

Perspectiefkasten: vakkundig geschilderde interieurs die, mits op de juiste manier bekeken, een driedimensionale voorstelling geven. In dit artikel wordt beschreven wat de meetkunde is die ten grondslag aan deze afbeeldingen ligt. **Agnes Verweij** zet de perspectief van de kastjes in het juiste perspectief ...

Perspectief in een kastje

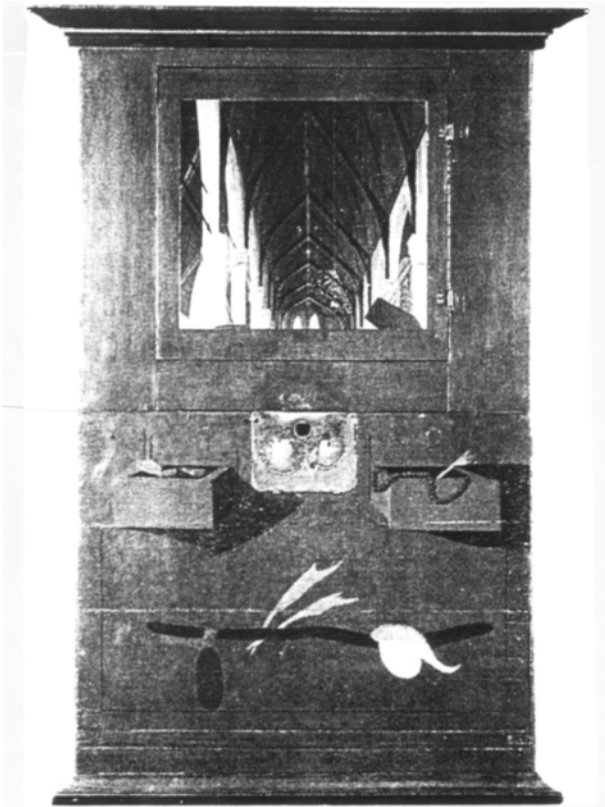


fig. 1 Anoniem, *Interieur van een protestantse kerk, tussen 1655 en 1660. Perspectiefkast, Nationalmuseum Kopenhagen*

Gedurende een korte periode, net na het midden van de zeventiende eeuw, zijn de perspectiefkastjes van Hollandse interieur- en architectuurschilders in de mode geweest. Het zijn lege kijkkastjes waarvan de wanden beschilderd zijn met een perspectiefafbeelding van het interieur van een huis of een kerk. Slechts zes perspectiefkastjes zijn bewaard gebleven¹, waarvan er maar liefst drie tot de collectie van het Nationalmuseum in Kopenhagen behoren. Figuur 1 laat een driehoekige kast uit dit museum zien met het interieur van een Hollandse kerk. Het kijkgat is midden in het, met een trompe-l'oeil-schildering versierde, voorpaneel aangebracht. De grote vier-

kante uitsparing daarboven zorgt dat er voldoende licht naar binnen valt. Als de schildering in de kast door deze lichtopening bekeken wordt, zoals in figuur 1, ziet de afbeelding er merkwaardig uit. De balken boven in de kerk zijn bijvoorbeeld allen in het midden geknakt. Kijken we door het kijkgat, dan zijn de balken opeens recht en valt verder ook alles in het interieur op z'n plaats, zie figuur 2. Wat deze figuur helaas niet goed kan overbrengen, is het verrassend ruimtelijke effect dat de perspectief in de kast geeft als de afbeelding door het kijkgat bekeken wordt.

In dit artikel zullen we de opzet van de perspectief in deze en de andere zeventiende-eeuwse perspectiefkasten bespreken en ook aandacht besteden aan een perspectiefdoosje uit de twintigste eeuw. Dit alles mondt uit in het voorstel leerlingen in de eenentwintigste eeuw ook eens zo'n kastje of doosje te laten maken. Maar eerst herhalen we nog even de beginselen van lineair perspectief en leiden daaruit af hoe perspectiefbeelden het beste bekeken kunnen worden.

