het verschijnsel, stormvloed, zullen illustreren.

Een eenvoudig model van een stormvloed kan worden geconstrueerd met behulp van het ondiep water één-laag model. We beschouwen de geometrie zoals getekend in figuur 11.7.



The "local" storm surge solution for the northern hemisphere. The wind is blowing longshore with the coast on its right, thus producing an Ekman current toward the coast. This causes the surface to rise at a constant rate within a distance of the order of the Rossby radius of the coast. A coastal current in geostrophic equilibrium with the sea-level distribution also increases at a constant rate. This current is in the same direction as that of the wind.

Figure 11.8. (uit Gill, 1982).

De gelineariseerde ondiep water vergelijkingen, inclusief het effect van wind-"stress" zijn

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{X_s}{\rho H}, \quad (11.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -g' \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{Y_s}{\rho H}, \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (11.22)$$

waarin X_s en Y_s repectievelijk de x - en de y -component van de kracht per oppervlakte-eenheid (=stress) die de wind uitoefent op de zee. Om het probleem te vereenvoudigen stellen we nu dat alle afgeleides in de x -richting nul zijn. Tevens stellen we $Y_s=0$. Dit betekent dat de wind *langs* de kust waait. Vergelijkingen (11.20-22) worden nu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = \frac{X_s}{\rho H}, \quad (11.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -g' \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (11.24)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (11.25)$$

Uit (11.24) kunnen we met behulp van (11.23) en (11.25) de volgende differentiaal vergelijking voor v afleiden:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f^2 v - g' H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-f X_s}{\rho H}. \quad (11.26)$$

Deze vergelijking lijkt erg op de vergelijking voor η in het Rossby aanpassings-probleem (zie vergelijking 10.7). De oplossing bestaat uit een stationair ("steady") gedeelte en een niet-stationair ("transient") gedeelte. De stationaire oplossing, die voldoet aan de randvoorwaarde $v=0$ op $y=0$ (de kust), wordt verkregen door de tijdsafgeleide in (11.26) gelijk aan nul te stellen. De vergelijking wordt dan,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{f^2}{g' H} v = \frac{f X_s}{\rho g' H^2}. \quad (11.27)$$

Met randvoorwaarden: $v=0$ op $y=0$ is de oplossing,

$$v = \frac{-X_s}{f \rho H} (1 - \exp(-y/a)). \quad (11.28)$$

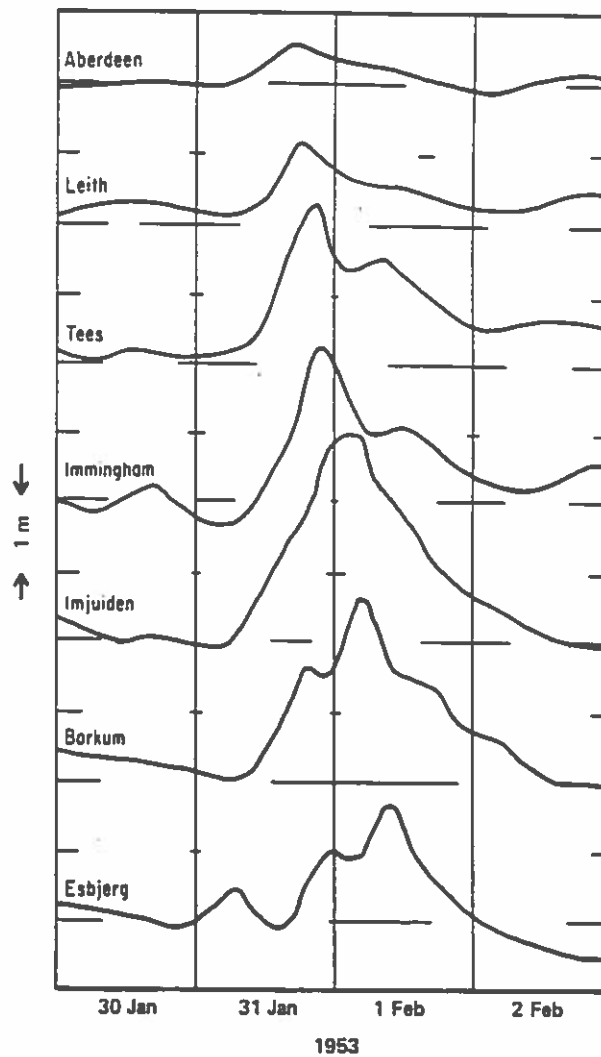
Omdat er een stroming is van of naar de kust, zal het vrije oppervlak (zee-niveau) gaan stijgen of dalen. Een uitdrukking voor de zeespiegel-stijging of daling kan worden verkregen door (11.28) in (11.25) te substitueren, met als resultaat,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{X_s}{f \rho a} \exp(-y/a). \quad (11.29)$$

Als $\eta(t=0) = 0$, dan

$$\eta = \frac{X_s}{f \rho a} \exp(-y/a) t. \quad (11.30)$$

Omdat v constant is in de tijd, moet er volgens (11.24) een stroming u langs de kust zijn die toeneemt in intensiteit volgens de volgende vergelijking:



Progress of the very large storm surges of 1953 around the North Sea. The curves shown are the observed sea level minus the predicted astronomical tide, i.e., the sea level at Ijmuiden was about 3 m above normal in the early hours of February 1. The double peak seen at some parts is often due to surge-tide interaction. Adapted from Rossiter (1954, Fig. 1)

Figuur 11.9. (uit Gill, 1982).

$$u = \frac{-g' \partial \eta}{f \partial y} = \frac{X_s}{\rho H} \exp(-y/a) t . \quad (11.31)$$

In deze sectie hebben we variaties in de x -richting verwaarloosd. We hebben gevonden dat, ten gevolge van wind langs de kust, er een stroming *loodrecht* op de kust ontstaat. Ten gevolge van dit zogenaamde "Ekman transport" hoopt water zich op tegen de rechter oever (kijkend in de richting van de wind) over een karakteristieke afstand in de orde van de Rossby deformatie straal, a (zie figuur 11.8). Dit is een "surge". In de Noordzee is a in de orde van 200 km. Vaak beweegt zo'n surge langs de kust mee met het windveld. We hebben dan te maken met een zogenaamde "geforceerde Kelvin golf". Ook als de wind-forcering een zekere beperkte tijd aanhoudt, manifesteert de surge zich als een Kelvin golf (zie figuur 11.9) (zie Gill, 1982, sectie 10.9 en 10.10).

Het één-laag model heeft in de context van dit probleem duidelijke beperkingen. In werkelijkheid is de zee of oceaan geen homogene vloeistof die als een blok reageert op de wind-forcering. Het Ekman-transport in de bovenste lagen van de zee wordt in werkelijkheid voor het grootste gedeelte gecompenseerd door een tegengesteld Ekman transport in de diepere lagen. Met andere woorden, er ontstaat, als gevolg van de wind langs de kust, een *circulatie* loodrecht op de kust. Zulke zogenaamde secundaire circulaties zijn bijna continu aanwezig in gebieden waar de wind bijna altijd een component langs de kust heeft. Een voorbeeld is de westkust van Zuid Amerika, vooral in de buurt van Noord Chili en Peru. Als gevolg van de zuidelijke wind stroomt het oppervlakte water van de kust weg (we zitten hier op het zuidelijk halfrond). Ter compensatie treedt "upwelling" van relatief koud, voedselrijk water op (zie sectie 10.11 van Gill, 1982).

11.3 Topografische Rossby golven ("continental shelf waves")

In deze sectie bepreken we de topografische Rossby golf die zich voordoet in zee-gebieden waar de bodem sterk helt, zoals aan de rand van het continentale plat. Het is een voorbeeld van een golf die bestaat vanwege behoud van potentiële vorticeiteit. Tevens is deze golf een voorbeeld van een *laag*-frequente golf. In sectie 9.5 hebben we voor dit soort golven al een dispersie-relatie afgeleid. We zullen hier in meer detail op deze golven ingaan. We gaan daarbij weer uit van de ondiep water vergelijkingen voor een homogene laag. We veronderstellen dat f constant is. Verder nemen we aan dat de diepte van de zee varieert met y (zie figuur 11.10). De diepte, h , kan worden geschreven als,

$$h = H(y) + \eta(x, y, t) . \quad (11.32)$$

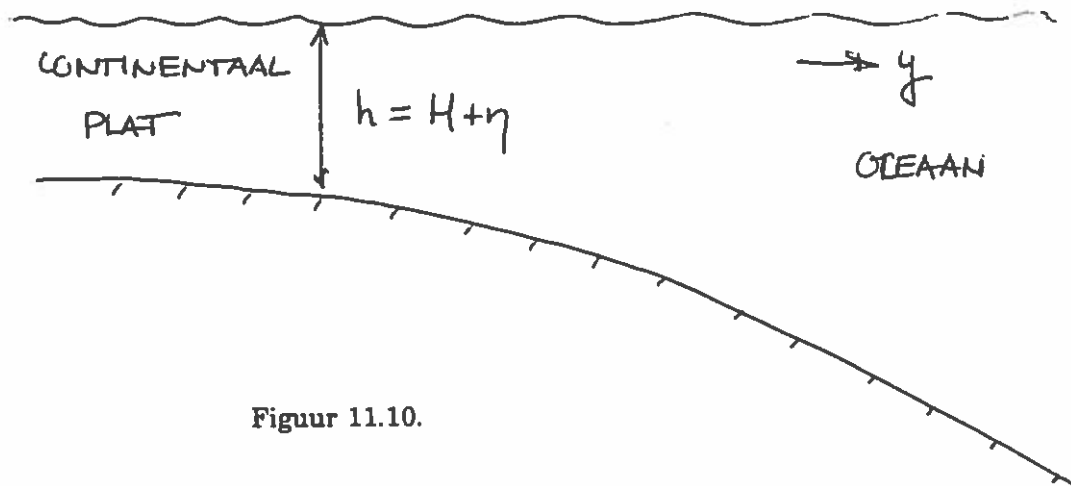
Stel nu, voor het gemak, dat het zee-oppervlak niet mag bewegen; dus $\eta=0$. Dit is de eerder (sectie 6.5) genoemde "rigid lid" benadering. Hierdoor zijn zwaartekrachtsgolven (en Kelvin golven) langs het zee-oppervlak niet meer mogelijk.

