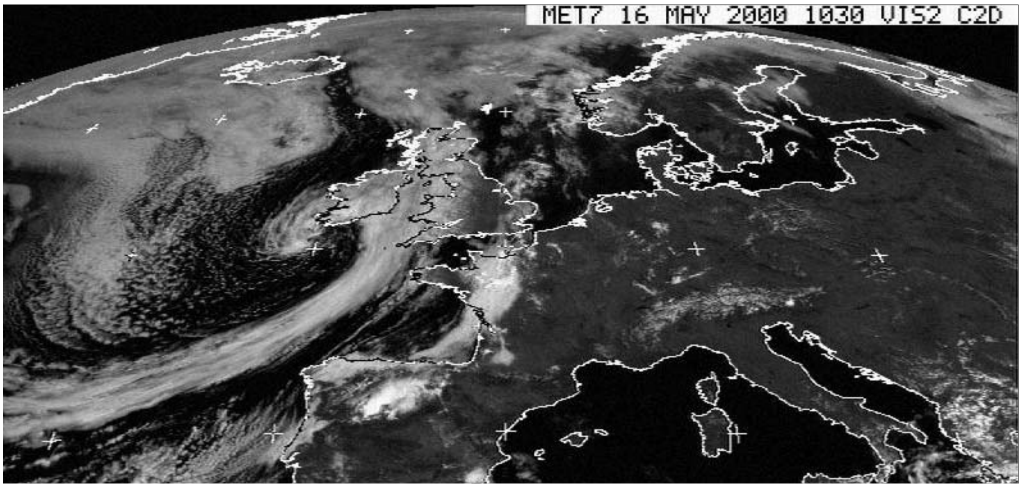
§ 1 Niets veranderlijker dan het weer

Van alles om ons heen verandert: je kledingmaat, de gemiddelde lengte van de Nederlander, het aantal levende diersoorten, de hoogte van de zeespiegel en natuurlijk het weer van dag tot dag. Bij veranderingen is het vaak handig en soms zelfs van wezenlijk belang om verandering te kunnen voorspellen.
Bij voorspellingen van het weer wordt gebruik gemaakt van het weer van vandaag. Men begint dan met een beschrijving van het weer in Europa. Voor dergelijke beschrijvingen worden satellietfoto's gebruikt. Met satellietfoto's is bijvoorbeeld direct te zien waar het in Europa bewolkt is en hoe de wolken bewegen.

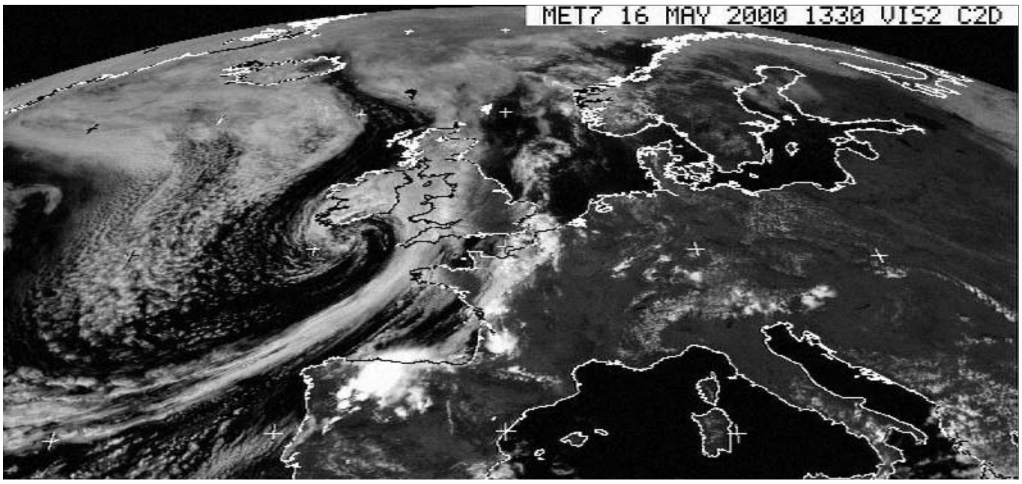
1 Op 16 mei 2000 om 10:30 uur zag de hemel boven Europa er zo uit:



Die dag wilde een groepje skaters 's avonds een tochtje ten noorden van Utrecht maken. Zoals je ziet is het om 10:30 uur in Nederland zonnig.

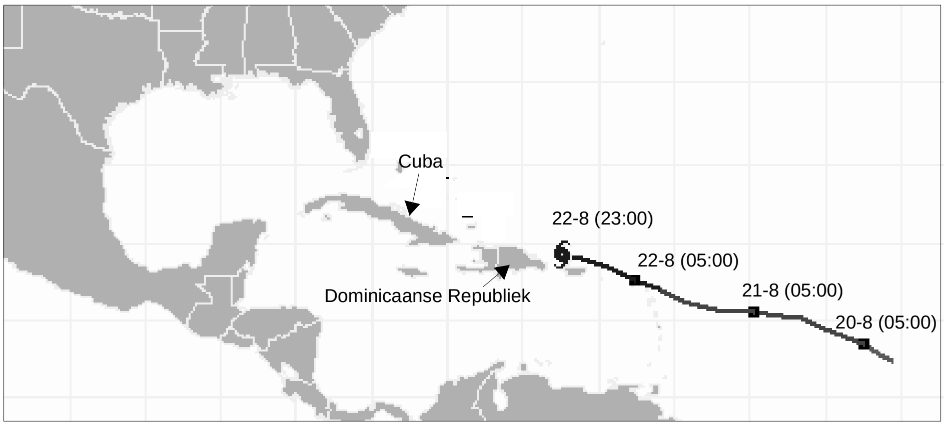
a. Heb je met deze foto voldoende zekerheid dat het die avond ook droog is? Zo ja, waarom? Zo nee, welke informatie zou je dan nog nodig hebben om met meer zekerheid te kunnen voorspellen?

b. Hieronder zie je de situatie aan het begin van die middag. De witte vlekken boven het westen van België blijken regen- en onweersbuien te zijn. Wat denk je, kan de skate-tocht nog doorgaan?



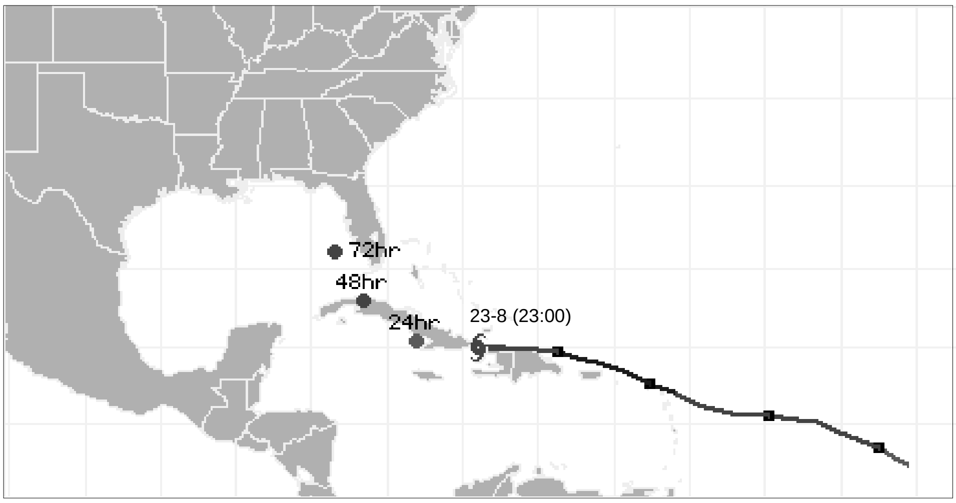
Het volgen van wolken met opeenvolgende foto's is een middel om voorspellingen te doen. Op de televisie zie je dan hoe een serie foto's als een filmpje wordt afgedraaid. Vervolgens wordt bekeken wat er zou gebeuren als je de bewegingen van de wolken voortzet. Deze methode gebruikt men ook bij voorspellingen over de beweging van orkanen.

2 Op 22 augustus 2000 naderde de orkaan Debby Cuba en de Dominicaanse Republiek. Voor de inwoners was het belangrijk om te weten of en zo ja, wanneer de orkaan hun eiland zou passeren. Men volgde de orkaan op de voet.
Hieronder zie je een kaartje van het Caraibisch gebied met het spoor van Debby. De vierkantjes op het spoor geven de posities van Debbie aan op 20, 21, 22 augustus om 5 uur 's ochtends en de huidige positie, namelijk om 23:00 uur:



a. Teken in het kaartje welke route jij zou voorspellen voor de komende 3 dagen, kortom over 24, 48 en 72 uur.

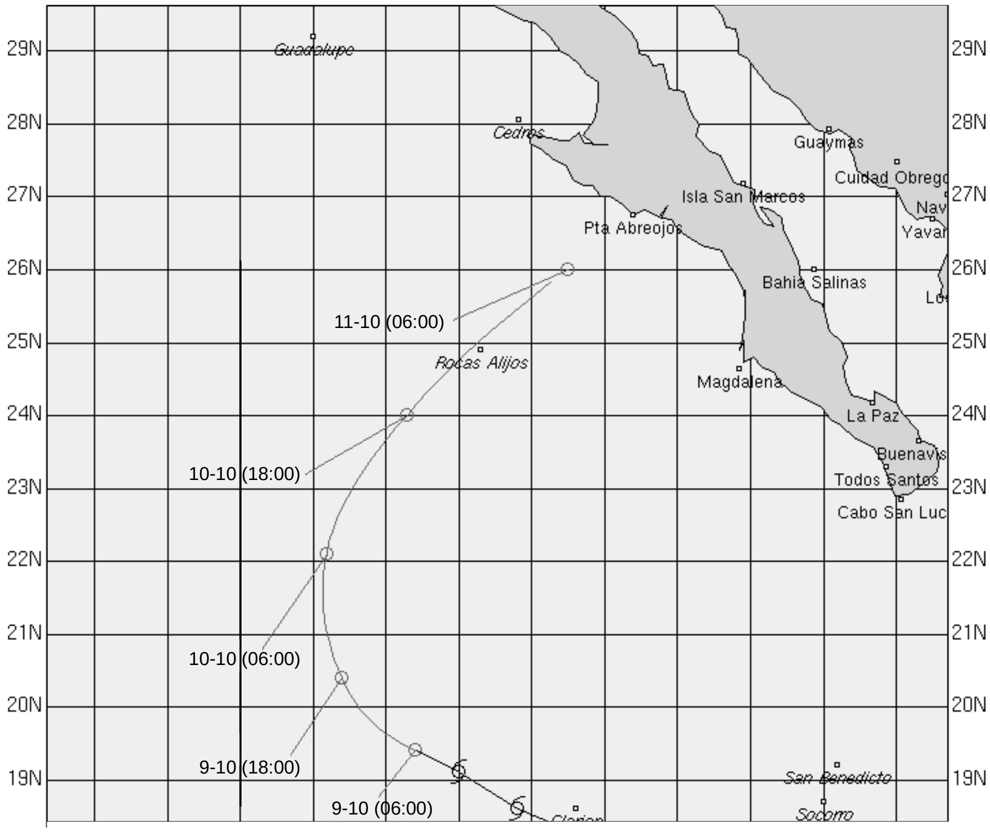
b. Hieronder zie de positie van Debby vierentwintig uur later. Ook zie je de voorspelling van weerkundigen. Welke veronderstellingen denk je dat ze ook maken behalve het voortzetten van de route?



Bij weersvoorspellingen worden positie-metingen gebruikt om veranderingen te beschrijven en om voorspellingen te doen. Daartoe worden posities met vaste tijds-intervallen (bijvoorbeeld iedere 12 uur) met elkaar vergeleken. Naast dergelijke tijdopnamen wordt natuurlijk ook kennis over het weer en orkanen gebruikt bij de voorspellingen. Bijvoorbeeld kennis over de samenhang tussen temperatuur, luchtdruk en wind en over routes van orkanen in het verleden. Maar zolang die kennis nog onvoldoende is om precies te kunnen voorspellen, spelen tijdopnamen een belangrijke rol.

In dit hoofdstuk staat de samenhang tussen plaats- en snelheidsverandering centraal. Een belangrijke vraag is: *In hoeverre is het mogelijk om een voorspelling te doen over de positie van een object op basis van gegevens over zijn beweging*.

3 De orkaan Olivia nadert de westkust van Mexico. De laatste vijf posities van de orkaan zijn in het kaartje vastgelegd op 9, 10 en 11 oktober 2000, afwisselend om 6 uur en 18 uur. Voorspel hoe laat de orkaan het land zal treffen. Beschrijf je werkwijze.



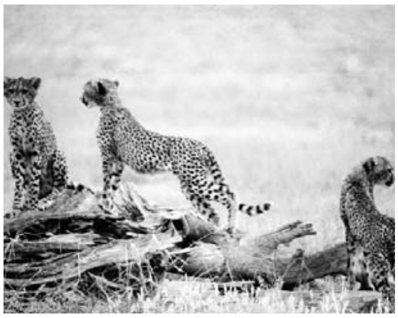
Misschien heb je bij bovenstaande opgaven gebruik gemaakt van een patroon in de verplaatsingen van de storm. Als je zo'n patroon wiskundig kunt beschrijven, dan kun je daarmee voorspellingen doen. De komende lessen ga je proberen om met wiskundige middelen bewegingen te beschrijven in de hoop dat die wiskunde ons in staat stelt om goede voorspellingen te doen.

Het volgende citaat komt uit een wiskundeboek.

> *"Beweging is overal; zonder beweging zou er geen leven bestaan. 'Stillevens' zijn alleen in musea te vinden, niet in het echte leven, want bewegen en veranderen – in wat voor verschijningsvorm dan ook – is de essentie van het leven zelf.*
> *Sommige bewegingen lijken chaotisch, maar vaak is er ook sprake van orde en regelmaat. Zo ontstaan regelmatige patronen, die in principe aan wiskundig onderzoek onderworpen kunnen worden. Maar ieder wiskundig gereedschap is in wezen statisch van aard: getallen, punten, lijnen, vergelijkingen, enzovoort, ze dragen op geen enkele wijze iets van beweging in zich. Als men dus beweging wil onderzoeken, moet men een manier vinden om die statische hulpmiddelen met bewegingspatronen in verband te brengen."*
>
> Uit: Wiskunde - Wetenschap van patronen en structuren, door Keith Devlin.