Kijken naar perspectief

Een tekening van Leonardo da Vinci (1452-1519), figuur 3, geeft het basisprincipe van het afbeelden in lineair per-

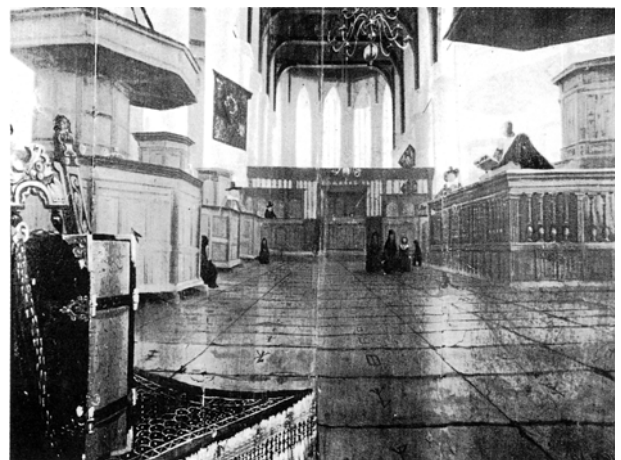


fig. 2 Een deel van de binnenzijde van de kast van figuur 1, gezien door het kijkgat



fig. 3 Leonardo da Vinci, Hulpmiddelen voor het tekenen in perspectief. Milaan: Codex Atlanticus Biblioteca Ambrosiana, circa 1518

spectief weer. De kunstenaar kijkt met één oog vanuit een vast punt door een vlakke glasplaat, het tafereel, naar een ruimtelijk object. Zijn oog is in dit geval gefixeerd door een statief. De kunstenaar 'trekt' nu op het tafereel 'over' wat hij ziet. Anders geformuleerd: hij legt de snijpunten van het tafereel met de (rechte) kijklijnen van het oog naar de af te beelden punten van het object vast.

In de tijd van Da Vinci waren al constructieregels bekend die, vooral bij rechte lijnige objecten, het gebruik van een glasplaat gedeeltelijk of geheel overbodig maakten. Hierdoor konden ook gefantaseerde ruimtelijke objecten in perspectief getekend of geschilderd worden. Deze constructieregels waren gebaseerd op eigenschappen van lineair perspectief, zoals:

- rechte lijnen die evenwijdig zijn met het tafereel worden afgebeeld als rechte lijnen, waarbij hun richting en de verhoudingen van afstanden op een lijn bewaard blijven
- van rechten die niet evenwijdig zijn met het tafereel blijven de richting en verhoudingen van afstanden niet bewaard; zij worden afgebeeld als halve rechten waarvan het eindpunt, het zogenaamde vluchtpunt, afhangt van de richting van de originele lijn.

Op de vluchtpunten komen we nog terug. Op dit moment gaat het er niet om of een perspectieftekening of -schildering door constructie of eenvoudigweg op de manier van figuur 3 tot stand gekomen is, maar om het bekijken van het resultaat. Door deze figuur kunnen we begrijpen dat je in een tweedimensionaal perspectiefbeeld 'diepte' ziet als je met één oog vanuit één bepaald punt kijkt. Dat punt is precies het punt waar de kunstenaar, in werkelijkheid of in theorie, zijn oog gehouden heeft.

Het is dan ook jammer dat perspectiefschilderijen in musea vaak zo zijn opgehangen, dat je door de knieën moet zakken of op een stoel of zelfs op een ladder zou moeten gaan staan om de juiste ooghoogte te bereiken. En ook als het met de hoogte wel in orde is, denkt men er helaas nooit aan om op de een of andere manier aan de museum-

bezoekers bekend te maken vanuit welk punt op die hoogte zij zouden moeten kijken. Nu zullen hedendaagse museumbezoekers hierover zelden klagen; zij hebben immers door de fotografie, de film en de televisie een grote ervaring gekregen in het interpreteren van perspectiefbeelden waar ze 'verkeerd' tegenaan kijken. Maar toen in de zeventiende eeuw in Nederland het schilderen in perspectief een belangrijk specialisme begon te worden, had men die ervaring natuurlijk nog niet.