Vergelijking (9.6) wordt dan

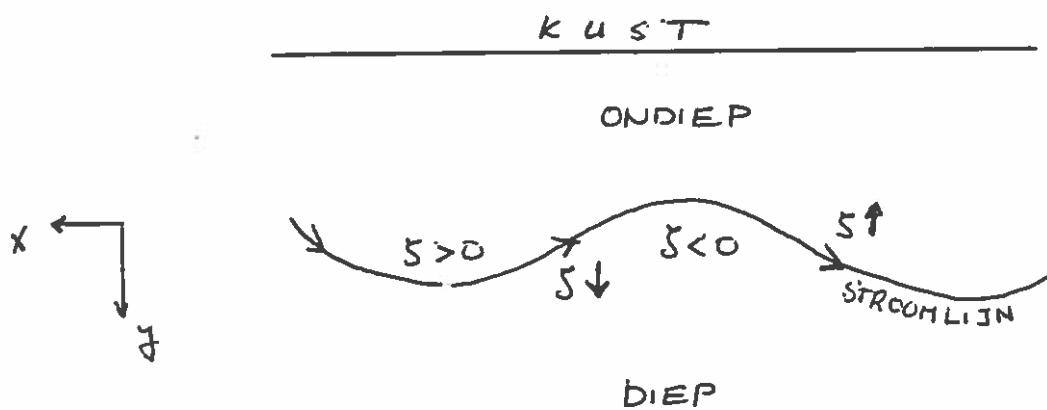
$$v \frac{\partial H}{\partial y} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) . \quad (11.33)$$

De gelineariseerde vorticeitsvergelijking (9.19) is met behulp van (11.33) te schrijven als

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{fv}{H} \frac{\partial H}{\partial y} . \quad (11.34)$$



Figuur 11.10.



Figuur 11.11. Topografische Rossby golven. Als water van diep naar ondiep stroomt, neemt vanwege behoud van potentiële vortciteit de relatieve vortciteit af. Als water van ondiep naar diep stroomt, neemt de relatieve vortciteit weer toe. Dit heeft een golf beweging tot gevolg met een fasesnelheid met een vaste richting.

(11.33) kan ook worden gebruikt om een zogenaamde stroomfunctie, ψ , te definiëren:

$$Hu \equiv \frac{-\partial\psi}{\partial y}; \quad Hv \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (11.35)$$

De vorticiteitsvergelijking (11.34) wordt nu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right) - \frac{f}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (11.36)$$

Stel nu dat

$$H = H_0 \exp(2\lambda y). \quad (11.37)$$

Dan wordt (11.36)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - 2\lambda f \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (11.38)$$

Veronderstel nu golf-vormige oplossingen

$$\psi = \phi(y) \exp \{ i(lx - \omega t) \}. \quad (11.39)$$

Dit levert na substitutie in vergelijking (11.38),

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} - \left(l^2 - \frac{2\lambda f l}{\omega} \right) \phi = 0. \quad (11.40)$$

Deze vergelijking kan worden herschreven als (zie appendix-A)

$$\frac{\partial^2\phi^*}{\partial y^2} + q^2\phi^* = 0, \quad (11.41)$$

waarin

$$\phi \equiv \phi^* \exp(\lambda y), \quad (11.42)$$

en

$$q^2 = \frac{2\lambda f l}{\omega} - l^2 - \lambda^2. \quad (11.43)$$

De oplossing van (11.41) is

$$\phi^* = A \sin my. \quad (11.44)$$

Hierin is A een amplitude. Dit levert een dispersie relatie,

$$q^2 - m^2 = 0. \quad (11.45)$$

Met (11.43) wordt dit

$$\omega = \frac{2\lambda f l}{\lambda^2 + l^2 + m^2}. \quad (11.46)$$

De voortplantings richting hangt af van het teken van λ . De groepssnelheid in de x -richting wordt verkregen door (11.46) naar l te differentieren. Het resultaat is,

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\lambda f}{\lambda^2 + l^2 + m^2} \left(1 - \frac{2l^2}{\lambda^2 + l^2 + m^2} \right). \quad (11.47)$$

Er is een extremum in ω , ofwel $c_{gx}=0$, als

$$l^2 = \lambda^2 + m^2. \quad (11.48)$$

De maximale of minimale (al naar gelang het teken van λ) waarde van frequentie is

$$\omega_{\max} = \frac{\lambda f}{l}, \text{ of } \omega_{\max} = \frac{\lambda f}{\sqrt{\lambda^2 + m^2}} < f. \quad (11.49)$$

Onafhankelijk van de helling van de bodem is de frequentie altijd kleiner dan de Coriolis-frequentie. Hieruit concluderen we dat de topografische Rossby-golf een *laag*-frequente golf is. De frequentie is lager dan de minimale frequentie van Poincaré golven, die daardoor als hoog-frequent kunnen worden betiteld.

Een opmerkelijke eigenschap van een Rossbygolf is dat de fase snelheid een specifieke richting heeft. Dit wordt verklaard in figuur 11.11.

Topografische Rossby-golven zijn bijvoorbeeld waargenomen aan de rand van het Continentaal plat bij Nova Scotia. De aldaar waargenomen golven hadden een periode van ongeveer 21 dagen.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Gill.

12 POTENTIËLE VORTICITEIT

12.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we verder ingaan op het begrip potentiële vorticititeit. Met dit begrip hebben we in het kader van het ondiep water model al kennis gemaakt. Potentiële vorticititeit in dit model is gedefinieerd als de absolute vorticititeit gedeeld door de diepte van de laag. Het is een materieel behouden grootheid. Dit is het gevolg van impulsmoment-behoud en mass-behoud. Dus, het massa veld en het vorticititeitsveld zijn gekoppeld. Als er iets verandert in het vorticititeitsveld dan moet er ook iets veranderen in het massa-veld en andersom. Bijvoorbeeld, als via convergentie, h toeneemt, moet dat leiden tot een toename van de vorticititeit. Het behoud van potentiële vorticititeit heeft ook grote gevolgen voor de dynamika van meridionale (zuid-noord) bewegingen. Omdat de Coriolis parameter, f , varieert met de breedte, zullen er bij meridionale (zuid-noord) bewegingen veranderingen optreden in het massa- en/of het vorticititeitsveld. We hebben gezien dat hierdoor golfbewegingen mogelijk zijn.

Het ondiep water model is natuurlijk niet altijd even realistisch, vooral niet in het geval van de atmosfeer. In dit hoofdstuk zullen we een meer algemene vorm van potentiële vorticititeit introduceren. Deze vorm van potentiële vorticititeit heet "Ertel's potentiële vorticititeit". We zullen in de nu volgende sectie bewijzen dat Ertel's potentiële vorticititeit een behouden grootheid is in een continu gestratificeerde roterende samendrukbare vloeistof.

12.2 Ertel's theorema

We maken gebruik van de vorticititeitsvergelijking (8.16), die met (8.17) kan worden geschreven als

$$\frac{d\omega_a}{dt} = -\omega_a \nabla \cdot \mathbf{v} + \omega_a \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} . \quad (12.1)$$

Als we de continuïteitsvergelijking (4.2) substitueren in (12.1) dan resulteert

$$\frac{d\omega_a}{dt} = \omega_a \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \omega_a \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} . \quad (12.2)$$

Er geldt:

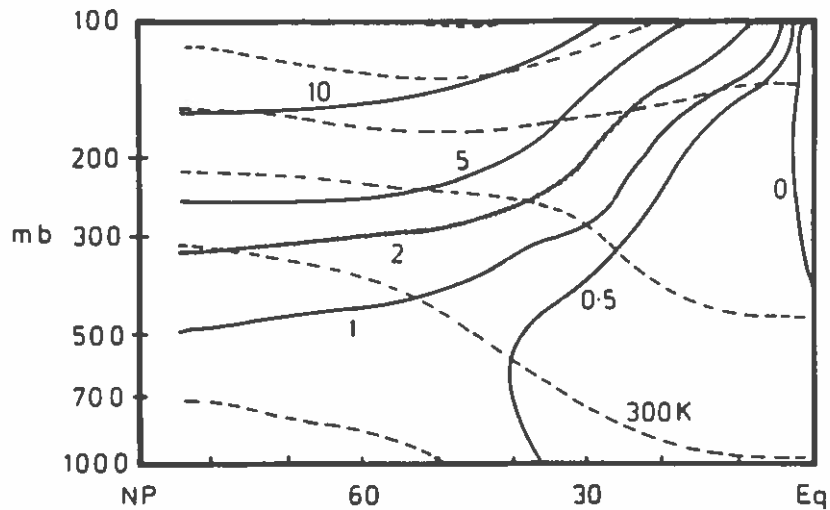
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a}{\rho} \right) = \frac{-\omega_a}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\omega_a}{dt} . \quad (12.3)$$

Dus, m.b.v. (12.2) volgt uit (12.3)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} . \quad (12.4)$$

Deze vergelijking geldt ook als de vloeistof onsamendrukbaar is (als $d\rho/dt=0$).

Beschouw nu een skalaire grootheid λ waarvoor geldt



A summary of the climatological P and θ distribution below 100 mb in the Northern Hemisphere winter. The dashed contours are those of θ , drawn every 30 K. Values of P are given in terms of the unit $\text{PVU} = 10^{-6} \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$, and contours are drawn at 0, 0.5, 1, 2, 5 and 10. The "dynamical" tropopause, specified by 2 PVU, is indicated by stippling.