In de volgende opgave is ook sprake van beweging. Voor het beantwoorden van de vraag kan het helpen om de beweging te beschrijven met een plaatje zoals bij de orkaan.

4 De snelste sprinter ter wereld is de cheetah. Hij kan in 17 seconden op een topsnelheid van meer dan 110 km per uur komen en die volhouden over een afstand van ruim 450 meter. De cheetah wordt echter gauw moe, terwijl een zebra die een topsnelheid van 70 km per uur haalt, over ruim 6 km een snelheid van 50 km per uur kan handhaven.



Wanneer kan een cheetah een rennende zebra nog inhalen? Van een zebra en van een cheetah die start met sprinten zijn de posities om de 5 seconde gemeten. De afstanden (in meters) tussen die posities staan in de tabel hieronder.

cheetah	76	116	133	134	132	100	55	36
zebra	95	97	96	94	95	94	98	96

Bij welke voorsprong van de zebra kan de cheetah de zebra nog inhalen?

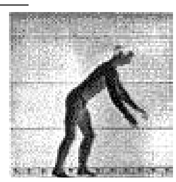
extra Het vergelijken van situaties op verschillende tijdstippen gebeurt niet alleen bij het weer, maar is ook al heel lang een middel om de bewegingen van planeten en hun manen in ons zonnestelsel te beschrijven. De Egyptenaar Ibn Yunus (950-1009) werkte aan een tabel waarmee men precies kon voorspellen wanneer het volle maan zou zijn. Die tabel speelde een belangrijke rol in de Islam bij het bepalen van de ramadan.
Voor die tabel was het nodig om te weten hoe lang de maan doet over een rondje rond de aarde. Je kunt zelf deze werkwijze naspelen.

5 ’s Avonds, maar ook soms overdag, kun je zien dat de maan rond de aarde beweegt. Dat komt door de draaiing van de aarde rond haar as. Net zoals het daardoor lijkt dat de zon dagelijks rond de aarde draait.
Toch kun je ook achterhalen dat de maan echt rond de aarde draait. De tijd die de maan nodig heeft om rond de aarde te draaien kun je berekenen met twee momentopnamen. Maar niet op één dag! Je hebt twee dagen nodig.

Kijk op een bepaald tijdstip waar de maan is. Ga bijvoorbeeld zo staan dat je de maan precies over het topje van een lantaarnpaal ziet en markeer de plek waar je staat.
Ga de volgende dag op hetzelfde tijdstip op dezelfde plek staan en je zult zien dat de maan verplaatst is.

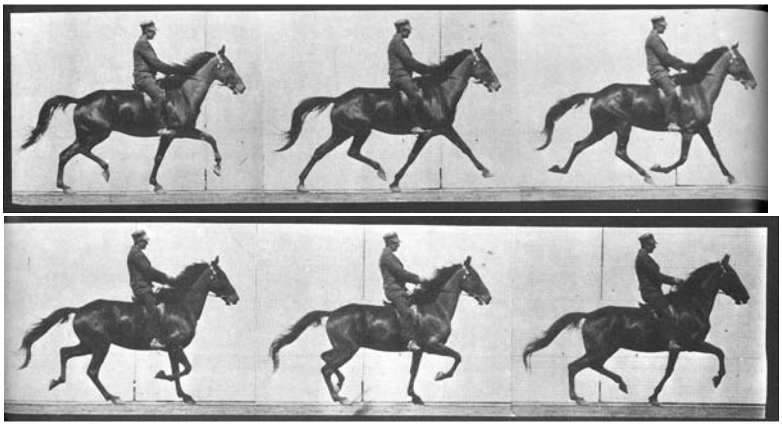
De aarde draait veel sneller rond haar as dan de maan rond de aarde. De maan heeft in 24 uur maar een klein stukje afgelegd en dat stukje zie je nu.

Als je kunt bepalen wat de kijkhoek is tussen het topje van de lantaarnpaal en de maan, dan kun je berekenen hoeveel dagen de maan nodig heeft om een heel rondje (360^o) te draaien. Controleer zo of de maand een goed antwoord is.



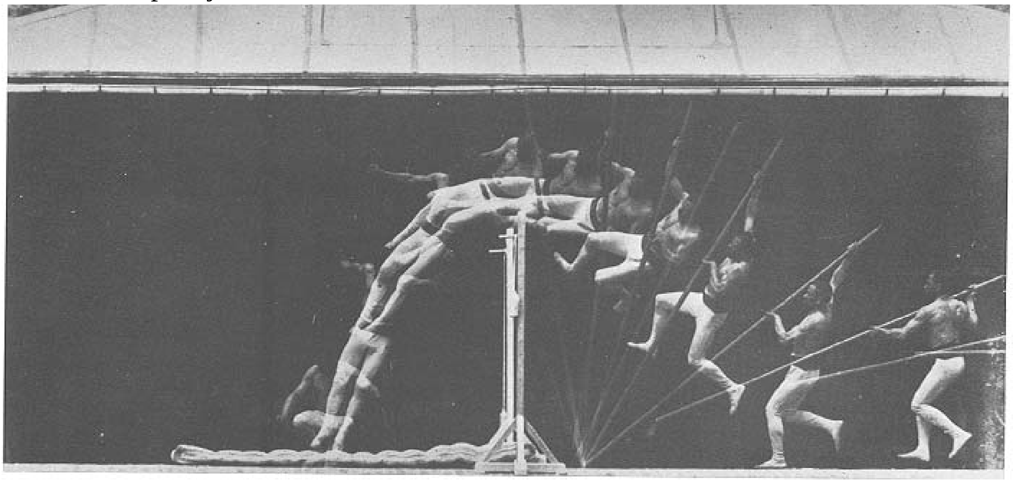
§ 2 Het beschrijven van bewegingen

Een hulpmiddel waarmee men aan het eind van de negentiende eeuw bewegingen onderzocht was een fototoestel.
De fotograaf Muybridge maakte in die tijd series foto's van dieren die bewegen. De volgende serie van een dravend paard maakte hij om aan te tonen dat er een moment is waarop het dravende paard alle vier de benen van de grond heeft.



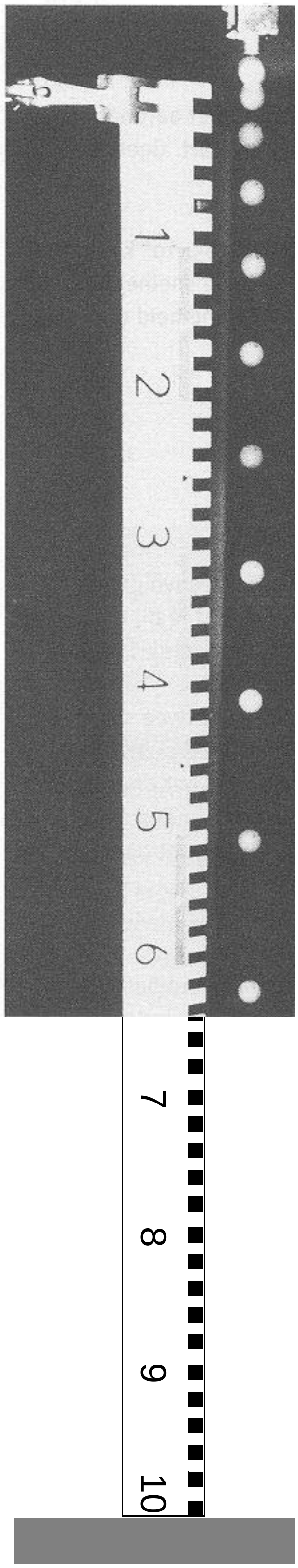
6 In de hoekjes rechtsonder op de oneven bladzijden van dit boekje zie je fotootjes van een mannetje dat een handstand-overslag doet. Als je de hoekjes snel laat ritsen lijkt het of het mannetje echt beweegt. Eén plaatje ontbreekt. Teken zelf dit plaatje zodat de beweging vloeiend verloopt.

Een andere manier waarop men in die tijd probeerde beweging vast te leggen is door de foto's in één plaatje af te drukken:



7 **a.** Hoe zou je zo'n foto kunnen maken?
b. De foto's van deze serie zijn met een vaste regelmaat gemaakt. Is de tijd die de polsstokspringer nodig heeft om op het hoogste punt te komen gelijk aan de tijd die hij nodig heeft om neer te komen?

Je kunt een beweging vastleggen door foto’s te maken. Een manier is om in het donker de lens van het fototoestel te openen en dan met een vaste regelmaat te flitsen. De foto die je dan krijgt worden ook wel een stroboscopische foto genoemd.



8 Hiernaast zie je een stroboscopische foto van een vallend balletje (30 flitsen per seconde). Op de meetlat staat een cm-schaal (de getallen zijn dm).

a. Je ziet dat het balletje steeds sneller valt. Laat met een grafiek zien hoe dat precies gaat.

Stel dat het balletje van 1 meter hoogte boven de grond is losgelaten.

b. Voorspel met behulp van deze foto en je grafiek na hoeveel flitsen het balletje op de grond valt.

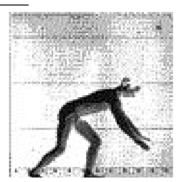
Computerpraktikum Flits

Een hulpmiddel bij het analyseren van stroboscopische foto’s is het programmaatje Flits. Bij de volgende opgaven heb je Flits nodig.

9 Bekijk enkele foto’s (en animaties) met Flits.
Eén van de foto’s is de stroboscopische foto van het **vallende balletje**.

a. Open de foto van het vallende balletje en klik op de achtereenvolgende posities van het balletje.
Wat kun je in de grafiek aflezen?

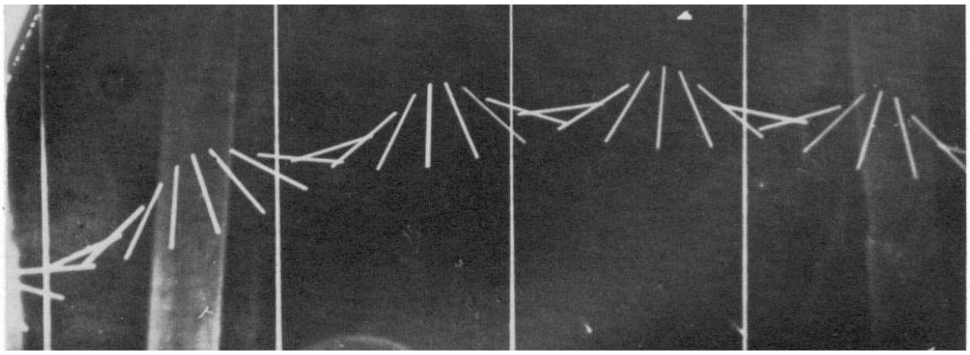
b. Boven de foto zie je ook de knop [Zet voort].
Kun je daarmee je antwoord van opgave 8 controleren? Leg uit waarom wel of waarom niet.



10 Een andere foto is van een **Stok** die wordt weggegooid. Bekijk deze foto met Flits. De vraag is of het midden van de stok meer afstand aflegt dan het uiteinde.

a. Volg eerst het midden van de stok en daarna een uiteinde met een andere kleur. Bekijk de twee grafieken. Hoe verschillen de twee bewegingen?

b. Is de afgelegde weg van het uiteinde langer dan, gelijk aan, of korter dan die van het midden? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.



verplaatsing

De grafiek van Flits met de verplaatsingen tussen twee flitsen laat zien hoe de verplaatsingen toe- en afnemen. Dit heet een *verplaatsingsgrafiek.*

afgelegde weg

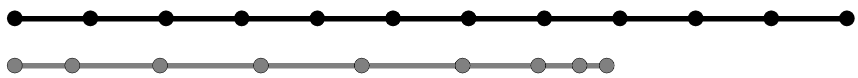
In de som-grafiek van Flits waarbij je de verplaatsingen laat optellen zie je de totale verplaatsing, de afgelegde weg tot dan toe. Dit heet een *grafiek van de afgelegde weg.*

11 Al eerder heb je kennis gemaakt met de cheetah en de zebra. Hieronder zijn de positiemetingen uit opgave 4 vereenvoudigd in een wiskundig plaatje. Je ziet een stippentekening van de twee rennende dieren met hun verplaatsing na iedere 5 seconden. Alsof er een stroboscopische foto is gemaakt.

De cheetah en de zebra

De snelste sprinter ter wereld is de cheetah. Zijn poten zijn korter dan die van een zebra, maar hij kan in 17 seconden op een topsnelheid van meer dan 110 km per uur komen en die volhouden over een afstand van ruim 450 m. De cheetah wordt echter gauw moe, terwijl een zebra die een topsnelheid van 70 km/uur haalt, over ruim 6 km een snelheid van 50 km/uur kan handhaven.

1 cm = 100 m.
stippen na iedere 5 sec.



a. Welke serie hoort bij welk dier?

b. Als ze op hetzelfde moment starten, haalt de cheetah dan de zebra in?

c. Hoe zou je nu kunnen uitvinden bij welke voorsprong een zebra kans op ontsnapping heeft?

12 Deze stippengrafiek kun je ook met Flits bekijken (**Cheetah**).

a. Volg elk van de twee bewegingen met een verschillende kleur. Bekijk de verplaatsingsgrafiek en de grafiek met de afgelegde weg. In welke van de twee grafieken kun je het beste zien of de cheetah de zebra inhaalt? Licht je antwoord toe.

b. Stel de cheetah start 5 seconden later. Kan hij dan de zebra nog inhalen? Verklaar je antwoord.
(Met Flits gaat dit als volgt: voeg opnieuw punten voor de cheetah in, alleen laat hem in het begin wachten, twee kliks op elkaar is een verplaatsing van 0 meter in 5 seconden).

c. Kan de cheetah een voorsprong van de zebra van 100 meter overbruggen?