Het is dan ook niet zo vreemd dat in die tijd in de kring van de Hollandse architectuur- en interieurschilders de perspectiefkast bedacht is als middel om op een natuurlijke manier 'goed' kijken af te dwingen. Met het kijkgat op de juiste plaats, een gat zo klein dat je er niet met twee ogen tegelijk door kunt kijken, gaat het allemaal vanzelf goed. Een bijkomend voordeel is dat de beschouwer van de afbeeldingen in de perspectiefkast niet afgeleid wordt door andere zaken in zijn omgeving. Als die afbeeldingen niet alleen de wand tegenover het kijkgat beslaan, maar ook de door het kijkgat zichtbare delen van de overige wanden, krijgt de kijker zelfs de illusie dat hij zelf deel uitmaakt van de afgebeelde ruimte.

Vluchtpunten bij lineair perspectief

Voordat we de perspectief van de bewaard gebleven zeventiende-eeuwse perspectiefkastjes zullen bespreken, zetten we de benodigde kennis omtrent vluchtpunten op een rijtje. We gaan eerst uit van een situatie waarin een kunstenaar met behulp van een glazen tafereel een lijn l , niet evenwijdig met het tafereel, in beeld brengt. We nemen aan dat hij hierbij gebruik maakt van een rij van punten $A_1, A_2, A_3, \dots$ die zo op l gekozen zijn, dat hun afstand tot het tafereel onbegrensd toeneemt. De punten waarin de kijklijnen uit het oog O van de kunstenaar naar $A_1, A_2, A_3, \dots$ het tafereel snijden, noemen we $A_1', A_2', A_3', \dots$. Deze punten liggen op het perspectiefbeeld l' van l . Zie figuur 4.

In de eerste plaats merken we op dat de hoeken die de kijklijnen $OA_1, OA_2, OA_3, \dots$ met l maken, steeds kleiner worden en hun grootte naar 0 gaat. Dus: als n naar oneindig gaat, gaat de richting van OA_n en daarmee de richting van OA_n' naar de richting van l . Hieruit volgt dat de rij $A_1', A_2', A_3', \dots$ convergeert naar – en dat l' dus eindigt in – het punt V van het tafereel waarvoor geldt dat OV evenwijdig is met l . Dit punt V wordt het *vluchtpunt* van de lijn l genoemd. Op basis van wat hierboven al over het verband tussen het oog van de perspectieftekenaar en het 'juiste' gezichtspunt van de kijker naar een perspectiefafbeelding gezegd is, kan het nu gevonden resultaat ook als volgt geformuleerd worden.

Stelling

Het vluchtpunt V van een rechte lijn l in een perspectiefafbeelding is het punt waarin het vlak van die afbeelding gesneden wordt door de kijklijn die vanuit het 'juiste' gezichtspunt evenwijdig met l getrokken wordt.