Figuur 12.1. De verdeling van de gemiddelde waarde van Ertel's potentiële vorticeit (P) en de potentiële temperatuur in de atmosfeer.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \psi \quad (12.5)$$

Het is afhankelijk van de omstandigheden wat we voor λ kiezen. Bijvoorbeeld als $\lambda = \theta$, dan is volgens (4.7)

$$\psi = \frac{\theta}{c_p} \frac{ds}{dt} \quad (12.6)$$

Er geldt de volgende vektor-identiteit:

$$\frac{\omega_a}{\rho} \frac{d\nabla\lambda}{dt} = \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \frac{d\lambda}{dt} - \left\{ \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \right\} \cdot \nabla \lambda \quad (12.7)$$

Dit is te verifiëren door de afzonderlijke componenten uit te schrijven. We vermenigvuldigen nu (12.4) inwendig met $\nabla\lambda$:

$$\nabla\lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a}{\rho} \right) = \left\{ \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \right\} \cdot \nabla \lambda + \nabla\lambda \cdot \left(\frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3} \right) \quad (12.8)$$

Tellen we nu (12.7) en (12.8) bij elkaar op, dan resulteert m.b.v. (12.5),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a \cdot \nabla\lambda}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \psi + \nabla\lambda \cdot \left(\frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3} \right) \quad (12.9)$$

We definiëren een grootheid, Ω_{pot} , die we "Ertel's potentiële vorticititeit" noemen als volgt,

$$\Omega_{\text{pot}} \equiv \frac{\omega_a \cdot \nabla\lambda}{\rho} \quad (12.10)$$

Stel nu dat

- (1) λ is een behouden grootheid ($\psi=0$).
- (2) De vloeistof is barotroop ($\nabla\rho \times \nabla p = 0$),
of (!) λ is alleen een functie van p en ρ ($\nabla\rho \times \nabla p \perp \nabla\lambda$).

Dan is Ω_{pot} behouden door ieder vloeistof-element, ofwel

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\text{pot}} = 0 \quad (12.11)$$

Wat de atmosfeer betreft, kan $\lambda = \theta$ worden gekozen. θ is een behouden grootheid in adiabatische omstandigheden en bovendien alleen een functie van p en ρ .

Het behoud van Ω_{pot} demonstreert duidelijk hoe beweging, massa en thermodynamika gekoppeld zijn. De bovenstaande behoudswet is bijzonder krachtig. We zullen Ω_{pot} in het komende hoofdstuk, dat handelt over de stabiliteit van fronten, opnieuw aantreffen.

De gemiddelde verdeling van Ω_{pot} in de atmosfeer wordt in figuur 12.1 getoond. Hierin is duidelijk te zien dat de stratosfeer een reservoir is van hoge Ω_{pot} . De tropopauze (de grens tussen de stratosfeer en de troposfeer) wordt gedefinieerd als de lijn $\Omega_{\text{pot}} = 2 \text{ PVU} = 2 \times 10^{-6} \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

De wet van behoud van potentiële vorticititeit kan worden gebruikt om een aantal opmerkelijke geofysische fenomenen deels te verklaren. We denken hierbij aan de "westelijke verterking" van de grootschalige oceaan-circulatie. Ook het ontstaan van een trog achter een bergrug in een westelijke stroming kan met behulp van behoud van potentiële vorticititeit worden begrepen.

OPGAVE 12.1: Probeer deze verklaringen te formuleren. Maak hierbij eventueel gebruik van één van de in sectie 1 genoemde boeken.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Pedlosky.

13

BAROCLIENE ONSTABILITEIT

13.1 Inleiding

Dit tweede hoofdstuk over stabiliteit is een vervolg op hoofdstuk 7, waarin we de stabiliteit van het hydrostatisch evenwicht en van het geostrofisch evenwicht afzonderlijk hebben bekeken. In werkelijkheid gelden deze evenwichten, mits stabiel, tegelijkertijd. We hebben in sectie 6.4 gezien dat dit leidt tot het zogenaamde thermische wind evenwicht. Als er in een gebied een horizontale temperatuur of dichtheidsgradient heerst, dan moet dat gepaard gaan met een verticale gradient in de geostrofische wind. Langgerekte gebieden met relatief grote potentiële temperatuur tegenstellingen worden geregeld waargenomen in de atmosfeer, vooral op gematigde breedte. Zo'n gebied wordt een "front" genoemd. Langs zo'n front doen zich over het algemeen ook de meest interessante weersverschijnselen voor. Ook in de oceaan worden fronten, maar dan in de dichtheid i.p.v. de potentiële temperatuur, op vele plaatsen waargenomen (zie figuur 6.1).

In dit hoofdstuk zal een analyse worden gegeven van de stabiliteit van zo'n front met behulp van de "deeltjes" methode. De onstabiliteit van een front voor kleine verstoringen wordt in het algemeen aangeduid met de naam "barocliene onstabiliteit".

In de volgende sectie zullen we eerst een vereenvoudigde vergelijking voor het thermisch wind evenwicht in de atmosfeer afleiden. In sectie 13.3 zullen we de stabiliteit van dit evenwicht met behulp van de deeltjes-methode analyseren. Daarna, in sectie 13.4, zal een interpretatie worden gegeven van het stabiliteitscriterium. Het zal blijken dat de stabiliteit (het voortbestaan) van een front afhangt van de verdeling van Ertel's potentiële vortciteit. Deze verdeling is weer direct gekoppeld aan de verdelingen van potentiële temperatuur en absoluut impulsmoment.

13.2 Het thermisch wind evenwicht

We gaan uit van de drie componenten van de bewegingsvergelijkingen, (3.12), (3.15) en (3.16):

$$\frac{du}{dt} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (13.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (13.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (13.3)$$

We zullen voor de verandering eens de atmosfeer i.p.v. de oceaan als model nemen voor dit probleem. In dat geval is het handig om ρ te vervangen door de potentiële temperatuur, θ (zie hoofdstuk 4) en een zogenaamde Exner functie, Π (zie sectie 7.2) i.p.v. de druk, p , te gebruiken. De vergelijkingen in termen van deze variabelen worden:

$$\frac{du}{dt} - f v = -\theta \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (13.4)$$

$$\frac{dv}{dt} + f u = -\theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad (13.5)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\theta \frac{\partial \Pi}{\partial z} - g. \quad (13.6)$$

Beschouw een basistoestand in de atmosfeer (u_0, Π_0, θ_0) met $\partial \Pi_0 / \partial x = 0$, die in hydrostatisch en in geostrofisch evenwicht is. Dus:

$$\theta_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = -g. \quad (13.7)$$

en

$$f u_0 = -\theta_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}. \quad (13.8)$$

Net als in sectie 7.6 hebben we te maken met een zonale geostrofische stroming. We zullen hiervan de stabiliteit onderzoeken in het geval dat θ_0 afhangt van zowel z als y . We onderzoeken dus in feite de stabiliteit van een front. In zo'n front geldt het thermisch wind evenwicht (zie sectie 6.4). Een eenvoudige vergelijking voor dit evenwicht is af te leiden uit vergelijkingen (13.7) en (13.8). Differentiëren van (13.7) naar y , van (13.8) naar z en aftrekken van de resulterende vergelijkingen levert een vergelijking voor de verticale schering van de geostrofische stroming:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} - \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} \right). \quad (13.9)$$

Dit kan m.b.v. (13.7) en (13.8) ook worden geschreven als

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{-g}{f \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \frac{u_0}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (13.10)$$

Hieruit is te zien dat de intensiteit van de geostrofische stroming verandert met de hoogte als er horizontale en/of verticale thermische gelaagdheid is. De eerste term in het rechterlid van (13.10) is in het algemeen veel groter (in absolute zin) dan de tweede term. De horizontale potentiële temperatuur gradient in een gemiddeld grootschalig front is ongeveer 10 graden over 100 km. De verticale potentiële temperatuur gradient in de atmosfeer ligt meestal in de buurt van 5 graden per km. Met $\theta_0 = 300$ K, $u_0 = 10$ m s⁻¹ en $f = 10^{-4}$ s⁻¹, wordt de eerste term in het rechterlid orde 10^{-2} en tweede term orde 10^{-4} . Alleen in gebieden waar u_0 heel groot is en $\partial \theta_0 / \partial y$ kleiner komt de tweede term enigzins in de buurt van de eerste term. Over het algemeen geldt dus

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} \approx \frac{-g}{f \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y}. \quad (13.11)$$

13.3 Barokliene onstabiliteit

De verdelingen van $u_0(y, z)$, $\Pi_0(y, z)$ en $\theta_0(y, z)$ voldoen aan vergelijkingen (13.7), (13.8) en (13.11). We onderzoeken nu de stabiliteit van zo'n verdeling met behulp van de deeltjes methode (zie hoofdstuk 7). De werkwijze is analoog aan die in sectie 7.6. Beschouw weer een luchtdeeltje dat zich in de positie (y_0, z_0) bevindt. Het beweegt in de x -richting mee met de geostrofische stroming. Stel dat dit deeltje een klein zetje krijgt in het y - z vlak, zodat de positie van het deeltje wordt gegeven door $(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$. We beperken ons tot bewegingen in het y - z vlak. Aangezien de druk niet varieert in de x -richting geldt

$$\frac{du}{dt} = f \frac{dy}{dt},$$

of

$$u(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = u_0(y_0, z_0) + f \delta y. \quad (13.12)$$

Als we storingen in het druk-veld en in het potentiële temperatuur veld verwaarlozen, kunnen we (13.5) m.b.v. (13.8) schrijven als

$$\frac{dv}{dt} = f(u_0 - u) \quad (13.13)$$

Voor een kleine uitwijking (δy , δz) geldt

$$\frac{d}{dt} v(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f \left(u_0(y_0, z_0) + \frac{\partial u_0}{\partial z} \delta z + \frac{\partial u_0}{\partial y} \delta y - u(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) \right) \quad (13.14)$$