Als middel voor het beschrijven van bewegingen heb je stroboscopische plaatjes, de verplaatsingsgrafiek en de grafiek van de afgelegde weg gebruikt. Hiermee kun je voorspellingen doen over snelheid en afgelegde weg.

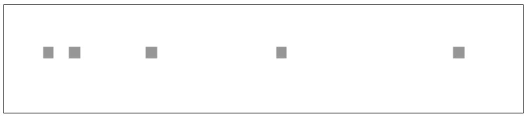
13 Op het scherm kun je drie plaatjes van de beweging zien: de stippengrafiek, de grafiek met de verplaatsingen en de grafiek met de afgelegde weg.

a. Kun je in alle drie de plaatjes zien dat er een moment is dat de cheetah en de zebra even hard rennen?

b. Hoe zou je in de verschillende grafieken zien dat de cheetah stil staat?

14 Bij **3 spiralen** zie je 3 verschillende draaiingen van 5 rondjes. Voorspel met Flits voor ieder van de drie figuren hoever het uiteinde van het centrum zal zijn na het zesde rondje.

15 Bekijk **opgave21**. Je ziet direct dat de snelheid van het object niet constant is.



Door de groene stippen met blauw te volgen kun je een verplaatsingsdiagram en een diagram van de afgelegde weg in beeld krijgen.
Tussen de posities zit telkens 1 seconde.

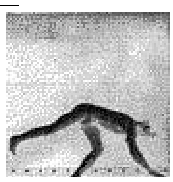
a. Met welke constante snelheid wordt evenveel afgelegd in 4 seconden?

b. Wat betekent eigenlijk een constante snelheid?

Door te klikken op [Zet voort] wordt de beweging voortgezet.

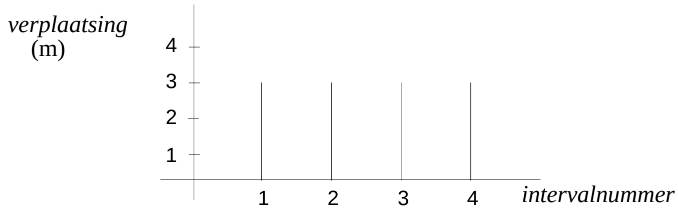
c. Op welke manier wordt de beweging voortgezet? Beschrijf wat je ziet in de verplaatsingsgrafiek en in de grafiek van de afgelegde weg.

Einde computerpraktikum Flits



16 Beschrijf de beweging van een bungee jumper met een verplaatsingsgrafiek en met een grafiek van de afgelegde weg.

17 Bij een beweging met een *constante snelheid* staan in het verplaatsingsdiagram constant dezelfde verplaatsingen voor ieder tijdsinterval.



a. Neem de grafiek over in je schrift en teken ernaast de grafiek van de afgelegde weg.

b. Hoe zie je in de grafiek van de afgelegde weg dat de snelheid constant is?

Stel dat de lengte van ieder tijdsinterval 0.5 seconde is.

c. Bereken de constante snelheid van de beweging.

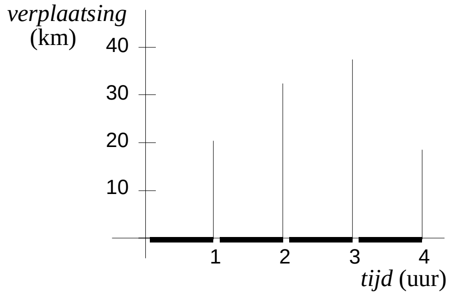
d. Het berekenen van de snelheid kan met het verplaatsingsdiagram en met het diagram van de afgelegde weg. Hoe?

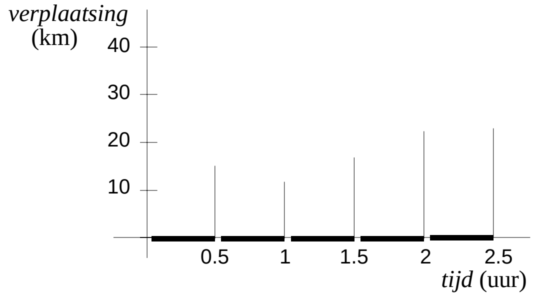
18 Stel dat van de beweging uit de opgave hierboven de posities twee keer zo vaak worden gemeten (na 0.25 seconde). Hoe zien dan het verplaatsingsgrafiek en de grafiek van de afgelegde weg eruit? Teken ze in je schrift met een andere kleur bij de twee grafieken van opgave 17.

tijd-as

Als je twee keer zo vaak meet ligt het voor de hand om de extra verplaatsingen tussen de verplaatsingen van de vorige metingen te tekenen. Eigenlijk gebruik je dan de horizontale as als een *tijd-as*. Voor een grafiek met verplaatsingen is het dan wel nodig om te weten bij welk tijdsinterval een verplaatsing hoort.
Het handige van een tijd-as is dat je metingen met verschillende tijdsintervallen kunt vergelijken.

19 Hieronder zie je twee grafieken met verplaatsingen. In beide grafieken is bij iedere verplaatsingen aangegeven bij welk tijdsinterval die hoort. Bij welke van de twee bewegingen is het meeste afgelegd? En bij welke is het hardst gereden?





differentie
Δ

Voor het aangeven van de lengte van een interval wordt ook wel Δ (delta) gebruikt. Δ is de Griekse letter voor de d van *differentie* (differentie betekent verschil). Zo staat bijvoorbeeld Δt (spreek uit: “delta t”) voor de lengte van een tijdsinterval. Een tijdsinterval van 2 tot 2.5 seconde schrijf je ook wel als [2 , 2.5], en daarvoor geldt dan $\Delta t = 0.5$ sec. Bij opgave 17 is $\Delta t = 0.5$ sec. en bij opgave 18 is $\Delta t = 0.25$ sec.

afgelegde weg: *s* of *x*

Bij natuurkunde wordt voor de afgelegde weg wel de letter s of de letter x gebruikt. Om verwarring met de in de wiskunde meestal horizontale x-as te voorkomen, gebruiken we hier de letter s.

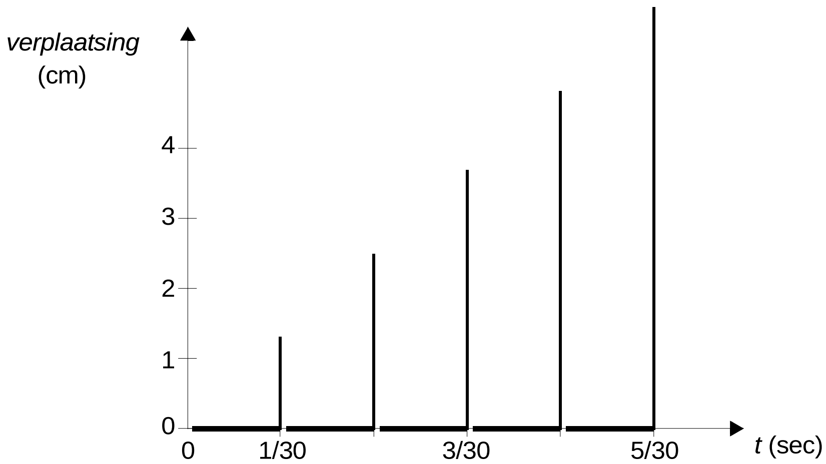
De verplaatsingen geven een beeld van de snelheidsverandering. Bij een constante snelheid zijn de verplaatsingen allemaal even lang. Ze veranderen alleen als je ze met een ander tijdsinterval gaat meten. Zo zijn 3 meter in 0.5 seconde, of 1.5 meter in 0.25 seconde, of 60 meter in 10 seconde, allemaal beschrijvingen van dezelfde constante snelheid: 6 m/sec = $\frac{3}{0.5} = \frac{1.5}{0.25} = \frac{60}{10}$ m/sec.

constante snelheid

Bij een constante snelheid zijn de verplaatsingen Δs constant (in gelijke tijdsintervallen). Een *constante snelheid* v bereken je met $v = \Delta s / \Delta t$. Het maakt niet uit of je dit doet op een klein tijdsinterval ($\Delta t = 0.5$ sec.) of over het totale tijdsinterval ($\Delta t = 4$ sec. bij opgave **17**). De constante snelheid is op ieder interval even groot. Er geldt: hoe kleiner Δt, hoe kleiner Δs.

Maar hoe moet het nu als de snelheid *niet* constant is?

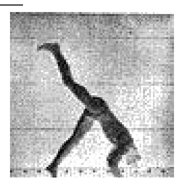
20 Hieronder zie je nog een keer de metingen van het vallende balletje ($\Delta t = 1/30$ sec.). Om aan te geven bij welke tijdsintervallen de verplaatsingen horen zijn die ook vet getekend. Zo zie je dat de tweede verplaatsing hoort bij het tijdsinterval [1/30 , 2/30].



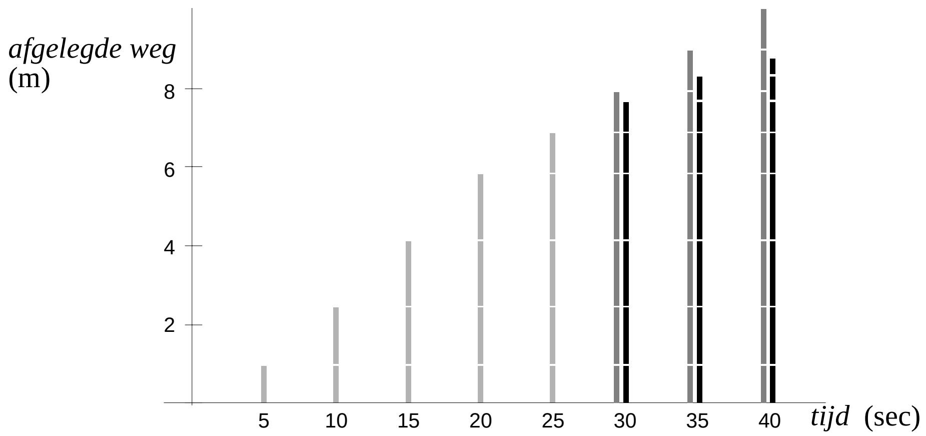
a. Hoe groot is de snelheid van het balletje bij de 3^e^ flits (als $t = 3/30$ sec.)?

b. Met de grafiek kun je beredeneren dat het balletje tussen 0 en 5/30 sec. een snelheid heeft gehad van 100 cm/sec. Terwijl hier geen verplaatsing van 100 cm staat. Zou je die 100 cm wel zien als je iedere seconde de verplaatsing zou meten?
Wat betekent het eigenlijk dat het balletje op een moment een snelheid van 100 cm/sec heeft gehad?

De precieze snelheid op één moment is met deze meetwaarden niet te achterhalen. Je kunt wel iets zeggen over de gemiddelde snelheid in een tijdsinterval.



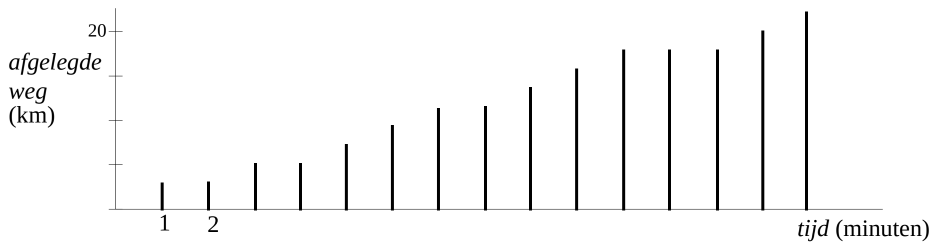
21 Van een dier wordt gedurende 25 seconden om de 5 seconden de afgelegde weg bepaald. Stel dat na 25 seconden de snelheid van het dier niet meer verandert. Hieronder zie je twee mogelijkheden voor het vervolg. Geef voor beide mogelijkheden aan wat er aan de hand is.

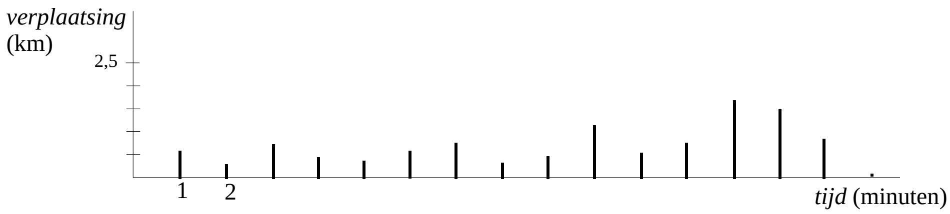


22 Hieronder zie je een diagram van de afgelegde weg en een verplaatsingsdiagram van twee verschillende bewegingen.

a. Hoe kun je zien dat de twee grafieken niet van dezelfde beweging zijn?

b. Bij welke van de twee bewegingen is de gemiddelde snelheid in de 15 minuten het grootst?





gemiddelde snelheid

Een gemiddelde snelheid kun je op twee manieren berekenen. Je kunt de gemiddelde verplaatsing bepalen en daaruit een gemiddelde snelheid berekenen (delen door het tijdsinterval van de verplaatsing). De gemiddelde snelheid kun je ook berekenen door de totale afgelegde weg te delen door het totaal doorlopen tijdsinterval.

In beide gevallen geldt: $v_{gemiddeld} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

De snelheid kan tijdens het interval Δt variëren. Hoe precies? Dat weet je lang niet altijd. Je weet wel dat er evenveel wordt afgelegd als met de berekende gemiddelde snelheid.