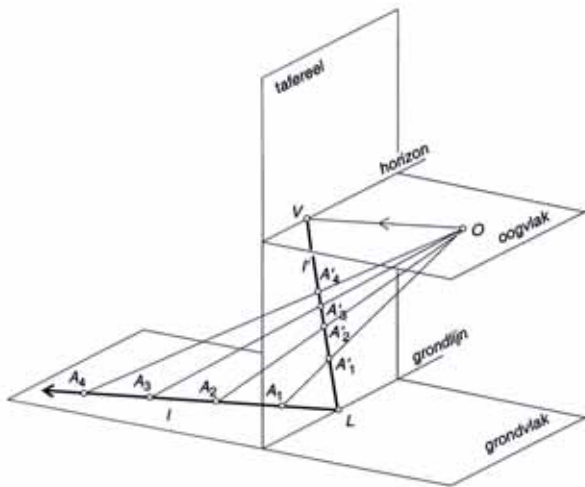


fig. 4 Het vluchtpunt V van een lijn l die niet evenwijdig is met het tafereel

Als l een horizontale lijn is, bijvoorbeeld zoals in de situatie van figuur 4 een lijn die in het horizontale *grondvlak* ligt, dan impliceert de stelling dat het vluchtpunt V van l op een horizontale kijklijn ligt. Deze kijklijn ligt dan in het zogenaamde *oogvlak*, dat is het horizontale vlak door het oog O , en V ligt dus op de *horizon*, dat is de snijlijn van het oogvlak met het tafereel.

Distantiepunten

Nu bekijken we de situatie waarin het tafereel verticaal opgesteld is, terwijl het in perspectief af te beelden object, behalve door lijnen die evenwijdig zijn met het tafereel, gekenmerkt wordt door lijnen die loodrecht op het tafereel staan en een aantal in horizontale of verticale vlakken gelegen lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maken. Zo'n situatie is te zien in figuur 5, waarin $ABCD.EFGH$ een kubus is. Uit de bovengenoemde stelling volgt dat de kijklijn naar het vluchtpunt van de lijnen loodrecht op het tafereel, dat zijn in de figuur de lijnen AD , BC , EH en FG , zelf ook loodrecht op het tafereel staat. Dit vluchtpunt is dus de loodrechte projectie van het punt O op het tafereel en wordt daarom het *oogpunt* genoemd, dat met de letter P wordt aangeduid. Dit punt ligt in zo'n geval op de horizon.

In figuur 5 zijn ook vier vluchtpunten getekend van lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maken: D_1 , D_2 , D_3 en D_4 . De punten D_1 en D_2 zijn de vluchtpunten van horizontale zijvlaksdagonalen, D_1 van BD en FH , D_2 van AC en EG , en liggen dus op de horizon. D_3 en D_4 zijn de vluchtpunten van diagonalen van verticale zijvlakken van de kubus. Alle zijvlaksdagonalen maken hoeken van 45° met het tafereel en met de richting loodrecht op het tafereel. Volgens de stelling geldt dan hetzelfde voor de kijklijnen OD_1 , OD_2 , OD_3 , en OD_4 .

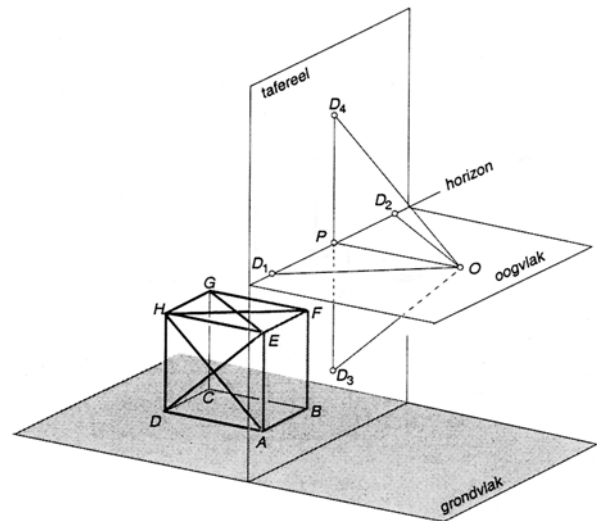


fig. 5 Vluchtpunten bij de perspectief van een kubus waarvan alle ribben loodrecht staan op of evenwijdig lopen met het tafereel: het oogpunt P en de distantiepunten D_1 , D_2 , D_3 en D_4

De driehoeken OPD_1 , OPD_2 , OPD_3 en OPD_4 hebben dus twee hoeken van 45° en een rechte hoek en hieruit volgt: $OP = PD_1 = PD_2 = PD_3 = PD_4$. De *distantie*, dat is de afstand van O tot het tafereel, is gelijk aan OP en dus ook gelijk aan de afstand van P tot de punten D_1 , D_2 , D_3 en D_4 . Dit verklaart dat de punten D_1 , D_2 , D_3 en D_4 *distantiepunten* genoemd worden.