M.b.v. (13.12) wordt dit

$$\frac{d}{dt} v(y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta y} - \left(f - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right) \delta y \quad (13.15)$$

We stellen nu dat het deeltje langs een isentroop (isolijn van potentiële temperatuur) beweegt. Langs zo'n isentroop geldt

$$\delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta z = 0.$$

Dan kunnen we schrijven:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)_\theta = - \frac{\partial \theta_0 / \partial y}{\partial \theta_0 / \partial z} = f \frac{\partial u_0 / \partial z}{N^2}, \quad (13.16)$$

waarin de Brunt-Väisälä frequentie N is gedefinieerd als

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (13.17)$$

Substitutie van (13.16) in (13.15) levert

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} = -f^2 \left(\frac{f - \partial u_0 / \partial y}{f} - \frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \right) \delta y \quad (13.18)$$

Deze vergelijking is van dezelfde vorm als vergelijking (7.37). De vraag of het luchtdeeltje zal terugkeren naar de oorsprong (y_0, z_0) of versneld worden van de oorsprong hangt af van het teken van de factor voor δy , in het rechterlid van (13.18). We concluderen dat het thermisch wind evenwicht *onstabiel* is als

$$f - \partial u_0 / \partial y < \frac{f}{N^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2. \quad (13.19)$$

Dit criterium kan ook in termen van het impulsmoment, M_0 , worden uitgedrukt:

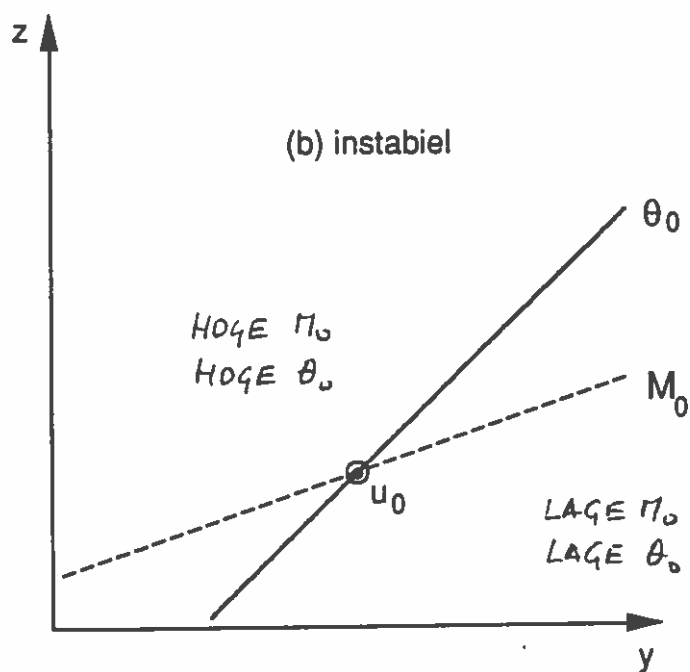
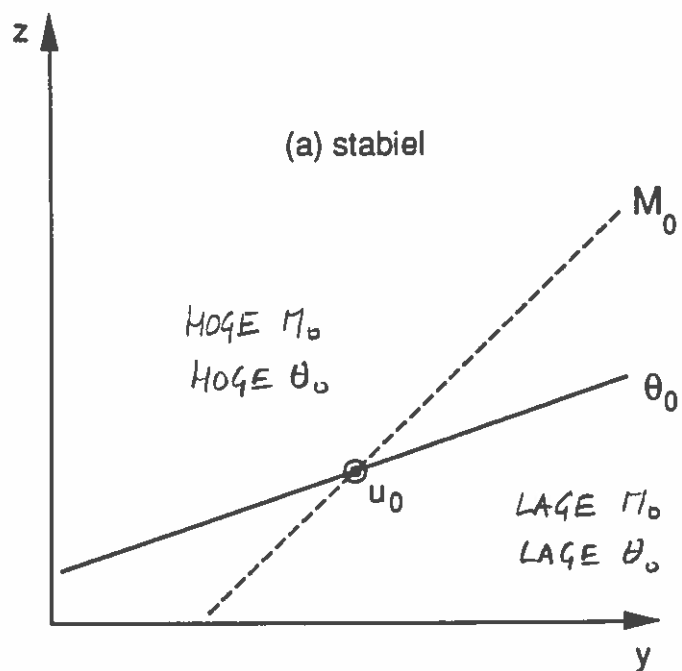
$$\frac{\partial M_0}{\partial y} > \frac{f}{N^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2. \quad (13.20)$$

Als er geen barocliniciteit is reduceert dit criterium tot het criterium voor inertiaële onstabielheid, (7.41c).

Het onstabieliteitscriterium (13.19) kan ook in termen van een Richardson getal worden geschreven als volgt:

$$Ri < \left(1 - \frac{1}{f} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{-1}, \quad (13.21)$$

Figuur 13.1. Stabiele en instabiele verdelingen van M en θ . θ neemt toe met de hoogte.
 Stippellijn: isolijn van M .
 Getrokken lijn: isolijn van θ (isentroop).



waarin

$$Ri = \frac{N^2}{(\partial u_0 / \partial z)^2} . \quad (13.22)$$

Als er geen horizontale schering in de geostrofische wind is dan wordt (13.21) $Ri < 1$.

Deze vorm van barocliene onstabieleit heet ook wel "*symmetrische onstabieleit*", vanwege het feit dat alle afgeleides naar x zijn verwaarloosd. Dus, alle bewegingen van luchtdeeltjes zijn symmetrisch t.o.v. de x -as. Als we deze vrij drastische benadering niet maken wordt het probleem erg ingewikkeld, maar niet minder interessant, zoals we in secties 9.6 en 9.7 hebben gezien. In het derde jaars vak Dynamische Meteorologie zal hier uitgebreid aandacht aan worden besteed omdat de theorie van niet-symmetrische barocliene onstabieleit een plausibele verklaring geeft voor de ontwikkeling van frontale depressies op gematigde breedte (zie sectie 13.5). De theorie van symmetrische barocliene onstabieleit vormt geen verklaring voor de ontwikkeling van depressies, maar wel voor het bestaan in frontale gebieden van vertikale circulaties die gepaard gaan met bewolking en neerslag.

13.4 Interpretatie van het stabiliteitscriterium

We beperken ons in dit college tot de symmetrische variant van barocliene onstabieleit omdat deze variant een vrij gemakkelijke en inzichtelijke interpretatie toelaat. Dit kan in termen van de verdeling van de twee behouden grootheden, M_0 en θ_0 .

De helling van vlakken van gelijke M_0 kan worden geschreven als,

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)_{M_0} = \frac{-\partial M_0 / \partial y}{\partial M_0 / \partial z} = \frac{-(\partial u_0 / \partial y - f)}{\partial u_0 / \partial z} . \quad (13.23)$$

De helling van vlakken van gelijke θ_0 volgt uit (13.16):

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)_{\theta_0} = f \frac{\partial u_0 / \partial z}{N^2} . \quad (13.24)$$

Hieruit volgt direct dat het onstabieleits criterium (13.19) kan worden geschreven als

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)_{\theta_0} > \left(\frac{\delta z}{\delta y} \right)_{M_0} . \quad (13.25)$$

Met andere woorden, als θ_0 -vlakken sterker hellen dan M_0 -vlakken dan is het thermisch wind evenwicht niet meer stabiel voor verstoringen in het y - z vlak (zie figuur 13.1).

Het onstabieleitscriterium kan bovendien nog worden uitgedrukt in termen van Ertel's potentiële vorticeit. Het criterium (13.19) wordt m.b.v. (13.11)

$$\zeta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \eta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} < 0 , \quad (13.26)$$

waarin

$$\zeta_0 \equiv f - \frac{\partial u_0}{\partial y} \text{ en } \eta_0 \equiv \frac{\partial u_0}{\partial z} . \quad (13.27)$$

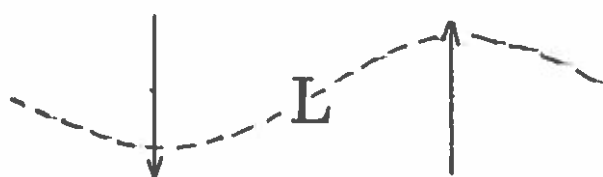
a



b



c



Figuur 13.2.

ζ_0 en η_0 zijn respectievelijk de verticale component van de absolute vorticeit en de horizontale (y) component van de absolute vorticeit van de basistoestand. Nu kunnen we (13.26) schrijven in termen van Ertel's potentiële vorticeit (met $\lambda=\theta$) als volgt:

$$\rho_0(\Omega_{\text{pot}})_0 \equiv \zeta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \eta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} < 0, \quad (13.28)$$

ofwel

$$(\Omega_{\text{pot}})_0 < 0. \quad (13.29)$$

De symmetrische stabiliteit van een front of barocliene zone hangt dus af van het teken van Ertel's potentiële vorticeit. Belangrijk is te constateren dat barocliene onstabielheid mogelijk is ook al is de stroming zowel inertiael stabiel ($\partial M_0/\partial y < 0$) als statisch stabiel ($\partial \theta_0/\partial z > 0$) (zie hoofdstuk 7).