23 In de volgende opgaven is de vraag wat de gemiddelde snelheid is.

a. Hoe groot is de gemiddelde snelheid van de cheetah uit opgave 4 in de eerste 25 seconden?

b. Iemand woont 6 km van school. Op een dag staat er veel wind. ’s Ochtends heeft ze wind tegen en doet ze er een half uur over om naar school te fietsen, maar ‘s middags heeft ze wind mee en is ze in 15 minuten thuis. Wat is haar gemiddelde snelheid?
Oplossing 1: heenreis is 12 km/u en terugreis is 24 km/u, het gemiddelde is (12 + 24)/2 = 18 km/u.
Oplossing 2: ze fietst bij elkaar 12 km in 45 minuten: $v_{gemiddeld} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12}{45} =$ 4/15 km/min. = 16 km/u.
Wat is het juiste antwoord?

c. Als je met de auto in Nederland een afstand van meer dan 20 km moet afleggen en je wilt je reistijd berekenen, dan gebruikt men wel eens de vuistregel dat je gemiddeld 80 km per uur rijdt. Hoe zou men daarbij komen?

Terugblik

Deze lessenserie gaat over het beschrijven van bewegingen. Voor deze beschrijvingen gebruiken we wiskundige middelen. Met die middelen kunnen we ook voorspellingen doen. Wat hebben we tot nu toe gevonden? We kunnen metingen doen en vervolgens bewegingen beschrijven met verplaatsingsgrafieken en grafieken van de afgelegde weg.

Door patronen te herkennen in een verplaatsingsgrafiek of in een grafiek van de afgelegde weg kun je een beweging beschrijven en voorspellingen doen. Een eenvoudig patroon is die van constante verplaatsingen.

lineaire grafiek van de afgelegde weg

Als de verplaatsingen *constant* zijn, dan liggen de toppen van de grafiek van de afgelegde weg op een rechte lijn. Tussen de afgelegde weg en de tijd is er dan een lineair verband. Lineariteit is een eigenschap die je al eerder bij wiskunde bent tegengekomen.

De verplaatsingsgrafiek kun je gebruiken om een gemiddelde snelheid op een tijdsinterval uit te rekenen ($\frac{\Delta s}{\Delta t}$). Van de gemiddelde snelheden kun je ook een grafiek maken.

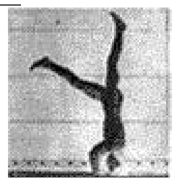
24 Een verplaatsingsgrafiek en een grafiek van gemiddelde snelheden geven allebei informatie over het snelheidsverloop van een beweging.
Er zijn ook verschillen tussen de twee grafieken. Kijk bijvoorbeeld naar de verplaatsingsgrafiek van de constante snelheid bij opgave 17.

a. Teken van die beweging een snelheidsgrafiek.

b. Hoe veranderen beide grafieken als je veel vaker verplaatsingen zou meten, bijvoorbeeld met Δt = 0.01 seconde?

25 Bij de verplaatsingsgrafiek van het vallende balletje van opgave 20 zou je ook een grafiek van gemiddelde snelheden kunnen tekenen. Hoe zou die er uit zien?
Hoe zouden hier beide grafieken veranderen als je veel vaker zou kunnen meten?

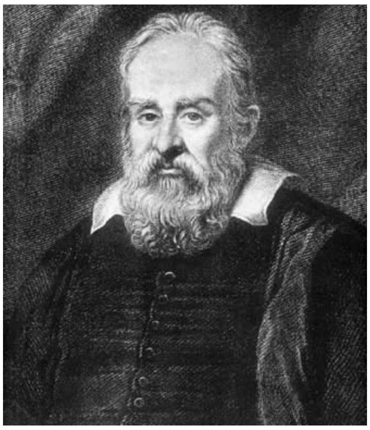
Nog open problemen in het hele verhaal zijn:
– Kun je op grond van positiemetingen bepalen met welke snelheid het balletje op de grond terecht komt?
– Kun je preciezer bepalen wanneer de storm van opgave **3** het land zal treffen?



§ 3 Snelheid en afgelegde weg: Galileï en de valbeweging

Volgens de stroboscopische foto van het vallende balletje lijkt de valbeweging een beweging waarbij de snelheid verandert. De verplaatsingen nemen in het begin gelijkmatig toe. Dit was in de 17e eeuw ook de veronderstelling van Galileo Galileï .

Tot dan geloofde men de ideeën van Aristoteles (ca 350 voor Christus). Hij dacht dat de valbeweging met een constante snelheid verliep en dat zwaardere objecten sneller vallen dan lichtere.



Galileo Galileï (1564-1642)

De Italiaanse geleerde Galileï ontkrachtte vele eeuwen later de stelling van Aristoteles met het volgende gedachtenexperiment:

> *Als een lichtere kogel langzamer zou vallen dan een zwaardere kogel, wat zou er dan gebeuren als je de kogels aan elkaar vast zou maken en dan zou laten vallen? De lichtere kogel ging langzamer dan de zwaardere, en dus moet hij de zwaardere nu iets afremmen. De snelheid van de twee kogels is dus lager dan de snelheid van de zwaardere kogel.*
> *Maar het gewicht van de twee kogels is bij elkaar meer dan het gewicht van de zwaardere, dus volgens Aristoteles zouden ze samen juist sneller moeten vallen.*
> *Dit is met elkaar in tegenspraak, dus Aristoteles heeft ongelijk.*

Aldus Galileï, die niet alleen kritisch was, maar ook creatief. Hij veronderstelde dat de snelheid evenredig met de valtijd toeneemt.

26 Hoe zou je kunnen controleren of dit een goed idee is?

Als de snelheid evenredig toeneemt met de valtijd, dan wil dat zeggen dat er een linear verband bestaat tussen v en t. Tegenwoordig schrijven we dat in formule:

$$v = constante \times t$$

continu model

Als je de constante weet, dan kun je op ieder tijdstip de snelheid berekenen. Dat heet een *continu model* van de valbeweging. De grafiek van de snelheid tegen de tijd is dan een continue, doorlopende grafiek.

Bij deze hypothese lukte het Galileï om met wiskundige redeneringen en experimenten een theorie over valbewegingen te formuleren.
Momentane snelheid kon Galileï echter niet meten (zelfs niet benaderen een behulp van een stroboscopische foto). Het vallen van een kogel ging voor Galileï te snel om op het oog of met behulp van beschikbare instrumenten goed vast te leggen.
Galileï kreeg toen een geniale inval en veronderstelde dat de beweging van een kogel die

van een helling rolt op dezelfde manier verloopt als de vrije val, alleen langzamer. Met zo'n helling kon hij beter experimenteren. Vermoedelijk heeft Galileï een helling gebruikt als in de figuur hieronder:

Een instrument uit de 19e eeuw om experimenten van Galileï te herhalen.

Op de helling zie je 5 kleine boogjes met een belletje. Galileï wilde de boogjes zo plaatsen, dat het rollende balletje een constant ritme laat horen.

27 Als de helling 6 meter lang is, wat is dan jouw voorstel voor de afstanden tussen de vijf boogjes?

Galileï plaatste de boogjes zo, dat de afstanden tussen de boogjes lineair toenemen. Als het balletje dan inderdaad een constant ritme laat horen, betekent dat dat de verplaatsingen van het balletje lineair toenemen in vaste tijdsintervallen. De anekdote is dat Galileï zijn eigen hartslag gebruikte om te testen of het balletje een constant ritme liet horen.
Maar hoe kun je met bovenstaand experiment de veronderstelling van Galileï controleren? Betekent het continue model voor de snelheid $v = constante \times t$ inderdaad dat verplaatsingen lineair toenemen? En omgekeerd: als de verplaatsingen lineair toenemen, weet je dan zeker dat $v = constante \times t$?
In de volgende opgave probeer je met de grafiek van het continue model de verplaatsingen te bepalen.

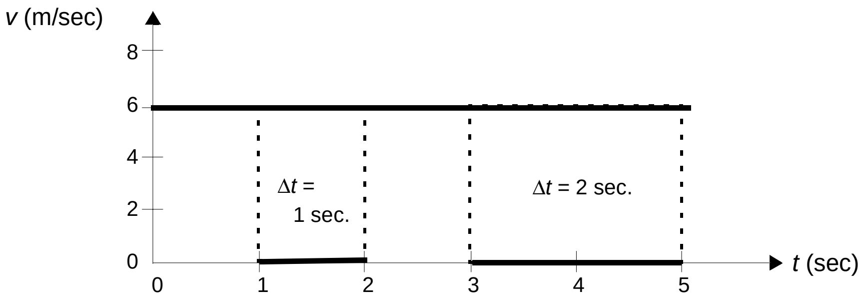
28 Stel dat voor de 'rolbeweging' geldt dat de constante 0.5 is (met tijd in seconden en snelheid in meters per seconde).

a. Teken de v-t-grafiek van deze rolbeweging op het tijdsinterval van 0 tot 5 seconden (op het tijdsinterval [0 , 5]).

b. Kun je een manier bedenken om met de v-t-grafiek te bepalen wat de verplaatsingen in iedere seconde (dus met Δt = 1 sec.) zouden kunnen zijn?

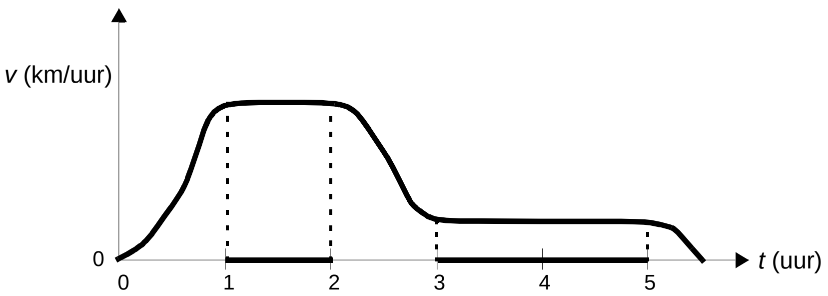
Het lastige is dat de snelheid voortdurend verandert. Om een idee te krijgen hoe we dit probleem kunnen aanpakken gaan we eerst naar een beweging met constante snelheid kijken.

29 In opgave 17 was sprake van een constante snelheid van 6 m/s.
Hieronder zie je een *v*-*t*-grafiek van deze beweging.



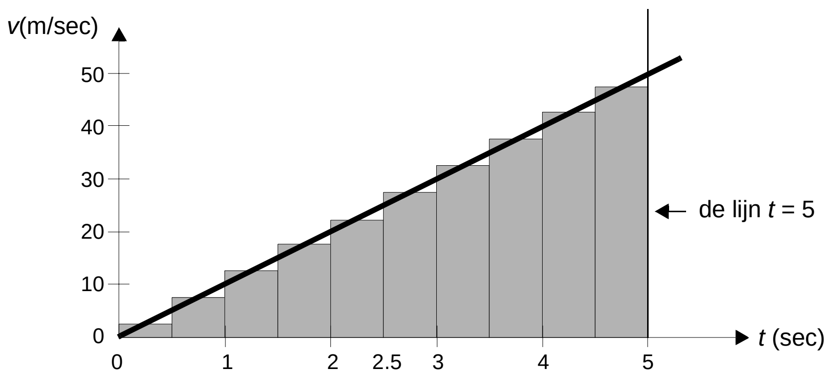
Kun je met de grafiek beredeneren dat de verplaatsing in het eerste interval van 1 tot 2 seconde, de helft is van de verplaatsing in het interval van 3 tot 5 seconde?

30 Hieronder zie je een andere *v*-*t*-grafiek. Is er nu in het eerste interval meer, minder of ongeveer evenveel afgelegd als in het tweede interval?



Galileï heeft met de formule voor de snelheid een formule gevonden om de valweg te berekenen als je de valtijd weet. Voor zijn redenering benadert hij de veranderende snelheid met stukjes continue snelheid.

31 Hieronder staat de grafiek van $v(t) = 10 \cdot t$.
Voor de berekening van de afgelegde weg na 5 seconden is de tijd in 10 intervallen verdeeld (Δt = 0.5 sec.). De snelheid in zo'n interval is constant gekozen en gelijk aan de snelheid op het midden van het interval.



a. Voor iedere 0.5 sec. kun je nu de verplaatsing uitrekenen. Bereken bijvoorbeeld de verplaatsing in het tijdsinterval [2.5 , 3] (van 2.5 tot 3 seconde).

b. Teken de verplaatsingsgrafiek die je krijgt met $\Delta t = 0.5$ sec.
Is dit inderdaad een grafiek met lineair toenemende verplaatsingen?

De oppervlaktemethode

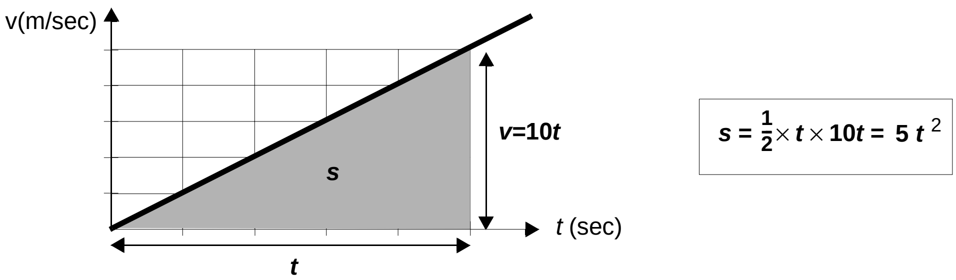
Als je de verplaatsingen optelt krijg je een benadering van de totale afgelegde weg. Die berekening kun je zien als de som van de oppervlakten van de grijze stroken.

c. Verklaar dit.

Als je de tijdsintervallen kleiner maakt, dan wordt die benadering van de afgelegde weg beter.
Hoe smaller de stroken, hoe meer de oppervlakte van de stroken het driehoekige gebied benaderen tussen de schuine grafiek, de t-as en de lijn $t = 5$.

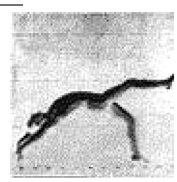
d. Hoe groot is de afgelegde weg dan precies?