De perspectieftekenaar kan dus op basis van deze kennis zodra hij de positie van zijn oog O ten opzichte van het tafereel heeft vastgelegd, gemakkelijk het oogpunt P en de distantiepunten D_1 , D_2 , D_3 en D_4 bepalen. Deze punten kan hij vervolgens bij de constructie van de perspectiefafbeelding gebruiken als vluchtpunten van de kenmerkende lijnen van zijn object. Wie kant-en-klare perspectieftekeningen goed wil bekijken, moet hierin dan ook zoeken naar het vluchtpunt van lijnen die in werkelijkheid loodrecht op het tafereel hebben gestaan en een vluchtpunt van horizontale of verticale lijnen die een hoek van 45° met het tafereel maakten. Op basis van dezelfde kennis kan dan met behulp van deze punten het juiste gezichtspunt O bepaald worden.

Eenpunts perspectief

De zeventiende-eeuwse Hollandse architectuur- en interieurschilders beschikten vrijwel zeker niet over de kennis met betrekking tot vluchtpunten in de hierboven gepresenteerde vorm. Wél waren zij, met name door de voorbeeldboeken van Hans Vredeman de Vries uit 1604/1605², op de hoogte van de constructieregels voor die objecten en hun positionering ten opzichte van het tafereel waarbij het oogpunt en de distantiepunten op de horizon als vluchtpunten optreden.

Meestal gebruikten zij *eenpunts perspectief*, dat is per-

spectief waarbij de meest kenmerkende lijnen evenwijdig zijn met of loodrecht staan op het tafereel, zodat deze lijnen óf geen vluchtpunt óf het oogpunt als vluchtpunt hebben. Bekende voorbeelden zijn de huiskamers van Johannes Vermeer (1632-1675) en de kerken en kerkinterieurs van Pieter Jansz. Saenredam (1597-1665)³, waarbij het tafereel steeds evenwijdig met een van de wanden van het af te beelden gebouw of interieur gekozen is. De distantiepunten op de horizon spelen hierin hoogstens een rol als vluchtpunt van de diagonalen – of, als de tegels diagonaal gelegd zijn, van de zijden – van vierkante vloertegels en soms van de zijden van een enkel diagonaal geplaatst meubel.

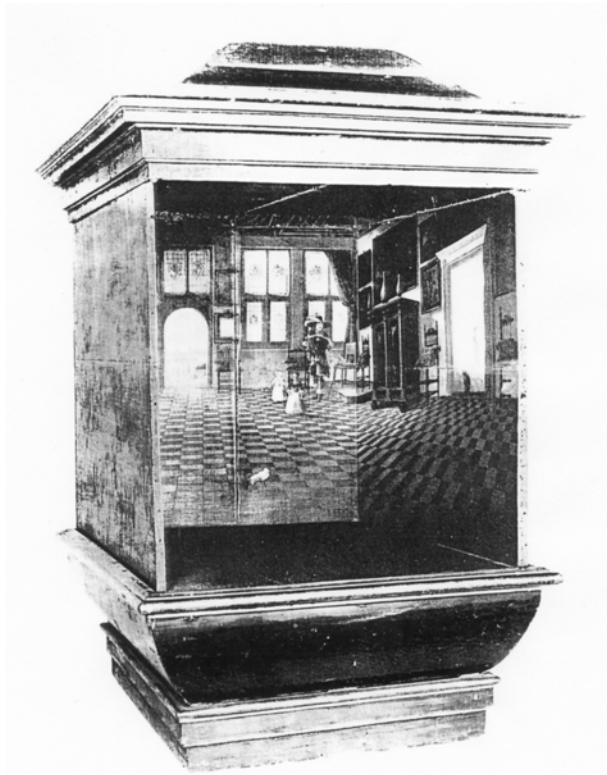


fig. 6 Anoniem, *Interieur van een Hollands woonhuis*, tussen 1665 en 1675. Perspectiefkastje, Nationalmuseum Kopenhagen