13.5 Baroclien onstabiele bewegingen in depressies

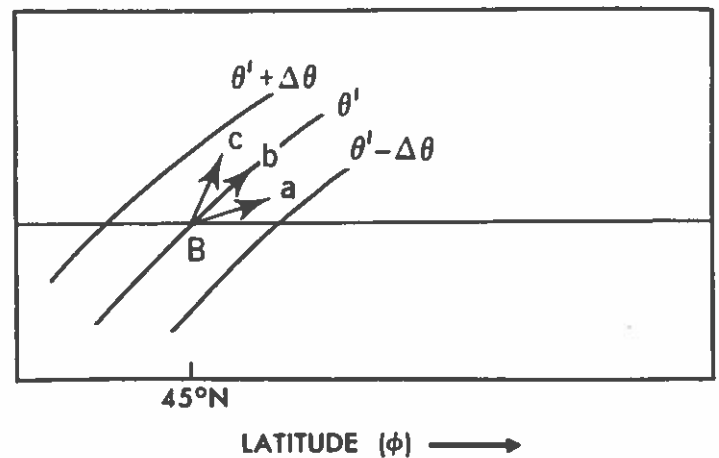
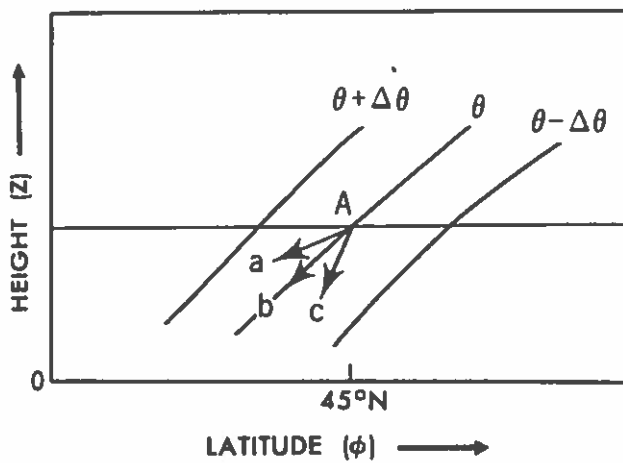
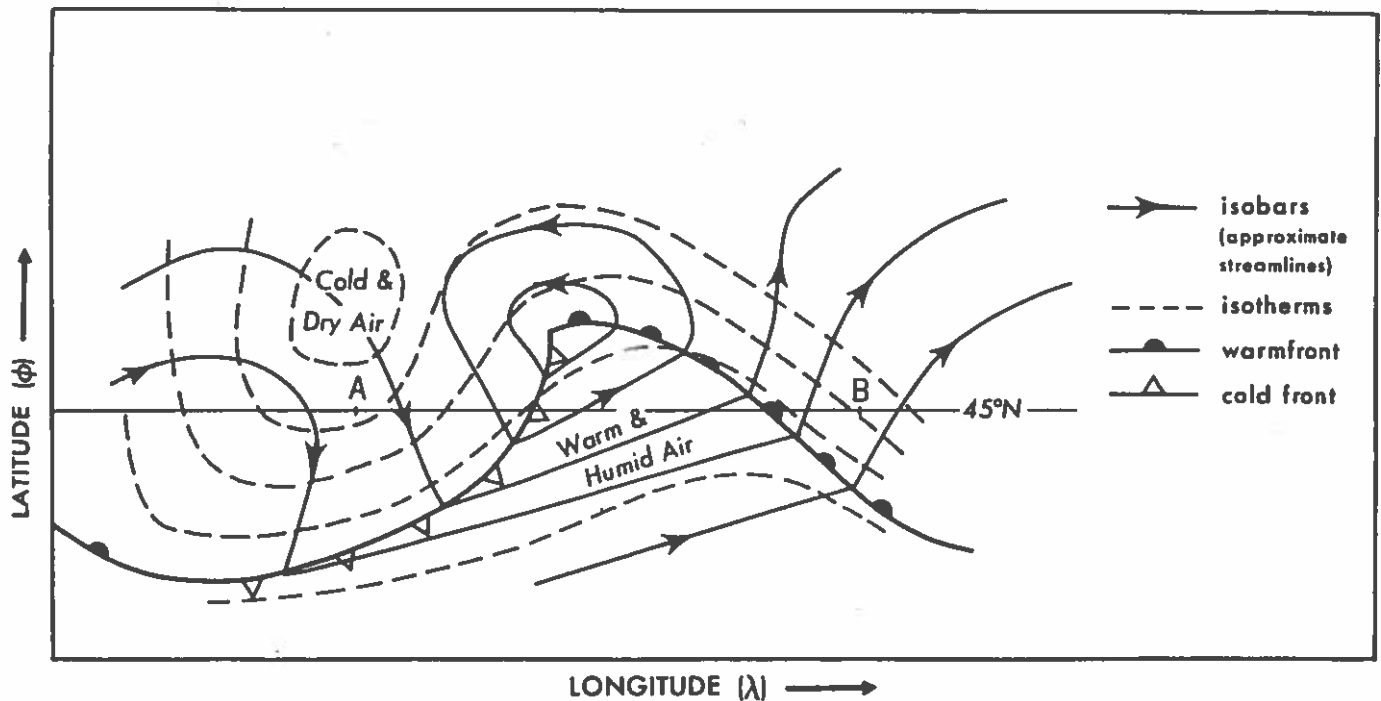
In de atmosfeer en in de oceaan komt symmetrische barocliene onstabielheid in het algemeen niet voor. Wel kan met de zojuist besproken theorie fysich inzicht worden verkregen in de volledig drie-dimensionale baroclien onstabiele bewegingen die, zoals eerder is gemeld, worden waargenomen bij de vorming van depressies (lagedrukgebieden of cyclonen) op gematigde breedte.

Het loslaten van de aanname van symmetrie t.o.v. de x -as betekent dat het behoud van impuls (M) niet meer geldt. Er kunnen drukgradientkrachten in de x -richting ontstaan waardoor vloeistof (lucht¹) een versnelling kan ondergaan in deze richting. Wat er dan kan gebeuren illustreren we in deze sectie aan de hand van een gedachteexperiment. De theorie van drie-dimensionale barocliene onstabielheid valt buiten het bestek van dit diktaat.

We stellen ons voor dat in een beperkt gebied de druk op een gegeven moment iets lager is dan elders (aangegeven met de letter 'L' in figuur 13.2a). Hierdoor zal lucht naar dit gebied stromen. Echter, door de Corioliskracht zal deze lucht worden afgebogen naar rechts (op het noordelijk halfrond), waardoor het "laag" niet volledig zal "opvullen". Uiteindelijk zal zich een toestand van geostroof evenwicht instellen (figuur 13.2b), zoals beschreven in hoofdstuk 10, met een luchtstroming uit het zuiden ten oosten van het laag en een luchtstroming uit het noorden ten westen van het laag. Als dit laag is ingebed in een barocliene zone, met koude lucht in het noorden en warme lucht in het zuiden (de stippellijn in figuur 13.2c stelt een isotherm voor), kan de amplitude van de meridionale beweging spontaan gaan groeien.

Een meer waarheidsgetrouw beeld van de druk- en temperatuurverdeling wordt getoond in figuur 13.3. Deze figuur laat ook zien hoe de beweging van luchtdeeltjes is in twee verticale/meridionale doorsneden aan weerszijden van het drukminimum aan de grond (locaties A en B). Ten westen van dit minimum (locatie A) wordt koude lucht aangevoerd. Echter, als de bewegingsrichting is zoals getoond m.b.v. pijltje 'c' in de figuur links-onder, zal een luchtdeeltje door adiabatische opwarming meteen warmer worden dan de "omgevingslucht", waardoor dit luchtdeeltje een teruggedrijvende kracht ondervindt. Dit is niet het geval als de beweging minder scheef naar beneden gericht is (pijltje 'a'). Het luchtdeeltje daalt dan wel, maar blijft voordurend kouder dan de omgevingslucht en ondervindt juist een wegdrijvende naar beneden gerichte "buoyancy"kracht. Het deeltje zal dus nooit meer op locatie A terugkomen. Voor de bewegingen aan de oostzijde van het laag geldt een analoog verhaal. Alleen als de deeltjesbeweging omhoog gericht is,

¹We spreken in het vervolg over lucht ook al zijn deze processen waarschijnlijk ook van belang in de oceaan



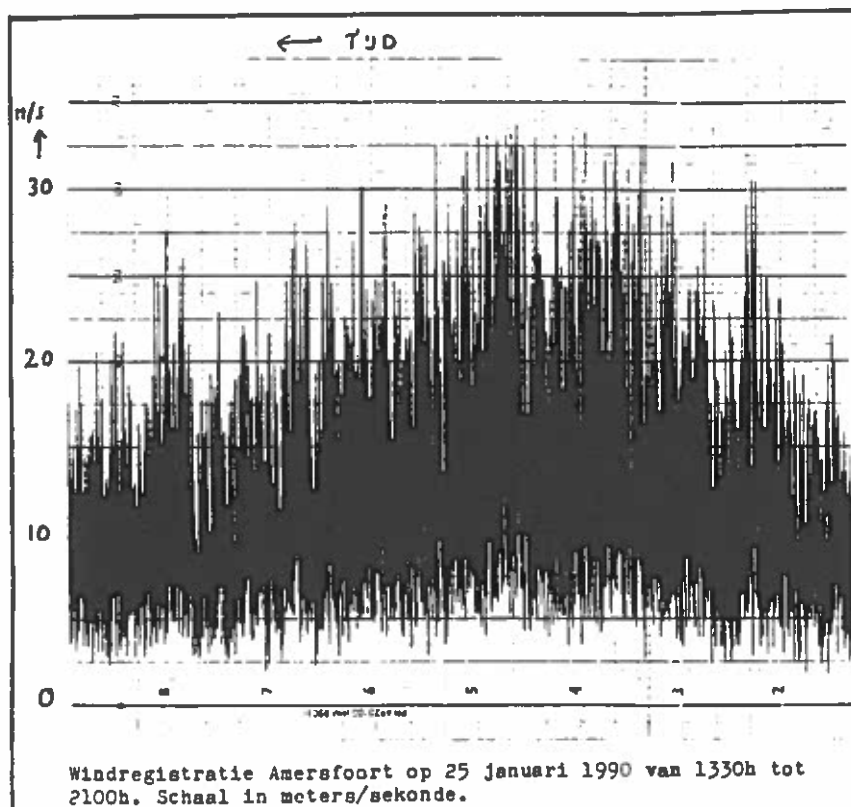
Schematic picture of the dominant mechanism of northward transport of sensible and latent heat by eddies in midlatitudes of the Northern Hemisphere. The transport takes place mainly in the lower troposphere. Shown are latitude-longitude and height-latitude cross sections (from Peixoto and Oort, 1984).