Galileï kwam zo op het idee dat de oppervlakte van het gebied ‘onder de snelheidsgrafiek’ precies gelijk is aan de afgelegde weg. Noemen we deze valweg s, dan komt er een mooie formule: $s = 5t^2$. In overeenstemming met deze figuur:

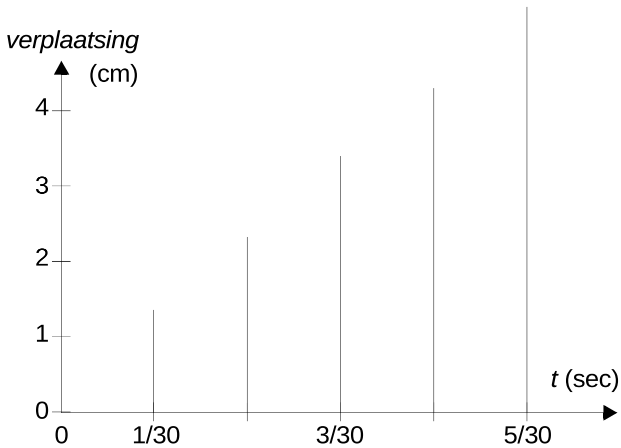


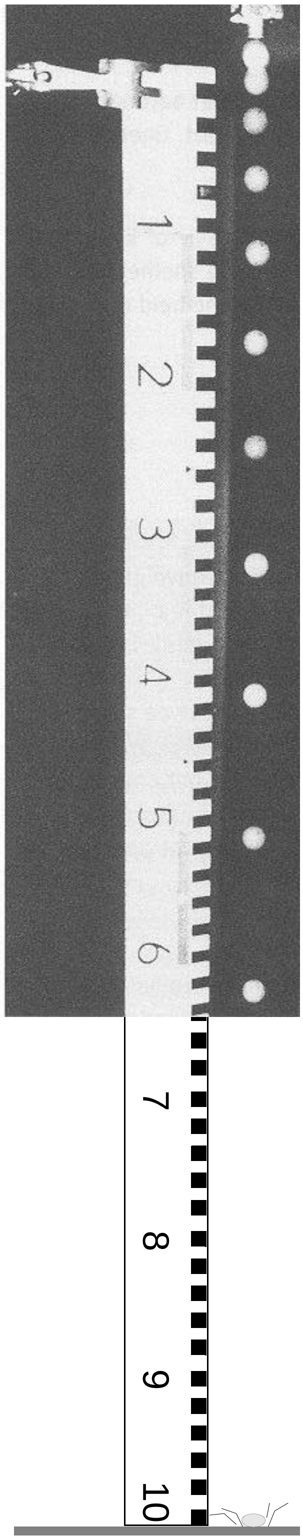
Aristotels dacht dat objecten met een constante snelheid vallen. Een snelheid die afhankelijk is van hun gewicht. Waarom heeft die gedachte zo’n 2000 jaar stand gehouden? Het probleem is dat de formule van Galileï geldt voor vallen *zonder* wrijving. Bij alle valbewegingen die wij om ons heen zien, speelt wrijving wel een rol. Daardoor is meestal snel na het begin van het vallen een constante snelheid bereikt. In omgevingen zonder wrijving (in een vacuum) blijkt inderdaad de formule van Galileï te kloppen en is de toename van de valsnelheid van een veertje hetzelfde als die van een steen.

In het begin van dit boekje stond de opgave van de stroboscopische foto van het vallende balletje. We gaan onderzoeken in hoeverre daarvoor de formule van Galileï te gebruiken is.
Als je van de formule de waarde van de constante c weet, dan kun je ook een verband tussen afgelegde weg en tijd kunt bepalen. Daarmee kun je dan voorspellen wanneer het balletje op de grond valt (na hoeveel tijd het 100 cm gevallen is).



32 Hieronder zie je een deel van de grafiek met verplaatsingen van het vallende balletje.





a. Benader met deze gegevens een snelheid-tijd-grafiek van het vallende balletje. Klopt de hypothese van Galileï?

De formule van Galileï geeft een verband tussen snelheid en tijd: $v = constante \times t$
Als je de constante weet kun je voorspellen wanneer het balletje een snelheid heeft van 5 m/s.

b. Hoe groot is die constante bij het vallende balletje?

c. Bepaal met de oppervlaktemethode de formule voor de afgelegde weg van het vallende balletje.

d. Bereken met de formule het moment waarop het balletje op de grond valt (na 100 cm) en vervolgens met welke snelheid dat dan gebeurt.

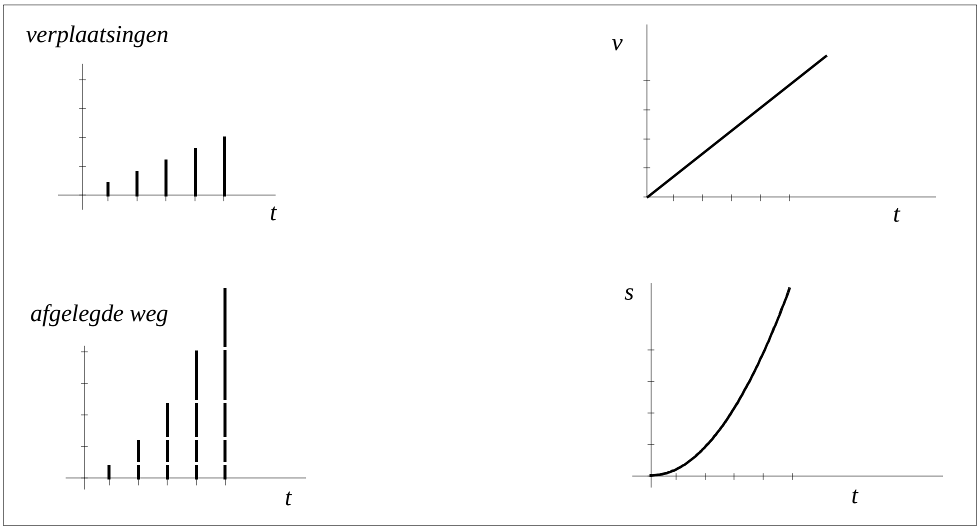
Samenvatting

eenparig versneld

Een beweging waarbij de snelheid continu en gelijkmatig toeneemt, zodat $v = c \times t$, noemt men ook wel *eenparig versneld*.
De valbeweging lijkt eenparig versneld. Uit experimenten blijkt: hoe minder er sprake is van wrijving hoe meer de valbeweging eenparig versneld verloopt.

snelheid en afgelegde weg

In de voorgaande paragrafen is de samenhang tussen verplaatsingen en afgelegde weg beschreven. Met meetwaarden van posities kan je verplaatsingen bepalen. Het optellen van verplaatsingen geeft een beeld van het verloop van de afgelegde weg. Je kan echter niet preciezer voorspellen dan de meetwaarden toelaten.
In deze paragraaf heb je gezien dat een continu model van een beweging een continue grafiek geeft. Daarmee is beredeneerd: *als* de snelheid lineair toeneemt ($v = 10\ t$), *dan* neemt de afgelegde weg kwadratisch toe ($s = 5\ t^2$). Om dit verband te vinden gebruik je de oppervlaktemethode. De wiskunde helpt hier dus om precieze voorspellingen te doen. Of het continue model (bijvoorbeeld $v = 10\ t$) ook precies de beweging weergeeft is een natuurkundige vraag. Daar zul je bij natuurkunde nog op terug komen.



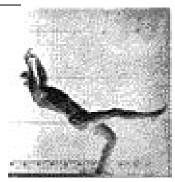
33 Zet getallen en eenheden langs de assen van de vier grafieken hierboven zodat ze allemaal over dezelfde beweging gaan.

34 Een balletje dat van een helling rolt krijgt in het begin een zetje. Daardoor gaat het balletje eenparig versneld bewegen met een beginsnelheid van 5 m/s. In iedere seconde neemt de snelheid met 2 m/s toe. Op tijdstip t kun je de snelheid dan berekenen met: $v(t) = 5 + 2\ t$.

a. Laat zien dat de afgelegde weg s na 10 seconden gelijk is aan 150 meter.

Voor de afgelegde weg gebruikt men bij zo'n beweging dan ook wel de formule:
$s(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_{begin} + v_{eind}) \cdot t_{eind}$ of $s(t) = v_{gemiddeld} \cdot t_{eind}$.

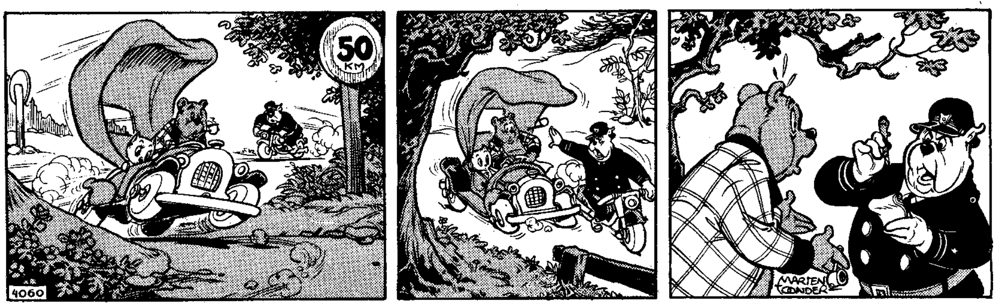
b. Verklaar dit.



§ 4 Sneller van afgelegde weg naar snelheid: de overtreding

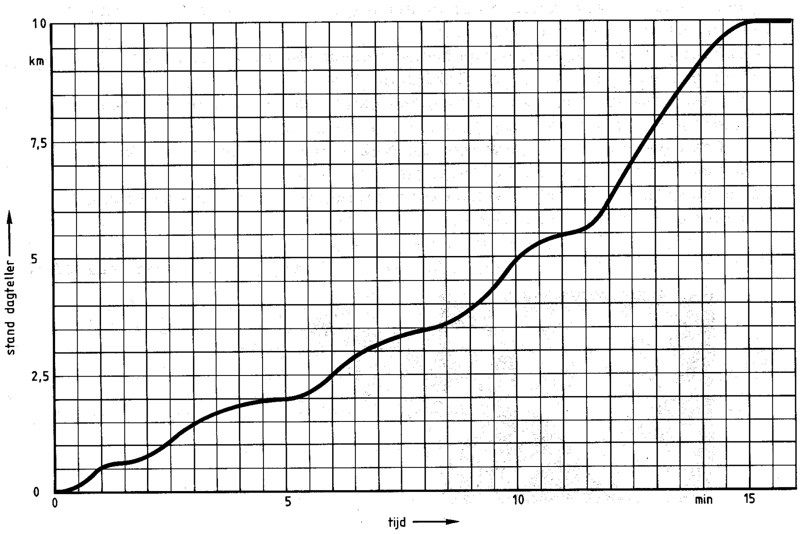
Het verloop van de afgelegde weg stond tot nu toe in een diagram. Zo’n diagram is gebaseerd op enkele metingen. Een continue grafiek van de afgelegde weg is het resultaat van het continu bijhouden van de afgelegde weg. Als bijvoorbeeld de stand van de kilometerteller in een auto voortdurend wordt afgedrukt op grafiekenpapier, dan ontstaat een continue grafiek.

35 Hieronder zie je een verhaaltje over twee bekende stripfiguren uit de tachtiger jaren, Tom Poes en Ollie B. Bommel, een heer van stand.



Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.
‘Hebt u zo’n haast, huh?’ vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.
‘Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?
‘Maar ik reed niet te snel!’, riep heer Bommel op piepende toon. ‘In het afgelopen kwartier heb ik slechts 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur’.
Inderdaad wees de dagteller van de Oude Schicht 10 km aan.

a. Bedenk een mogelijk antwoord van Bulle Bas op de reactie van heer Bommel. Meer informatie over Bommel’s autoritje geeft onderstaande grafiek.



b. Stel dat Bommel met een constante snelheid van 40 km/u zou hebben gereden. Hoe zou de grafiek er dan hebben uitgezien?

c. Bekijk de grafiek van Bommel’s autoritje. Hoe groot was de snelheidsoverschrijding van heer Bommel ongeveer?

De vraag is nu of je met behulp van deze *s*-*t*-grafiek van Bommel een *v*-*t*-grafiek kunt maken die het snelheidsverloop weergeeft. In die *v*-*t*-grafiek kun je dan direct zien hoe vaak Bommel een snelheidsovertreding heeft begaan.
In de vorige paragraaf heb je met behulp van verplaatsingen een *v*-*t*-grafiek benaderd. Daarvoor berekende je constante gemiddelde snelheden met het quotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

differentie-quotiënt

Die Δ kwam van het woord differentie (verschil). Het quotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ heet daarom ook wel een differentiequotiënt.

36 a. Hoe vaak (of hoe lang) heeft Bommel de maximumsnelheid overschreden?
b. Hoe kun je zo precies mogelijk achterhalen wat op de snelheidsmeter van heer Bommel stond na 6 minuten?

Vermoedelijk heeft Bommel na ongeveer 6 minuten ook een snelheidsovertreding begaan. Je hebt al geprobeerd om zijn snelheid na 6 minuten te bepalen.

37 Teken met rood in de grafiek van Bommel hoe de grafiek er uit zou zien als zijn snelheid vanaf t = 6 niet meer verandert.
Kun je met de rode grafiek zijn snelheid op t = 6 benaderen?

momentane snelheid

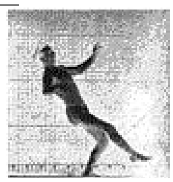
De rode lijn die je getekend hebt staat voor een constante snelheid: de snelheid van Bommel als die niet meer zou veranderen na 6 minuten. Die snelheid is dus net zo groot als de snelheid van Bommel op het moment t = 6 min. Zo’n snelheid noemen we de momentane snelheid.

lineaire voortzetting

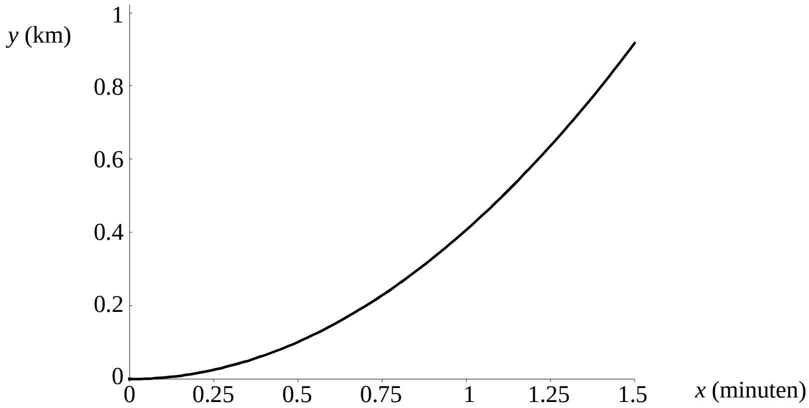
Het rechtlijnige vervolg van een *s*-*t*-grafiek als de snelheid vanaf een moment niet meer verandert, heet ook wel de “lineaire voortzetting” vanaf dat moment.