Hetzelfde geldt voor de opstaande wanden van de twee bewaard gebleven rechthoekige perspectiefkastjes uit de zeventiende eeuw. Een van deze twee is het kastje met het interieur van een Hollands huis uit circa 1670 dat zich in het Nationalmuseum van Kopenhagen bevindt, zie figuur 6. Van dit kastje is het voorpaneel met kijkgat en lichtopening verloren gegaan. De onbekende schilder heeft het zich wat de perspectief betreft niet al te moeilijk gemaakt. Hij heeft namelijk de opstaande wanden van het interieur elk vrijwel geheel op een overeenkomstige wand van het kastje afgebeeld. Wél heeft hij op de zijwanden van het kastje ook een deel van de met vierkante tegels belegde vloer geschilderd. Opvallend is dat de afbeelding van de tegelvloer niet doorloopt op de bodem van het kastje, terwijl dit juist zo gemakkelijk te realiseren was geweest.

De bodem van het kastje is in feite een horizontaal tafereel en dus evenwijdig met de af te beelden vloer. Daarom hadden de tegels hier gewoon als vierkantjes geschilderd kunnen worden.

Voor een afbeelding van het andere rechthoekige perspectiefkastje verwijzen we naar de website van het museum dat het in bezit heeft: de National Gallery in Londen⁴. Dit kastje met het interieur van een Hollands huis is gemaakt door Samuel van Hoogstraten (1627-1678), waarschijnlijk tussen 1665 en 1660. Het oorspronkelijke voorpaneel met de lichtopening is niet bewaard gebleven. Bijzonder is dat het kastje twee kijkgaten heeft, een in de linker- en een in de rechterzijwand, op dezelfde hoogte, dichtbij de voorzijde van het kastje. Bij de constructie van de perspectief van het linkerdeel van de tegelvloer op de achterwand van het kastje heeft Van Hoogstraten dus met een ander oogpunt en andere distantiepunten op de horizon rekening moeten houden dan bij het rechterdeel van de op de achterwand doorlopende vloer. De slechte aansluiting tussen de beide delen heeft de schilder verdoezeld door hier de tegels te bedekken met een rond vloerkleedje, een stoel en een kussen dat van die stoel afgevallen is. De schilderijen op de bodem en het plafond van het kastje gaven wat dit betreft minder problemen. Zoals hierboven uitgelegd is, moesten de vierkante vloertegels eenvoudigweg vierkant geschilderd worden en de evenwijdige balken aan het plafond bleven ook in de schildering evenwijdig. Zo gemakkelijk maakte Van Hoogstraten zich er echter niet van af: hij schilderde op de bodem ook delen van (verticale) stoelpoten en een zittend hondje. Deze zijn echter elk slechts vanuit één kijkgat te zien. Daardoor was steeds duidelijk van welk van beide kijkgaten de loodrechte projectie op de bodem van het kastje gebruikt moest worden als vluchtpunt voor de verticale lijnstukken.