Figuur 13.3. (uit Peixoto en Oort)

zoals aangegeven m.b.v. pijltje 'a' in de figuur rechts-onder, is er sprake van onstabiliteit. Merk op de impulsverdeling geen invloed meer heeft op de stabiliteit van bewegingen loodrecht op het front.

Hiermee hebben we niets gezegd over de omstandigheden die de scheefheid van de meridionale beweging bepalen. Dit is namelijk een vrij ingewikkeld probleem waarbij het concept van *frontogenese* een centrale rol speelt. Dit onderwerp valt buiten het bestek van dit diktaat.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton, sectie 9.3.



Figuur 14.1. (uit Weerspiegel).

14

TURBULENTIE

14.1 Reynoldsgetal

Tot nu toe hebben we gesproken over bewegingen in de atmosfeer en de oceaan waarbij moleculaire wrijving of viscositeit geen belangrijke rol speelt. Er treedt echter een ander effect op dat tot hetzelfde resultaat leidt en tot op zekere hoogte ook op dezelfde wijze wiskundig geformuleerd wordt. Dit is de zogenaamde turbulente wrijving.

In het voorgaande hebben we impliciet aangenomen dat de bewegingen een regelmatig karakter dragen met duidelijk gedefinieerde stromingspatronen. Uit de klassieke stromingsleer is bekend dat zulke laminaire stromingen onstabiel kunnen worden en overgaan in turbulente stromingen met een grote verscheidenheid van wervelbewegingen ("eddies"). De overgang van laminaire naar turbulente stroming vindt plaats als een kritische waarde van het zogenaamde Reynoldsgetal overschreden wordt. Dit getal is gedefinieerd als

$$Re = \frac{LV}{\nu}, \quad (14.1)$$

waar L en V een karakteristieke lengteschaal en snelheid voorstellen en ν de moleculaire kinematische viscositeit is (viscositeitscoëfficiënt gedeeld door dichtheid). Behalve een sterke toename van de wrijving heeft dit ook een turbulent transport van andere grootheden zoals temperatuur of opgeloste stoffen ten gevolg. Dit wordt turbulente diffusie of dispersie genoemd.

De atmosfeer en de oceanen zijn in wezen altijd turbulent (zie figuur 14.1). In feite is het begrip in de geofysische stromingsleer minder eenduidig bepaald omdat het afhangt van de schaal waarop men werkt. In een studie van de algemene circulatie komen lokale verschijnselen zoals depressies in de atmosfeer te voorschijn als turbulente wervels. In een studie van zo'n individuele depressie bedoelt men met turbulentie natuurlijk veel kleinschaliger bewegingen. In beide gevallen moet men het spectrum van bewegingen bij een bepaald golfgetal of een bepaalde frequentie afkappen en de kleinere schalen min of meer statistisch beschrijven. Omdat deze kleine schalen op de grootschalige beweging doorwerken komen ze in de grootschalige bewegingsvergelijkingen naar voren als turbulente wrijvingstermen en verschijnen ze in de transport-vergelijkingen als turbulente diffusietermen.

14.2 Reynoldsvergelijkingen

De eerste stap in de beschrijving van een turbulent medium is om alle veranderlijken te splitsen in een grootschalige of "regelmatige" component en een kleinschalige of turbulente component. We leiden dan een stelsel deterministische vergelijkingen af voor de eerste component waarin de tweede component in zgn. geparameteriseerde vorm voorkomt.

We schrijven een willekeurige grootte, ξ , als de som van een nader te definiëren gemiddelde waarde, $\bar{\xi}$, en de afwijking daarvan, ξ' , dus

$$\xi = \bar{\xi} + \xi'. \quad (14.2)$$

Het moet benadrukt worden dat het gemiddelde hier niet betrekking heeft op de hele ruimte- of tijdschaal van het probleem maar op de kleinste schalen die nog expliciet

behandeld worden. Het gemiddelde is dus zelf een functie van de tijd en de ruimtelijke coördinaten.

Het gemiddelde van de afwijking ξ' is gelijk aan nul. Verder kan het gemiddelde ten opzichte van de afwijking als constant worden beschouwd omdat de relatieve variatie klein is. We hebben daarom de volgende regels

$$\overline{\xi'} = 0, \overline{\xi' \xi'} = 0. \quad (14.3)$$

Daaruit volgt voor het produkt van twee grootheden

$$\overline{uv} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'}. \quad (14.4)$$

We passen het bovenstaande nu toe op de materiële afgeleide van de willekeurige functie als gegeven in (4.6), namelijk

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \xi) + \nabla \cdot (\rho \xi \mathbf{v}). \quad (14.5)$$

Eenvoudigheidshalve nemen we aan dat de dichtheidsvariëaties gering zijn vergeleken bij de variaties in de grootheden ξ en V . We vinden dan

$$\overline{\rho \frac{d\xi}{dt}} = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \xi}) + \nabla \cdot (\overline{\rho \xi \mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\overline{\rho \xi' \mathbf{v}'}) . \quad (14.6)$$

De gemiddelde continuïteitsvergelijking is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (14.7)$$

Door (14.7) in (14.6) te substitueren vinden we

$$\overline{\rho \frac{d\xi}{dt}} = \rho \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\xi} \right) + \nabla \cdot (\overline{\rho \xi' \mathbf{v}'}) . \quad (14.8)$$

In deze vergelijking is de laatste term de bijdrage van de turbulente beweging tot de totale verandering van de gemiddelde grootte.

Als dezelfde procedure gevolgd wordt voor de bewegingsvergelijkingen leveren de convectieve versnellings termen natuurlijk termen van dezelfde vorm als de laatste term van (14.8). Nu blijkt dat deze termen op min of meer dezelfde wijze in de bewegingsvergelijkingen voorkomen als de visceuse wrijvingstermen die uitvoerig besproken worden in het college Stromingsleer en transportverschijnselen. Zij worden daarom turbulente spanningen of wervelspanningen (eddy stresses) genoemd of ook wel Reynolds-spanningen. De vergelijkingen heten de Reynoldsvergelijkingen.

Nabij een horizontaal oppervlak verwacht men dat de verticale gradienten van de stroming veel groter zijn dan de horizontale gradienten. In zo'n grenslaag zijn dus vooral de volgende termen van belang

$$\tau_x = -\overline{\rho u'w'}, \quad \tau_y = -\overline{\rho v'w'}. \quad (14.9)$$

Dit zijn de componenten van de turbulente schuifspanning tussen twee boven elkaar gelegen vloeistoflagen. Het negatieve teken zal verklaard worden onder (14.11).

14.3 Gradienthypothese

De volgende stap in de beschrijving van de stroming in een turbulent medium is om de turbulentietermen in de vergelijkingen uit te drukken als functies van de gemiddelde waarden. Dit staat bekend als het sluitingsprobleem ("closure problem"). De klassieke oplossing van dit probleem is gebaseerd op de overeenkomsten tussen de turbulente wrijving en de moleculaire viscositeit. Men stelt dan dat het turbulente transport evenredig is met de gradient van de gemiddelde waarde. Bijvoorbeeld voor de verticale component van het turbulente transport in (14.8) schrijft men

$$\overline{\rho \xi' w'} = -\rho \kappa \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} \quad (14.10)$$

waar κ een turbulente diffusiviteit ("eddy diffusivity") voorstelt. Het negatieve teken is een gevolg van het feit dat een positieve gradient een transport in de negatieve richting geeft.

Eveneens schrijft men (14.9) in de vorm

$$\tau_x = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \tau_y = \rho \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (14.11)$$

waar ν de turbulente viscositeit ("eddy viscosity") voorstelt analoog aan de kinematische viscositeit gebruikt in (14.1). Het teken is zo gekozen dat een verticale toename van de horizontale snelheid een positieve schuifspanning veroorzaakt. Dus de schuifspanning tussen twee lagen is de kracht uitgeoefend door de bovenlaag op de onderlaag.

De horizontale componenten van het turbulente transport van materie of impuls worden uitgedrukt in de horizontale gradienten van de overeenkomstige gemiddelde grootheden. In tegenstelling tot de moleculaire coëfficiënten mogen de turbulente diffusiviteit en viscositeit in het algemeen niet gelijk gesteld worden in de horizontale en verticale richtingen. De reden is dat de wervels (eddies) niet symmetrisch zijn en daarom resulteren in ongelijke menging in verschillende richtingen.

Tenslotte zij nog vermeld dat volgens het voorgaande de materiële verandering van een grootheid in een turbulent medium blijkbaar niet alleen bestaat uit de lokale verandering en de advectione bijdrage (zoals besproken in hoofdstuk 2) maar daarenboven uit een bijdrage van de turbulente diffusie. Men spreekt daarom vaak van advection-diffusie vergelijkingen. Omdat de bewegingsvergelijkingen ook van dezelfde algemene vorm zijn als (14.8) zal het duidelijk zijn dat de oplossing van dit soort vergelijkingen één van de hoofdproblemen is in de geofysische stromingsleer. Hierbij zij echter wel vermeld dat de hier gebruikte gradienthypothese vele tekortkomingen vertoont en dat moderne theorieën een betere beschrijving van de turbulente processen proberen te geven.

14.4 Menglengte

In de klassieke turbulentietheorie wordt de overeenkomst tussen moleculaire diffusie en turbulente menging (mixing) nog verder benut om een zogenaamde menglengte in te voeren. Dit is de gemiddelde afstand waarover een individuele wervel wordt verondersteld de gemiddelde waarde van een grootheid te transporteren. Bij wijze van voorbeeld beschouwen we het verticale turbulente transport in een medium waarin de gemiddelde grootheden verticale gradienten vertonen. Om de gedachte te bepalen worden de gradienten positief verondersteld.