Galileï veronderstelde dat hij het snelheidsverloop van een valbeweging met een formule kon beschrijven. Daarmee werd wiskundig gereedschap ontwikkeld voor de berekening van de afgelegde weg uit het snelheidsverloop (de oppervlakte onder een *v*-*t*-grafiek). Met dat gereedschap kunnen we valbewegingen beschrijven en voorspellingen doen over valtijd en valsnelheid.

Stel nu dat we het verloop van de afgelegde weg van Bommel met een formule kunnen beschrijven. Misschien kunnen we daarmee ook preciezer zijn over het berekenen van momentane snelheid uit het verloop van de afgelegde weg.



38 Hieronder is de grafiek van de autorit van Bommel op het tijdsinterval [5 , 6.5] benaderd met de grafiek van $f(x) = 0.4 \cdot x^2$.



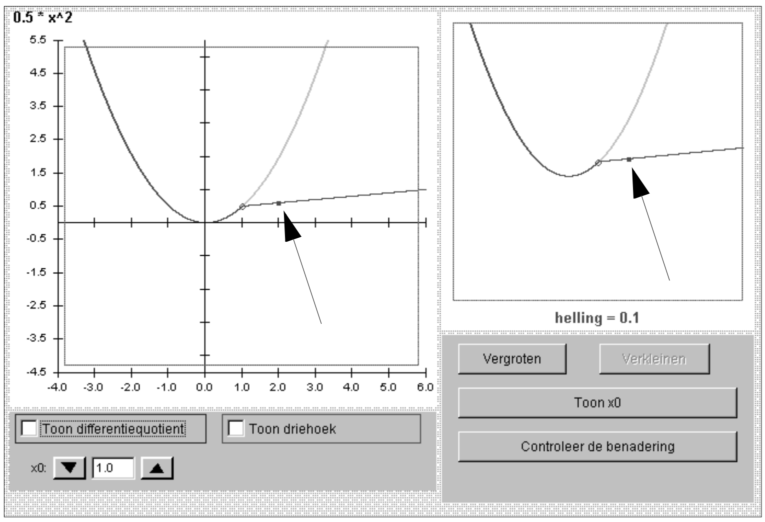
Het tijdstip $t = 5$ correspondeert met $x = 0$ en het tijdstip $t = 6$ met $x = 1$ in de grafiek hierboven.

a. Hoe bereken je met de formule van f de verplaatsing in het tijdsinterval [1 , 1.5]?

b. Probeer met behulp van deze grafiek en de formule van f de snelheid op $x = 1$ zo goed mogelijk te berekenen.

computerpraktikum Helling

Voor het vinden van een lineaire voortzetting (hoe de grafiek verder gaat als vanaf een zeker punt de snelheid niet verandert) is een computerprogramma gemaakt. Met dit programma kun je "op het oog" de lineaire voortzetting schatten. Om zo'n schatting te verbeteren heb je enkele hulpmiddelen.



39 Het programma start met de grafiek van $f(x) = 0.5 \cdot x^2$.
Het punt van waaruit de lineaire voortzetting moet worden getekend is bij x0 = 1.
Probeer de rode lijn zo te verplaatsen door het dichte bolletje (zie pijltje) te verslepen, dat de lijn de lineaire voortzetting benadert. Voor controle klik rechtsonder.

40 a. Om de functie te veranderen moet je uit het menu Regelpanelen het Regelpaneel voor functies kiezen. Verander f in $f(x) = x^2$ $(y = 1 \cdot x^2)$.
Probeer nu weer de lineaire voortzetting in x0 = 1 te bepalen.

Met het programma heb je een aantal mogelijkheden om je lineaire voortzetting zo goed mogelijk te krijgen.

b. Hoe kun je het knopje Vergroten gebruiken bij het zoeken van de lineaire voortzetting?

41 Verander nu f in de functie waarmee de grafiek van Bommel werd benaderd:
$f(x) = 0.4 \cdot x^2$.
Controleer nu met dit programma je eerdere antwoord.

42 In het menu Gebruik kun je zien dat je nu het programma gebruikt om te Oefenen.
Het is ook mogelijk om vier spelletjes te spelen.
Speel achtereenvolgens de spelletjes en beschrijf de “winnende” strategieën.

Spel	Punten	Winnende strategie
Op het oog		
Zoek Xp bij gegeven helling		
Met het differentiequotiënt		
Met alle hulpmiddelen		

van natuurkunde naar wiskunde

Langzamerhand is de aandacht verschoven van de natuurkundige vraag over de momentane snelheid naar de wiskundige vraag over het benaderen van de helling in een punt van een grafiek.

43 Beschrijf nog eens het verband tussen deze twee vragen.

snelheid en helling

Met het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bereken je in een s-t-grafiek de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval Δt.
Bij een constante snelheid is de waarde van $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ precies de helling van de s-t-grafiek. Het is dan het *hellingsgetal* van het lineaire verband.
Als de snelheid niet constant is, dan is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de gemiddelde helling op het interval Δt, of de helling van het lijnstuk dat de twee punten van de s-t-grafiek verbindt.

44 Teken in de plaats-tijd grafiek van Bommel de grafiek van een beweging met een constante snelheid van 50 km/u. Hoe kun je nu zien wanneer Bommel snelheidsovertredingen begaan heeft?

Het begrip momentane snelheid heeft in de loop der tijd de wetenschappers veel hoofdbrekens gekost. Het zijn uiteindelijk Newton en Leibniz geweest die aan het eind van de 17e eeuw de bruikbare wiskunde hebben ontwikkeld.
De wiskundige techniek van het benaderen van de helling in een punt van een grafiek om een momentane verandering te vinden kent ook andere toepassingen. Bijvoorbeeld bij scheikunde om te onderzoeken hoe snel twee stoffen met elkaar reageren, of bij biologie als het gaat om de groeisnelheid van een populatie.

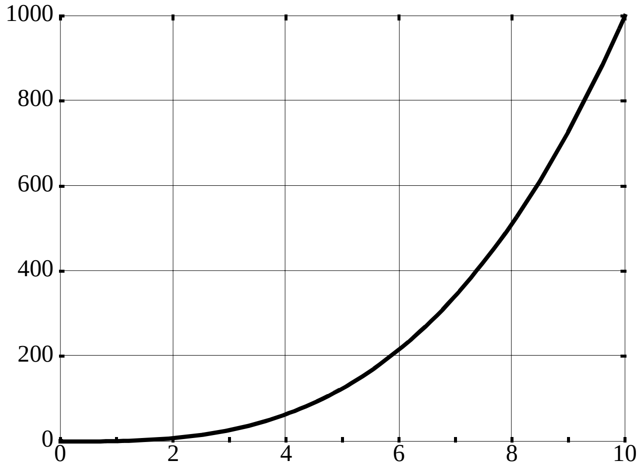
Deze techniek werkt bij een wiskundige functie waarmee je een situatie beschrijft. Als je geen formule hebt ben je afhankelijk van meetwaarden en meetinstrumenten (bijvoorbeeld de frequentie van een stroboscopische foto).

45 Tot nu toe was in de opgaven sprake van een *s*-*t*-grafiek. De helling in een punt is dan maat voor de momentane snelheid, de eenheid van het differentiequotient is een eenheid van snelheid. Bekijk nog eens de *v*-*t*-grafiek van opgave 34.
Wat betekent daar de helling en wat is dan de eenheid van het differentiequotiënt?

De wiskunde van helling en differentiequotiënt

Hieronder volgen enkele wiskundig functies. Ze zijn bedoeld als oefening voor het vinden van de helling in een punt. Bovendien komt het gebruik van de grafische rekenmachine aan de orde.

46 Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = x^3$ op het venster [0 , 10] bij [0 , 1000].



a. Stel je bekijkt intervallen met $\Delta x = 2$. Voor welk interval geldt dat $\Delta f(x)$ ongeveer gelijk aan 300 is?

b. Toon aan dat op het *x*-interval [4 , 5] geldt $\Delta f(x) = 61$.

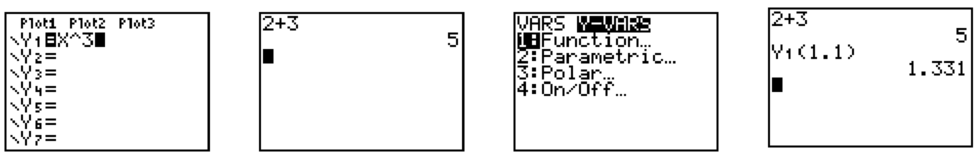
c. Benader op één decimaal nauwkeurig de helling van de grafiek van *f* voor $x = 5$.

grafische rekenmachine (TI-83)

Het rekenwerk voor een differentiequotiënt kan veel tijd vragen. De grafische rekenmachine kan hierbij van pas komen.

47 Bekijk nog eens de derdegraadsfunctie $f(x) = x^3$.
Voor een benadering van de helling van de grafiek van *f* in het punt met $x = 6$ zou je het volgende differentiequotiënt kunnen uitrekenen (met $\Delta x = 0.1$):
$(f(6.1) - f(6)) / 0.1$.

a. De grafische rekenmachine kan je dit rekenwerk uit handen nemen. Voer bovenstaande formule van *f* in voor Y1. In het rekenscherm (waar je bijvoorbeeld ook 2+3 uitrekent) kun je nu Y1 gebruiken om met functiewaarden te rekenen (het symbool Y1 vind je via VARS -> Y-VARS -> FUNCTION). Tik bijv. Y1(1.1) [Enter]:



Bereken zo met Y1 de waarde van het differentiequotient $(f(6.1) - f(6)) / 0.1$.

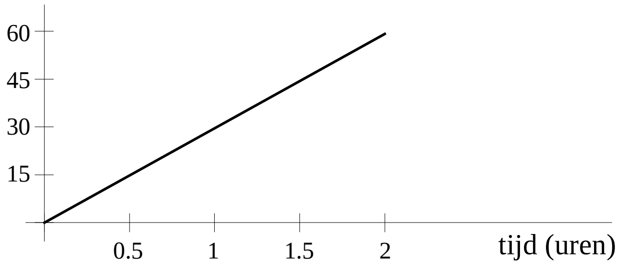
Op deze manier kun je de waarde van Δx zelf kiezen zonder dat het grote rekenproblemen geeft.

b. Benader de helling van de grafiek in het punt met $x = 6$ met $\Delta x = 0.01$.
Hoe groot denk je dat die helling precies is?

Je kunt ook de grafische rekenmachine een zo nauwkeurig mogelijke benadering laten geven. Dat gaat als volgt.

c. Zorg dat je de grafiek van f op het scherm ziet. Kies de optie [dy/dx] uit het [CALC]-menu. Vervolgens kun je intikken waar je de helling wilt benaderen, in dit geval: 6 [ENTER].
Welke waarde geeft je grafische rekenmachine voor de helling van de grafiek van f in het punt (6 , 216)?

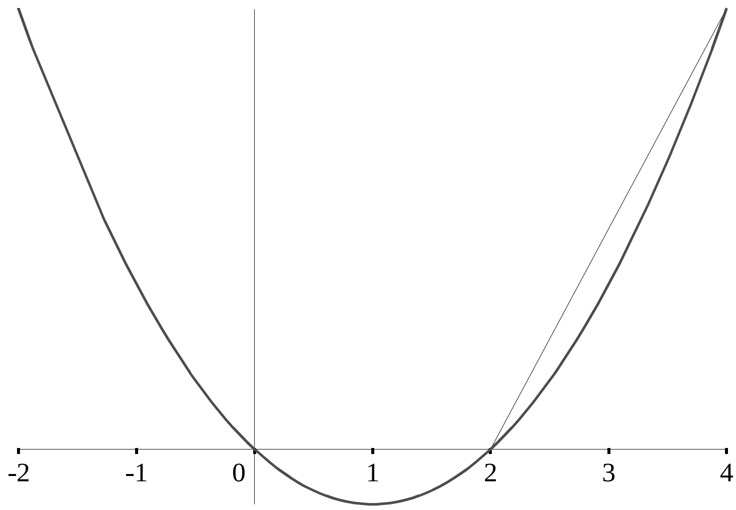
48 Hieronder zie je een grafiek van een beweging met constante snelheid.



a. Welke grootheid staat er bij de vertikale as: verplaatsing, afgelegde weg of snelheid?

b. Bereken de constante snelheid.

49 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x$.



a. Laat zien dat de helling van de lijn die de punten verbindt waarvoor $x = 2$ en $x = 4$, gelijk is aan 4.

Men wil de helling van de grafiek in (2 , 0) benaderen.

b. Toon aan dat het differentiequotient $\Delta y / \Delta x$ in (2 , 0) gegeven door
($f(2.1) - f(2)$) / 0.1 gelijk is aan 2.1.

c. Maak aannemelijk dat de helling in het punt (2 , 0) gelijk is aan 2.

50 Gegeven is de functie $g(x) = 2x - x^2$.
Bepaal de helling in (2 , 0).

51 Een steen wordt met een katapult recht omhoog geschoten. De hoogte in meters kan worden benaderd met de formule: $h(t) = 30t - 5t^2$ (tijd in seconden).

a. Benader de momentane snelheden voor $t = 0$, 1, 2, 3, 4 en 5 en teken een snelheid-tijd-grafiek van de steen.

b. Beschrijf de beweging van de steen met behulp van je grafiek.

c. Met welke snelheid zal de steen na 6 seconden op de grond vallen?