Tweepunts perspectief

De boeken van Vredeman de Vries bevatten ook enkele afbeeldingen in een perspectief dat ontstaat als het tafereel zo opgesteld wordt dat het hoeken van 45° met de opstaande wanden van het af te beelden gebouw of interieur maakt, zie bijvoorbeeld figuur 7. In zo'n geval zijn de twee distantiepunten op de horizon de belangrijkste vluchtpunten, terwijl het oogpunt een ondergeschikte rol als vluchtpunt speelt. Met deze bijzondere vorm van tweepunts perspectief, die *diagonaal tweepunts perspectief* genoemd wordt, kan een levendiger effect bereikt worden dan met eenpunts perspectief, terwijl de benodigde kennis over vluchtpunten dezelfde is. Toch heeft slechts een handjevol schilders in het zeventiende-eeuwse Holland zich aan deze soort perspectief gewaagd. Dat waren vooral schilders van kerkinterieurs, bijvoorbeeld Gerard Houckgeest (circa 1600 – 1661)⁵.

Het is dan ook bijzonder dat twee van de bewaard gebleven perspectiefkastjes die het interieur van een Hollands voorhuis laten zien, elk twee opstaande wanden hebben

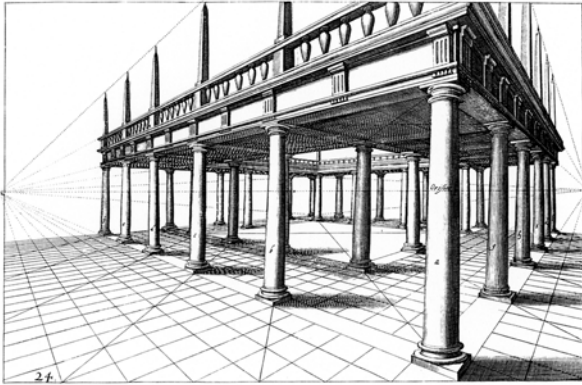


fig. 7 Hans Vredeman de Vries, *Perspective, Eerste deel, Leiden: Hendrick Hondius, 1604, fig. 24*

die in diagonaal tweepunts perspectief beschilderd zijn. Dit zijn de driehoekige perspectiefkast in Museum Bredius in Den Haag en het vijfhoekige perspectiefkastje in het Institute of Arts in Detroit⁶. De eerste dateert uit circa 1670 en wordt toegeschreven aan Pieter Janssens Elinga (1623- voor 1682), de tweede is in 1663 gemaakt, misschien net als het kastje in Londen door Samuel van Hoogstraten. De perspectief van de kast in Den Haag zullen we hieronder uitvoerig bespreken. Over de perspectief van het kastje in Detroit kunnen we kort zijn: het voorste, rechthoekige, deel is wat perspectief betreft vergelijkbaar met het rechthoekige kastje in Kopenhagen, het achterste deel heeft dezelfde vorm als de perspectiefkast in Den Haag en de perspectief van dit deel is ook op dezelfde manier opgezet.

Andere dan rechte hoeken en hoeken van 45° tussen de opstaande wanden van een af te beelden object en het tafereel komen we in de architectuur- en interieurschilderkunst van het zeventiende-eeuwse Holland alleen tegen in twee van de in Kopenhagen bewaarde perspectiefkasten, waaronder die van figuur 1. De zijwanden van deze driehoekige kasten zijn geschilderd in *niet-diagonaal tweepunts perspectief*. We komen hierop terug na de bespreking van de perspectiefkast in Museum Bredius.

De perspectiefkast van Museum Bredius

De enige nog in Nederland aanwezige zeventiende-eeuwse perspectiefkast wordt permanent tentoongesteld in Museum Bredius in Den Haag.⁷ De driehoekige kast, die zoals gezegd dateert uit circa 1670 en wordt toegeschreven aan Pieter Janssens Elinga, toont het interieur van een rechthoekig Hollands voorhuis. Het voorpaneel met het kijkgat midden in de onderzijde en de lichtopening daarboven, is niet bewaard gebleven. Figuur 8 laat een voor-aanzicht – van grote afstand – zien dat ook, in kleur, te vinden is op de website van het museum⁸. De kast is 82 cm hoog, 84 cm breed en 42 cm diep⁹. De zijwanden maken een hoek van 90° met elkaar en een hoek van 45° met de voorzijde van de kast. Dit maakte deze wanden bij