Neem aan dat een wervel de gemiddelde waarde van niveau $z + \zeta$ naar niveau z transporteert, dan veroorzaakt de wervel op dit laatste niveau een storing

$$\xi' = \overline{\xi(z+\zeta)} - \overline{\xi(z)} = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial z} \zeta . \quad (14.12)$$

Substitutie in (14.10) geeft

$$\overline{\rho \xi' w'} = -\overline{\rho w' \zeta} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial z} = -\rho \kappa \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial z} , \quad (14.13)$$

zodat de diffusiecoëfficiënt wordt bepaald door de menglengte. Men ziet hier ook weer dat het negatieve teken noodzakelijk is omdat een positieve verplaatsing ζ gepaard gaat met een negatieve turbulente beweging w' en omgekeerd.

Als aangenomen wordt dat nabij een grensvlak de verticale en horizontale turbulente storingscomponenten w' en v' van dezelfde grootte-orde zijn dan geldt volgens (14.12)

$$w' = -v' = -\zeta \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} . \quad (14.14)$$

Het negatieve teken wordt hier verklaard uit het feit dat een positieve ζ d.w.z. een negatieve w' , een positieve storing u' teweeg brengt. Substitutie in (14.9) geeft

$$\tau_x = -\overline{\rho w' \zeta} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \rho \overline{\zeta^2} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 , \quad (14.15)$$

waar $l^2 = \overline{\zeta^2}$, d.w.z. l is de gemiddelde menglengte ("mixing length").

Vergelijking van (7.15) met (7.11) leidt tot de volgende uitdrukking voor de turbulente viscositeit

$$\nu = l^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} . \quad (14.16)$$

Het probleem is dus om de menglengte te bepalen. Deze menglengte is afhankelijk van de geometrie van de stroming omdat turbulentie geen vloeistofeigenschap maar een stromingseigenschap is. Dit wordt in het volgende hoofdstuk besproken.

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton en Pedlosky.

15

GRENSLAGEN

15.1 Oppervlaktelaag

In dit hoofdstuk wordt verondersteld dat alle grootheden gemiddeld zijn volgens de methode besproken in hoofdstuk 14.

In de nabijheid van een grensvlak, b.v. in de onderste 10-50 m van de atmosfeer, mag de schuifspanning (14.11) constant verondersteld worden

$$\tau_h = \rho v \frac{\partial v}{\partial z} = \text{constant} . \quad (15.1)$$

De laag waarin deze benadering geldig is wordt de oppervlaktelaag of constante-flux-laag genoemd. Omdat (15.1) betekent dat de richting van de horizontale stroming ook onafhankelijk is van de verticale coördinaat, kiezen we ons coördinatenstelsel zo dat de x -as samenvalt met de schuifspanning aan het grensvlak. We definiëren nu

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} . \quad (15.2)$$

Deze parameter heeft de dimensies van een snelheid en wordt de wrijvingssnelheid genoemd. Substitutie van (14.15) in (15.2) geeft

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{l} . \quad (15.3)$$

waar de teller volgens (15.1) onafhankelijk is van de verticale coördinaat binnen de oppervlaktelaag. Het verticale stromingsprofiel kan dus eenvoudig verkregen worden als de verticale variatie van de menglengte l bekend is. Waarnemingen tonen aan dat dit afhangt van de statische stabiliteit, d.w.z. van de verticale potentiële temperatuurgradient.

Voor een neutrale grenslaag neemt men aan dat de menglengte lineair toeneemt met de afstand tot het grensvlak, m.a.w. $l = kz$ waar k bekend staat als de Von Karman-constante en bij benadering gelijk is aan 0,35 - 0,40. Integratie van (15.3) geeft dan

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} . \quad (15.4)$$

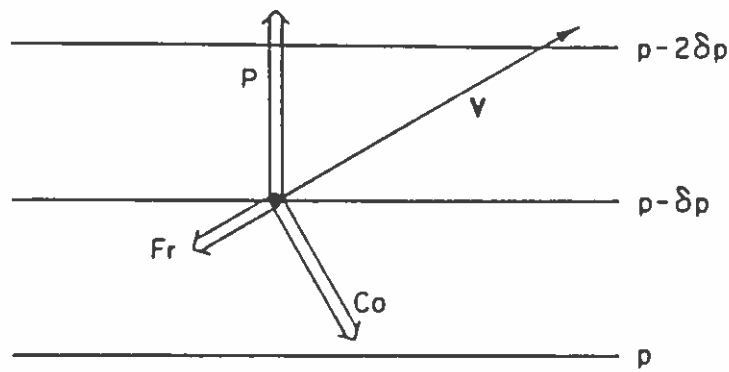
De integratieconstante z_0 is het niveau waar de snelheid gelijk wordt aan nul, dus $u = 0$ voor $z = z_0$. Deze constante staat bekend als de ruwheidsparameter (roughness parameter) en de waarde hangt natuurlijk af van het karakter van het grensvlak. De oplossing (15.4) staat bekend als het logaritmisch profiel.

Het zal duidelijk zijn dat de turbulente viscositeit in de oppervlaktelaag volgens (14.16) en (15.3) gelijk is aan

$$\nu = l u_* = k u_* z \quad (15.5)$$

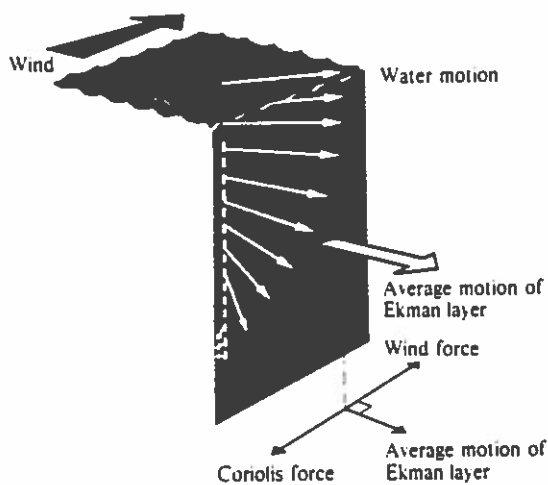
en dus lineair toeneemt met de afstand tot het grensvlak.

Voor een stabiele of onstabiele grenslaag wijkt het snelheidsprofiel af van (8.4). In het stabiele geval vertoont het profiel een min of meer uniforme toename van de snelheid met de afstand tot het grensvlak. In het onstabiele geval daarentegen is de



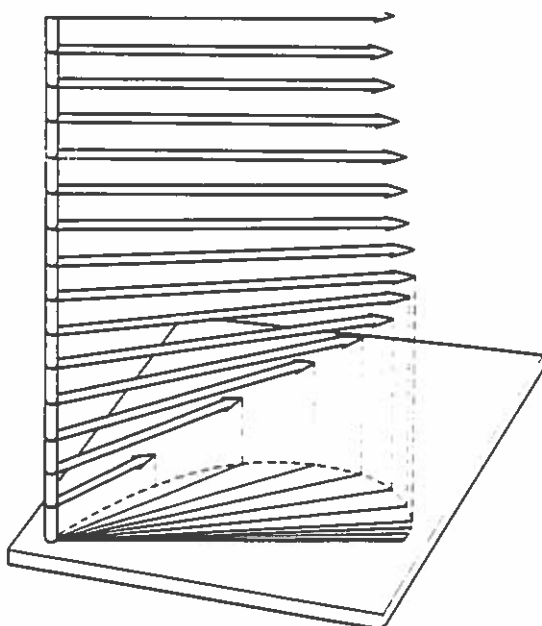
Balance of forces in the Ekman layer. P designates the pressure gradient force, Co the Coriolis force, Fr the frictional force.

Figuur 15.1. (uit Holton, 1979).



Motions in the upper ocean resulting from wind-stress on the water surface. The Ekman layer is the body of water set in motion by wind-action.

Figuur 15.2.



Current vectors near the sea-bed (after Ekman, 1905).

Figuur 15.3.

snelheid in de grenslaag nagenoeg gelijk aan de buitenstroom behalve in een dun laagje vlak bij het oppervlak waar de snelheid naar nul moet gaan.

15.2 Ekmanlaag

In de bovengenoemde oppervlaktelaag is de schuifspanning constant omdat de wrijvingskrachten zoveel groter zijn dan de andere termen in de bewegingsvergelijkingen dat de wrijving uitgeoefend op de bovenkant van een laag gebalanceerd moet worden door de wrijving aan de onderkant. Als men zich verder van het grensvlak af beweegt neemt de relatieve grootte van de wrijvingskracht af en vindt er een evenwicht plaats tussen de drukkracht, de Corioliskracht en de wrijving (zie figuur 15.1). In deze zogenaamde Ekmanlaag wordt niet de schuifspanning maar worden de horizontale drukgradient en de dichtheid als constanten beschouwd.

Wij schrijven de bewegingsvergelijkingen (3.15) (3.16) in de Reynoldsvorm analoog aan (14.8) en schrijven de verticale componenten in de vorm (14.9). We beperken ons tot het stationaire geval ($\partial/\partial t=0$) en tot verticale variaties ($\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$). Het eindimensionale stelsel vergelijkingen wordt dan

$$-fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad (15.6)$$

$$fu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z}. \quad (15.7)$$

De drukgradienten kunnen volgens (6.11) uitgedrukt worden in de geostrofische stroming, terwijl de schuifspanningen volgens (14.11) uitgedrukt worden in verticale gradienten van de stroming

$$fv = f v_g - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad fu = f u_g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (15.8)$$

De turbulente viscositeit is hier eenvoudigheidshalve constant verondersteld.