(gebaseerd op Moderne Wiskunde - vwo bovenbouw A1 en B1 deel 1 - 1998)

52 Als een *s*-*t*-grafiek gegeven is, dan kun je momentane snelheden bepalen door de helling van de grafiek in de betreffende punten te berekenen.

a. Wat is de betekenis van de helling in een punt van een *v*-*t*-grafiek?

b. Welke natuurkundige grootheid hoort daarbij?

c. Hoe kun je uit de berekening van de helling achterhalen wat de eenheid van die grootheid is?

Bij een eenparige versnelde beweging is de *v*-*t*-grafiek lineair. De helling van die grafiek heet ook wel de versnelling van die beweging. Aan de versnelling kun je zien hoe snel de snelheid toe- of afneemt.

53 Bepaal snelheid en versnelling bij de volgende eenparig versnelde bewegingen:

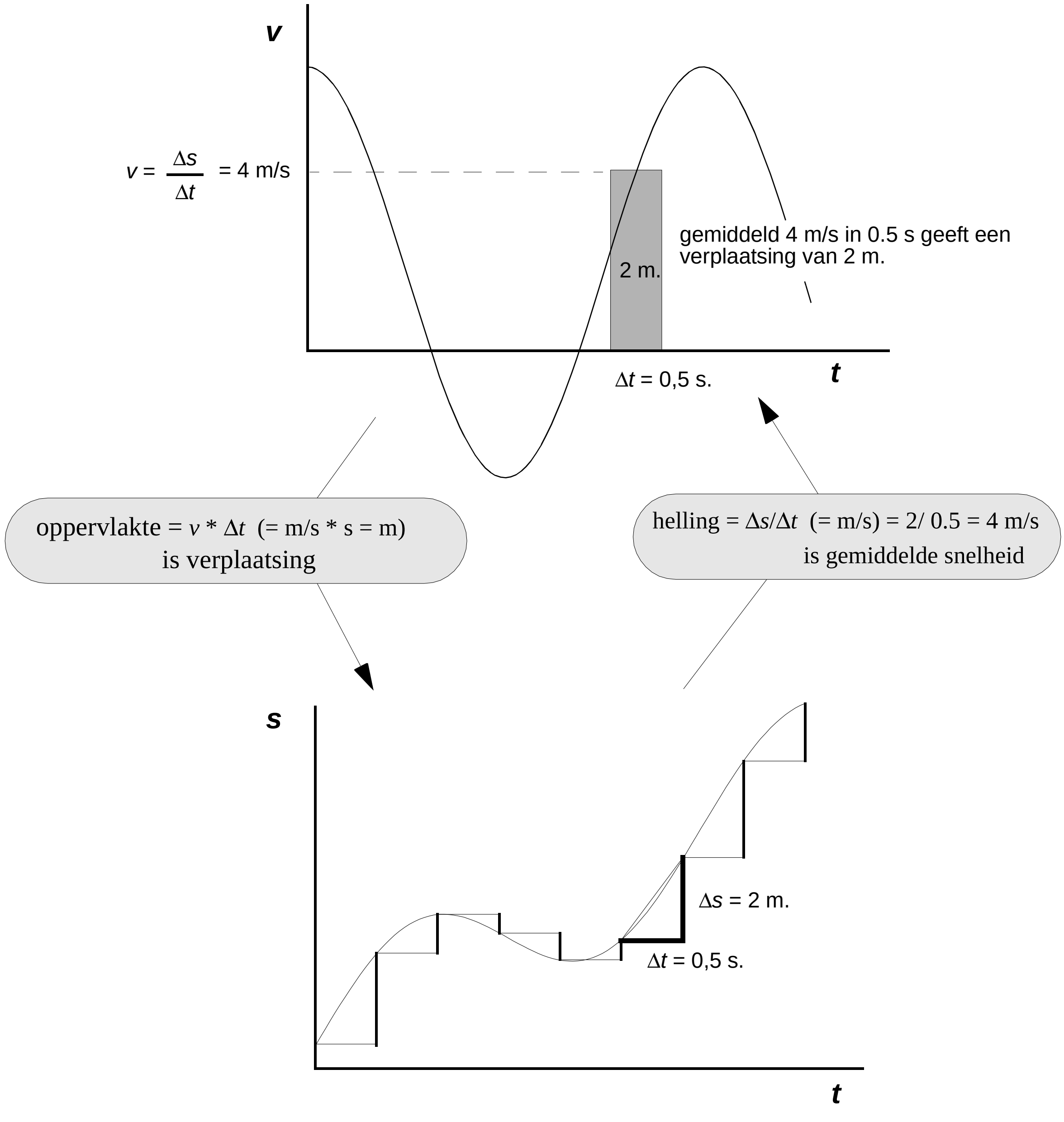
a. Op het moment dat het vallende balletje uit opgave **32** wordt losgelaten.

b. Op het moment dat de steen uit opgave **51** omhoog wordt geschoten.

c. Op het moment dat dezelfde steen op de grond valt.

samenvatting

Het verband tussen snelheid en afgelegde weg en helling en oppervlakte zie je in onderstaande figuur. De samenhang tussen snelheid en afgelegde weg in 0.5 sec. is afgebeeld:



raaklijn

Aan de samenhang tussen helling en oppervlakte kun je nu toevoegen het gebruik van een differentiequotiënt om de helling in een punt P van een grafiek te benaderen.
De lijn door P met de helling die je dan vindt, heet de *raaklijn* aan de grafiek in P (zie opgave 61).
De helling in een punt van een grafiek wordt ook wel geschat door de raaklijn aan die grafiek in dat punt "op het oog" te tekenen en vervolgens de helling van die raaklijn te bepalen.

§ 5 Afronding

toenamen

In het begin van dit boekje analyseer je stroboscopische foto's door stukjes afgelegde weg tussen twee opnamen te meten. De beweging kun je vervolgens beschrijven met een toenamen- of een verplaatsingsdiagram. Die stellen je in staat om al enkele voorspellingen te doen over de beweging.

constante snelheid

Bij een constante snelheid zijn de verplaatsingen constant en neemt de afgelegde weg lineair toe.

continu model

Een wiskundige formule of grafiek waarmee je op ieder moment de snelheid of de afgelegde weg van een beweging kunt bepalen, heet een continu model van die beweging.

eenparig versneld

Bij een eenparig versnelde beweging neemt de snelheid evenredig toe met de tijd. De v-t-grafiek is lineair en de s-t-grafiek kwadratisch.

oppervlakte

Je kunt de oppervlakte onder een v-t-grafiek gebruiken bij het bepalen van stukjes afgelegde weg (verplaatsingen) en die kunt optellen om de afgelegde weg te benaderen. De afgelegde weg van een eenparig versnelde beweging is een kwadratisch verband met de tijd.

helling

In de vorige paragraaf heb je gewerkt met tijd,afstand-grafieken en gezien hoe je gemiddelde en momentane snelheden kunt berekenen. Daarbij spelen differenties en vooral *differentiequotiënten* een rol. Grafisch gezien gaat het daarbij om de *helling* (hellingsgetal of richtingscoëfficiënt) en *lineaire voortzetting*.

integraal en differentiaalrekening

Zo kun je achteraf een rode draad herkennen. De draad '*metingen, verplaatsingen en afgelegde weg* - *continue modellen* - *snelheidsgrafiek* - *benadering met stroken* - *oppervlaktes van stroken* - *afgelegde weg* - *momentane snelheid benaderen met differentiequotiënten*' is het begin van wat in de wiskunde *integraal- en differentiaalrekening* wordt genoemd. Die draad begint in de oudheid. Na een heel lange periode van stilte wordt zij in de zeventiende eeuw pas goed gesponnen en de rekenmethoden die toen zijn ontdekt, worden nog steeds overal ter wereld geleerd en gebruikt.
In de meeste leerboeken worden de wiskunde en de natuurkunde na elkaar behandeld, maar in de geschiedenis werden deze twee onderwerpen eigenlijk in samenhang ontwikkeld.

verandering

De continue wiskundige modellen zoals grafieken en formules, met bijbehorende methoden als het bepalen van helling en oppervlakte worden in allerlei vakken, zoals economie, biologie en scheikunde, gebruikt om veranderingen te beschrijven en te voorspellen. Om de techniek van het differentiequotiënt goed in de vingers te krijgen zul je die nog bij veel verschillende wiskundige formules toepassen.

In de eerste paragraaf stond een citaat uit een boek (p. 4). Hier staat hoe het boek verder ging:

> *"Beweging is overal; zonder beweging zou er geen leven bestaan. 'Stillevens' zijn alleen in musea te vinden, niet in het echte leven, want bewegen en veranderen – in wat voor verschijningsvorm dan ook – is de essentie van het leven zelf.*
> *Sommige bewegingen lijken chaotisch, maar vaak is er ook sprake van orde en regelmaat. Zo ontstaan regelmatige patronen, die in principe aan wiskundig onderzoek onderworpen kunnen worden. Maar ieder wiskundig gereedschap is in wezen statisch van aard: getallen, punten, lijnen, vergelijkingen, enzovoort, ze dragen op geen enkele wijze iets van beweging in zich. Als men dus beweging wil onderzoeken, moet men een manier vinden om die statische hulpmiddelen met bewegingspatronen in verband te brengen. Het kostte de mensheid meer dan tweeduizend jaar voor men hier in slaagde, en de grootste vordering was de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening in de zeventiende eeuw. Die geweldige wiskundige ontdekking markeert een keerpunt in de geschiedenis; de dramatische en revolutionaire effecten ervan op ons leven zijn alleen maar vergelijkbaar met de uitvinding van wiel of drukpers."*
>
> Uit: *Wiskunde - Wetenschap van patronen en structuren*, door Keith Devlin.
>
> Een beknopt overzicht van de geschiedenis:

Tijdlijn

ca 500 BC	*Pythagoras*	
ca 350 BC	*Aristoteles*	valsnelheid is constant en evenredig met gewicht
ca 200 BC	*Archimedes*	zwaartepunts- en oppervlaktebepalingen via opdelingen in rechthoeken
16e eeuw	*Simon Stevin*	kritiek op Aristoteles: proef met 2 loden ballen van verschillend gewicht die identieke valbewegingen hebben.
begin 17e eeuw	*Isaac Beeckman en vervolgens Galileo Galileï*	valsnelheid is evenredig met valtijd gebruik van techniek van Archimedes voor oppervlakteberekening
eind 17e eeuw	*Leibniz & Newton*	Differentiaal- en integraalrekening, eerste definitie van momentane snelheid en verband met gemiddelde snelheid.

Extra oefeningen

54 Twee personen rijden ieder met een constante snelheid op de snelweg De een rijdt 100 km/u en de ander 120 km/u. Stel dat degene die 100 km/u rijdt een voorsprong heeft van 30 km. Hoe lang duurt het voordat hij door de ander wordt ingehaald?

55 a. Tom Poes die naast Bommel in de Oude Schicht zat, maakte later nog de bittere opmerking dat zij bijna de helft van de *weg* te snel hadden gereden.
Kun je het daar mee eens zijn? Verklaar je antwoord.

b. Hebben ze ook de helft van de tijd te snel gereden?

56 Zeno's paradox:
Achilles (een Griekse held) en een schildpad doen een hardloopwedstrijd over 100 meter. Achilles is de kwaadste niet en geeft de schildpad een voorsprong van 50 meter. Als het startschot klinkt, op tijdstip t_0 beginnen ze te rennen. Stel dat Achilles op tijdstip t_1 50 meter heeft afgelegd, dus op de plek is waar de schildpad was op t_0, dan heeft de schildpad inmiddels ook al een stukje afgelegd. Achilles ziet dus op t_1 de schildpad nog steeds voor zich.
Als nu Achilles op tijdstip t_2 op de plek is waar de schildpad was op t_1, dan heeft weer de schildpad een stukje afgelegd en loopt de schildpad dus nog steeds voor op.
Als nu Achilles op tijdstip t_3 op de plek is waar de schildpad was op t_2, dan ..... etc.
Zo ontstaat een rij tijdstippen $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ waar geen eind aan komt en Achilles zal de schildpad nooit inhalen. En dat terwijl iedereen weet dat Achilles de schildpad eenvoudig moet kunnen inhalen.
Wat is de fout in de redenering?

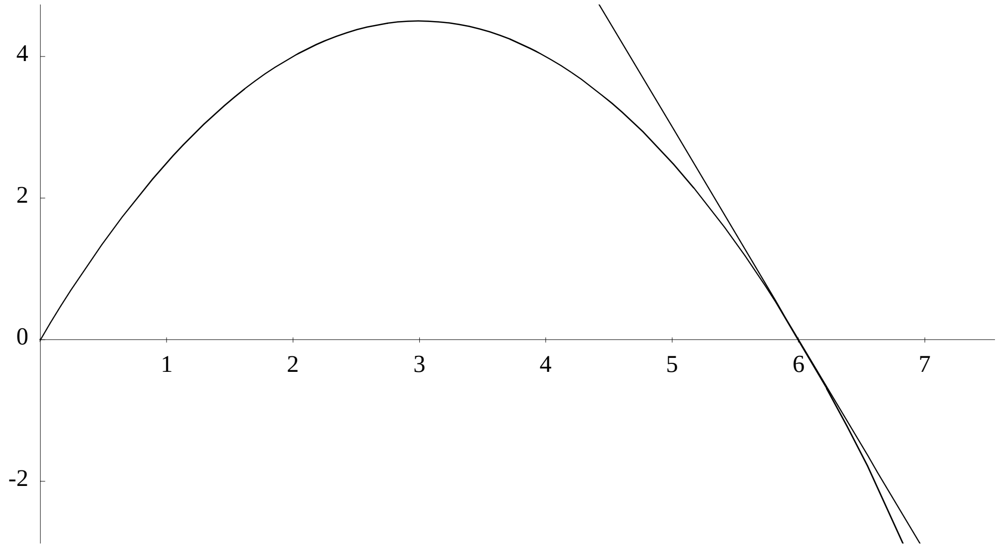
57 De Nederlander Isaac Beeckman heeft ook een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de wiskunde die in deze lessenserie aan bod is gekomen.
Zoek informatie over hem en zijn bijdrage deze wiskunde (bijvoorbeeld op internet).

58 Het verschil tussen de twee opeenvolgende kwadraten 16 en 25 is een oneven getal en de som van 5 opeenvolgende oneven getallen beginnend bij 1 geeft weer een kwadraat:
$25 - 16 = 9$ en $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.
Onderzoek of dit altijd geldt. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld. Zo ja, geef een verklaring.

59 De *v*-*t*-grafiek van een eenparig versnelde beweging is een rechte lijn.
Hoe ziet eigenlijk de *v*-*s*-grafiek van een eenparig versnelde beweging eruit?
Hebben helling en oppervlakte dan ook nog betekenis?

60 Voordat Galileï veronderstelde dat de valsnelheid evenredig met de valtijd zou tenemen, dacht hij dat de valsnelheid evenredig met de valweg zou toenemen.
Hoe verschillen die twee bewegingen?

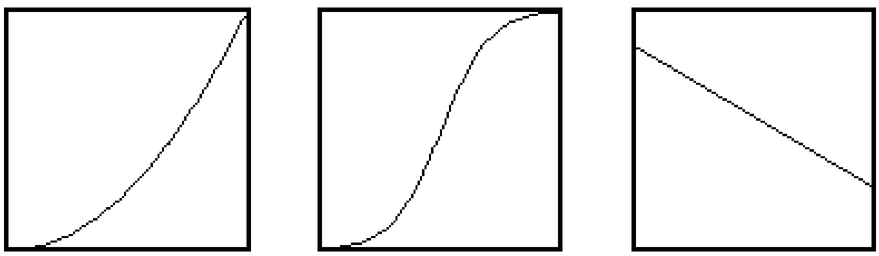
61 Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = -0.5\,x^2 + 3x$ en de raaklijn aan de grafiek in het punt (6 , 0).
Bepaal de vergelijking van de raaklijn.

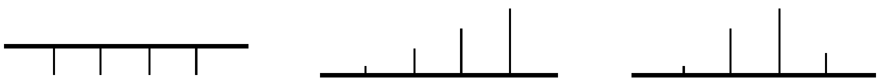


62 Je kunt een CBR (Calculator-Based Ranger) aan je grafische rekenmachine koppelen. Daarmee is het mogelijk om gedurende een aantal seconden de afstand tot een object te meten. Tijdens die metingen kun je zelf bewegen, en/of het object kan bewegen.
Ga na hoe die CBR werkt en onderzoek behulp van de CBR en grafische rekenmachine een bepaalde beweging. Bedenk hierbij dat er een verschil is tussen afstand en afgelegde weg.
Schrijf een verslag van je bevindingen.

63 Hieronder staan 3 grafieken en 3 verplaatsingsdiagrammen. Geef aan welke verplaatsingsdiagram bij welke grafiek hoort.

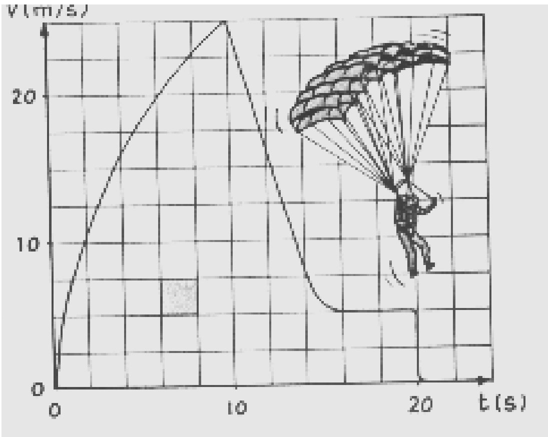
A B C





1 2 3

64 Voor een parachutespringer moet worden uitgerekend van hoe hoog zij uit het vliegtuig kan springen. Hierbij worden aannames gemaakt over de tijd dat zij vrij valt en de tijd die ze aan de parachute moet hangen voordat ze neerkomt. Hieronder zie je deze aannames verwerkt in een *v*-*t*-grafiek. Van welke hoogte moet zij uit het vliegtuig springen?



Antwoorden

1 **a.**

b. Als je de verplaatsing in 3 uur herhaalt, dan is de storm boven Nederland. Dan zou de skatetocht dus niet door kunnen gaan.

2 **a.**

b. Mogelijke veronderstellingen: orkanen buigen af naar het noorden en gaan over land langzamer dan over zee.

3

4 Je aanpak is belangrijker dan het antwoord.

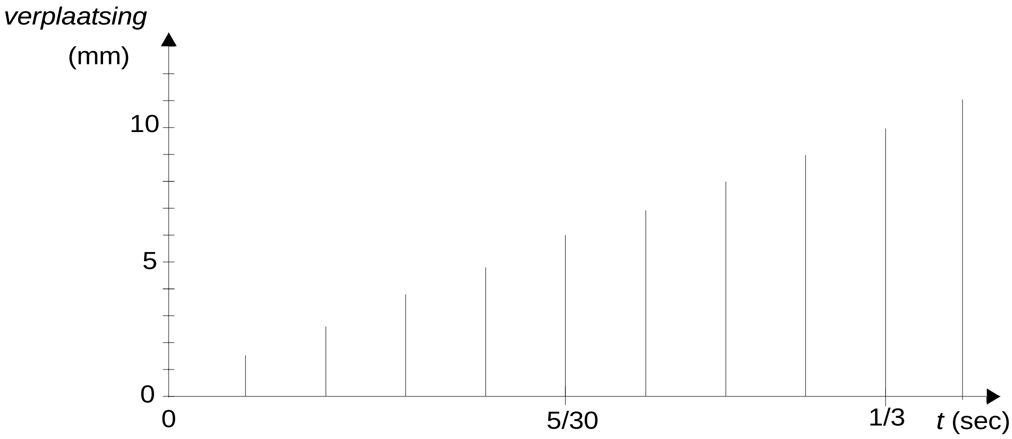
5 Je kunt zien dat de maan per dag iets meer dan 10 graden aflegt.

6

7 **a.**

b. Het lijkt allebei in 3 flitsen te gebeuren.

8 **a.**



b. Na ongeveer 13 flitsen.

9 **a.**

b. Nee. De snelheid verandert dan te plotseling in een constante snelheid.

10 De verplaatsingen van het midden zijn vrijwel constant. Het uiteinde verplaatst afwisselend meer en minder. In totaal lijkt het uiteinde meer af te leggen dan het midden.

11

12

13 **a.** Ja, maar het moment is dan: in 5 seconden leggen ze evenveel af.

14 (Deze antwoorden zijn afhankelijk van de resolutie.)
(i): 35 mm; (ii):60 mm; (iii): 80 mm.

15

16

17 a.
b. Door de uiteinden/punten gaat een rechte lijn.
c. 6 m/sec.
d. In totaal is 12 meter afgelegd, dus krijg je: 12/2 = 6 m/sec.

18

19 Links is het meeste afgelegd en rechts is het hardst gereden (meer dan 20 km in 0.5 uur, terwijl links minder dan 40 km in 1 uur).

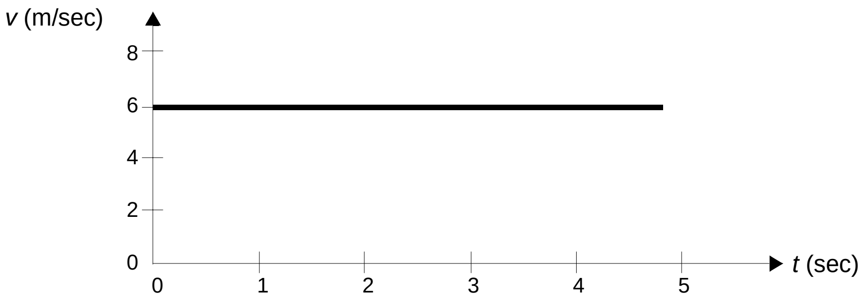
20 a. Tussen 3.6 cm en 4.5 cm per 1/30 sec. Dus ongeveer 120 cm/sec = 1.2 m/sec.
b. In 1 seconde legt het balletje veel meer af. Na ca 13 flitsen (= 13/30 sec) heeft hij al 100 cm afgelegd. Dus die verplaatsing zie je dan niet.
Wat betekent het dan dat de snelheid op een moment 100 cm/sec is geweest? Je zou kunnen zeggen: als vanaf dat moment de snelheid niet meer zou veranderen, dan zou je vanaf dan in iedere seconde een verplaatsing van 100 cm krijgen.

21 Het dier loopt met constante snelheid verder, of gaat steeds langzamer.

22 a.
b. De eerste ca 80 km/uur, de tweede minder dan 60 km/uur.

23 a. 23.6 m/sec = 85.1 km/uur.
b.
c.

24 a. Een snelheidsgrafiek:



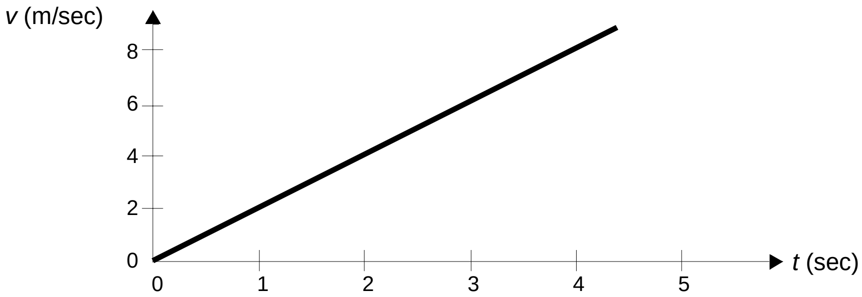
b. De snelheidsgrafiek verandert niet.

25

26

27 Bijvoorbeeld: 0.5, 1, 1.5 en 2 meter.

28 a.



b. Tip: Lastig is dat de snelheid voortdurend verandert. Je zou iedere seconde de veranderende snelheid kunnen benaderen met een constante snelheid. Daarmee kun je dan een verplaatsing in die seconde berekenen.

29 Ja, het tweede interval is namelijk twee keer zo breed.

30 Het tweede interval is wel twee keer zo breed, maar minder dan de helft keer zo hoog. Dus de verplaatsing in het eerste interval is groter.

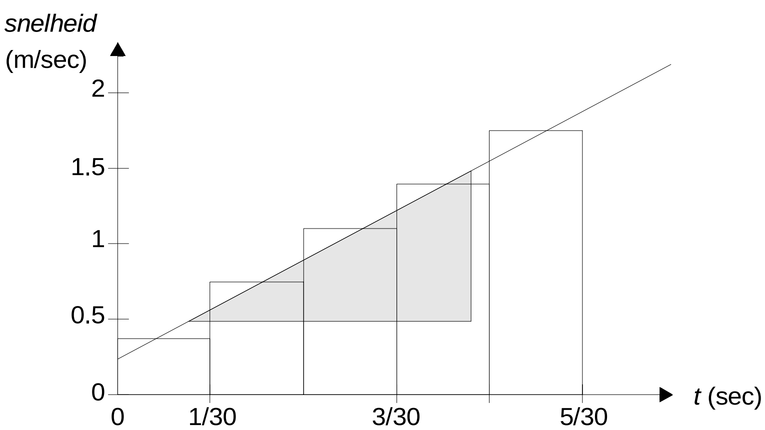
31 a. De gemiddelde snelheid is daar ongeveer 28 m/sec, de verplaatsing wordt dan: $28 * 0.5 = 14$ meter.

b.

c. De oppervlakte van een strook is lengte keer breedte. Dat is precies de berekening voor de afgelegde weg in het betreffende tijdsinterval.

d. 125 meter.

32 a. De trapgrafiek geeft een beeld van het snelheidsverloop. Inderdaad lijkt de snelheid gelijkmatig (lineair) toe te nemen.



b. De schuine lijn geeft aan hoe snel de snelheid toeneemt. De helling van die lijn is gelijk aan de waarde van de constant bij v = c.t. Bij de driehoek is de hoogte 1 en de breedte 3/30, dus de helling is ongeveer 1 / 3/30 = 10. En dat is dan ook ongeveer de waarde van de constante bij het vallende balletje.

33

34 Na 10 seconden is de snelheid 25 m/s. Uit de oppervlaktemethode volgt:
$s = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 25 / 2 = 150$ m.

35 a.
b.
c. Hij heeft ongeveer 90 km/uur gereden, dus 40 km/uur te hard.

36 a.
b.

37 Ongeveer 50 km/uur.

38 a. $f(1.5) = 0.9$ en $f(1) = 0.4$. Dus in die halve minuut is $\Delta y = 0.5$ km.
b. Neem bijvoorbeeld $\Delta x = 0.2$ rond $x = 1$:
$f(1.1) = 0.484$ en $f(0.9) = 0.324$. Dus $\Delta y = 0.16$ km in 0.2 minuut:
geeft 0.8 km/minuut = 48 km/uur.

39 De helling is ongeveer 1.

40 a. Dan is de helling ongeveer 2.
b.

41

42

43

44

45 De eenheid van het differentiequotiënt is dan $\frac{\text{m/sec}}{\text{sec}} = \text{m/sec}^2$.
De bijbehorende grootheid heet versnelling.

46 a. Het x-interval [6 , 8].
b. $f(5) - f(4) = 125 - 64 = 61$.
c. 75

47 a. 109.81
b. 108.1801
c. 108

48 a. afgelegde weg
b. Als de eenheid van de vertikale as kilometers is, dan is de snelheid 30 km/uur.

49 a. $(f(4) - f(2)) / 2 = 8/2 = 4$.
b. $(f(2.1) - f(2)) / 0.1 = (0.21 - 0) / 0.1 = 2.1$.
c.

50 -2.

51 a.

t (sec)	0	1	2	3	4	5
momentane snelheid (m/sec)	30	20	10	0	-10	-20

b.
c. -30 m/sec.