De Ekmanvergelijkingen (15.8) worden gewoonlijk opgelost door de complexe stroomsnelheid in te voeren als volgt

$$\tilde{v} = u + iv \quad (15.9)$$

waar $i=\sqrt{-1}$. Omdat de geostrofische stroming onafhankelijk van de verticaal verondersteld is, kan het stelsel (15.8) geschreven worden als

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\tilde{v} - \tilde{v}_g) = \frac{if}{\nu} (\tilde{v} - \tilde{v}_g). \quad (15.10)$$

Gebruik makend van het feit dat $2i=(1+i)^2$ vinden we de algemene oplossing

$$\tilde{v} - \tilde{v}_g = C \exp[\pm(1+i)\zeta] \quad (15.11)$$

waar we gedefinieerd hebben $\zeta=z\sqrt{(f/2\nu)}$ en waar de integratieconstante bepaald moet worden uit de randvoorwaarden. Het zal duidelijk zijn dat $\sqrt{(2\nu/f)}$ een karakteristieke schaalhoogte is voor de grenslaag.

15.3 Ekmanspiraal

Twee belangrijke oplossingen van het Ekman probleem zullen nu beschouwd worden. De eerste betreft de stroming in de bovenlaag van de zee onder invloed van de wind. In dat geval neemt men aan dat de schuifspanning aan het oppervlak

bepaald wordt door de wind, zodat de randvoorwaarde aan het oppervlak $z = 0$ volgens (14.11) gelijk is aan

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tilde{v} - \tilde{v}_g) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \frac{\tilde{\tau}_0}{\rho \nu} \text{ voor } z=0, \quad (15.12)$$

waar $\tilde{\tau}_0$ de complexe schuifspanning is. Met toenemende diepte moet de door de wind veroorzaakte afwijking van de geostrofische stroming natuurlijk afnemen, hetgeen leidt tot de tweede randvoorwaarde

$$\tilde{v} - \tilde{v}_g \rightarrow 0 \text{ voor } z \rightarrow \infty. \quad (15.13)$$

Volgens de laatste randvoorwaarde moeten we in (15.11) het plusteken kiezen, terwijl de eerste voorwaarde de constante C bepaalt, namelijk

$$C = \frac{(1-i)\tilde{\tau}_0}{\rho \sqrt{2\nu f}}. \quad (15.14)$$

Om de gedachte te bepalen kan men de wind langs de y -as kiezen, dus $\tilde{\tau}_0 = i\tau_y$. In dat geval

$$C = \frac{(1+i)\tau_y}{\rho \sqrt{2\nu f}} = \frac{\tau_y}{\rho \sqrt{\nu f}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \quad (15.15)$$

en de componenten van (15.11) worden

$$u - u_g = \frac{\tau_y}{\rho \sqrt{\nu f}} \exp(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right), \quad v - v_g = \frac{\tau_y}{\rho \sqrt{\nu f}} \exp(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right). \quad (15.16)$$

Dit stroomprofiel wordt de Ekmanspiraal genoemd. De oplossing neemt exponentieel af met de afstand tot het grensvlak $z=0$, terwijl de snelheidsvector meer en meer naar rechts draait. Aan het oppervlak is de stroming 45° naar rechts gericht ten opzichte van de windrichting (op het noordelijk halfrond) (zie figuur 15.2).

De tweede oplossing van het Ekman-probleem heeft betrekking op de grenslaag boven een vast oppervlak zoals de wrijvingslaag in de atmosfeer boven de oppervlaktelaag of de grenslaag langs de zeebodem. In dat geval zijn de randvoorwaarden (bij verwaarlozing van de oppervlaktelaag)

$$\tilde{v} = 0 \text{ voor } z=0, \quad \tilde{v} - \tilde{v}_g \rightarrow 0 \text{ voor } z \rightarrow \infty. \quad (15.17)$$

De eerste voorwaarde kan ook geschreven worden $\tilde{v} + \tilde{v}_g = -\tilde{v}_g$ voor $z=0$, hetgeen betekent dat de afwijking van de geostrofische stroming juist de geostrofische stroming zelf moet opheffen om de totale snelheid aan het oppervlak tot nul te reduceren. Hieruit volgt de oplossing

$$\tilde{v} - \tilde{v}_g = -\tilde{v}_g \exp[-(1+i)\zeta], \quad (15.18)$$

met de componenten

$$u - u_g = -\exp(-\zeta)(u_g \cos \zeta + v_g \sin \zeta), \quad v - v_g = \exp(-\zeta)(u_g \sin \zeta - v_g \cos \zeta). \quad (15.19)$$

Volgens (14.11) zal dit leiden tot een bodemwrijving met componenten

$$\tau_{bx} = \rho \sqrt{\frac{\nu f}{2}} (u_g - v_g), \quad \tau_{by} = \rho \sqrt{\frac{\nu f}{2}} (u_g + v_g). \quad (15.20)$$

dus de bodemwrijving is 45° naar links gericht ten opzichte van de geostrofische stroming op het noordelijk halfrond (zie figuur 15.3).

15.4 Ekmanzuiging

Van groot belang is het totale massatransport in de Ekmanlaag. Dit wordt verkregen door de oplossingen (15.16) - (15.19) te integreren van het grensvlak tot het niveau waar de afwijking van de geostrofische stroom naar nul gaat, d.w.z. van $z=0$ tot $z=\pm\infty$. In plaats van de oplossingen te integreren is het in feite eenvoudiger de Ekman vergelijkingen (15.8) direct te integreren tussen het grensvlak, waar de verticale snelheidsgradient kan uitgedrukt worden in de schuifspanning volgens (14.11), en het niveau $z=\pm\infty$ waar de verticale snelheidsgradient naar nul gaat. Dus voor het eerste Ekmanprobleem geeft (15.8) met randvoorwaarden (15.12) en (15.13)

$$U = \int_{-\infty}^0 (u - u_g) dz = \frac{\tau_y}{\rho f}, \quad V = \int_{-\infty}^0 (v - v_g) dz = \frac{-\tau_x}{\rho f}. \quad (15.21)$$

Het grenslaagtransport is blijkbaar loodrecht op de windrichting (naar rechts op het noordelijk halfrond).

Het voorgaande heeft interessante consequenties met betrekking tot de verticale snelheidscomponent aan de rand van de grenslaag, in dit geval dus aan de onderkant ($z \rightarrow -\infty$). Aangezien deze snelheidscomponent moet verdwijnen aan het oppervlak in het hier beschouwde stationaire geval, volgt uit de continuïteitsvergelijking (5.3) dat aan de onderkant van de grenslaag moet gelden

$$w = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (15.22)$$

waar U en V gedefinieerd zijn in (15.21) en waar variaties van de Coriolisparameter in de geostrofische stroming (6.11) buiten beschouwing zijn gelaten. Blijkbaar wordt het medium aan de onderkant van de Ekmanlaag omhoog gezogen tengevolge van de divergentie van het Ekmantransport. Dit laatste kan weer uitgedrukt worden in de schuifspanning aan het oppervlak met behulp van (15.21).

$$w = \frac{1}{\rho f} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right). \quad (15.23)$$

Hieruit blijkt dat de Ekmanzuiging evenredig is met de "vorticeit van de schuifspanning".

Voor het tweede Ekmanprobleem met randvoorwaarden (15.17) vindt men voor de zuiging aan de top van de laag ($z \rightarrow +\infty$) dezelfde uitdrukking (15.23) maar daarin stelt de schuifspanning dan de wrijving aan de bodem voor. Als men deze schuifspanning elimineert met behulp van (15.20) vindt men voor de top van de bodem-Ekmanlaag

$$w = \sqrt{\frac{V}{2f}} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right). \quad (15.24)$$

Hier is de Ekmanzuiging evenredig met de vorticeit van de geostrofische stroming. Terwijl de geostrofische stroming zelf volgens (6.11) divergentievrij is in de horizontaal (afgezien van variaties in f) zal de bodemwrijving dus toch tot horizontale divergentie en verticale bewegingen kunnen leiden. Bijvoorbeeld in een gebied van lage druk zal het rechterlid van (15.24) positief zijn en de wrijving veroorzaakt een opwaartse beweging aan de top van de grenslaag. In de hogere lagen zal deze vloeistofmassa uit het lagedrukgebied weg moeten stromen hetgeen

tot horizontale divergentie leidt. Volgens (8.18) leidt dit tot een afname van de vorticeit. Op deze wijze wordt de wrijving buiten de grenslaag waargenomen.

OPGAVE 15.1: Bereken de karakteristieke diepte van de Ekmanlaag in een roterende tank gevuld met water tot een hoogte van 30 cm. De stroming van het water is laminair (moleculaire kinematische viscositeit, $\nu=0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$) en de hoeksnelheid waarmee de tank als geheel draait is 10 omwentelingen per minuut.

Opgave 15.2: Wat is de waarde van de turbulente viscositeitscoefficient in een turbulente Ekmanlaag in de atmosfeer met een karakteristieke diepte van 1000 m?

LITERATUUR BIJ DIT HOOFDSTUK: Holton en Pedlosky.

Appendix-A

De vergelijking,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + r(y) \phi = 0 , \quad (\text{A.1})$$

is hetzelfde als

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} + (q(y))^2 \phi^* = 0 , \quad (\text{A.2})$$

waarin

$$\phi^* = \phi \exp \left[\frac{1}{2} \int f(y) dy \right] , \quad (\text{A.3})$$

en

$$q^2 = r - \frac{1}{4} f^2 - \frac{1}{2} \frac{df}{dy} . \quad (\text{A.4})$$

Referenties

Dietrich, G., K. Kalle, W. Krauss and G. Siedler, 1975, 1980: General Oceanography. An introduction. Second edition. J. Wiley and Sons. 626 pp.

Hess, S.L., 1959: Introduction to theoretical meteorology. Henry Holt and Company, New York, 362.

Kurz, M., 1990: Synoptische Meteorologie. Leitfäden für die Ausbildung im Deutschen Wetterdienst. Offenbach am Main.

Palmén, E., and C.W. Newton, 1969: Atmospheric Circulation Systems. Academic Press. 603 pp.

Stull, R.B., 1988: An introduction to boundary layer meteorology. Kluwer Academic Publishers, 666 pp.