uitstek geschikt voor het afbeelden van een rechthoekig interieur in diagonaal tweepunts perspectief, wat Elinga dan ook – anders dan zijn gewoonte was¹⁰ – in dit geval gedaan heeft. Om de perspectief van deze kast te begrijpen, stellen we ons voor dat de schilder met een glazen kast van dezelfde vorm en grootte in een werkelijk bestaand rechthoekig interieur gewerkt heeft. Zie figuur 9 voor een schets van de situatie. Duidelijk is dat de perspectief van de beschilde bodem en het plafond van de kast van dezelfde eenvoudige soort is als die van het hierboven besproken rechthoekige kastje van Van Hoogstraten in Londen. De poten van de gedeeltelijk op de bodem van de kast afgebeelde stoel (die in figuur 9 niet getekend is) hebben als vluchtpunt het in de figuur aangegeven oogpunt P'' . Dit punt, de loodrechte projectie van het oog O op de bodem van de kast, ligt nu midden op de rand aan de voorzijde van de kastbodem.



fig. 8 (Toegeschreven aan) Pieter Janssens Elinga, *Interieur, circa 1670. Perspectiefkast, Museum Bredius, Den Haag*

Interessanter is de perspectief op de zijwanden van de kast. In figuur 9 zijn op de horizon van die wanden de oogpunten P en P' en de distantiepunten D_1 en D_2 , links, en D_1' en D_2' , rechts, aangegeven. Deze punten liggen alle in het oogvlak, dat is het horizontale vlak door O . Figuur 10 geeft een bovenaanzicht, waarin voor de duidelijkheid de perspectiefkast en de tegels in verhouding tot de afmetingen van het interieur te groot getekend zijn. We zien dat, door de bijzondere vorm van de kast en de manier waarop deze in het interieur is opgesteld, de kijklijnen OP en OP' evenwijdig zijn met de zijden van de diagonaal gelegde vloertegels. Uit de hierboven geformuleerde stelling volgt nu dat P en P' de vluchtpunten van die zijden op de linker- en de rechterzijwand van de perspectiefkast zijn.

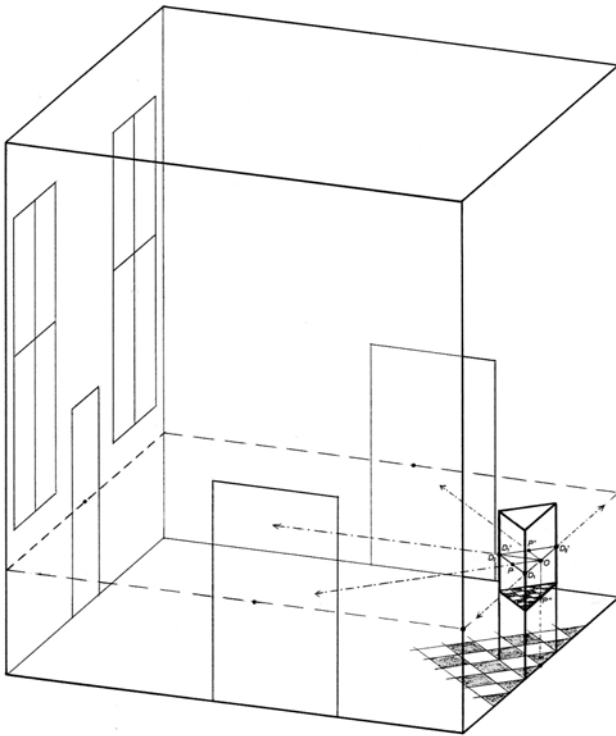


fig. 9 Hoofdlijnen en belangrijke punten van de situatie van de perspectiefkast van figuur 8 in het afgebeelde interieur. Ingenieursprojectie, schaal 1 : 72

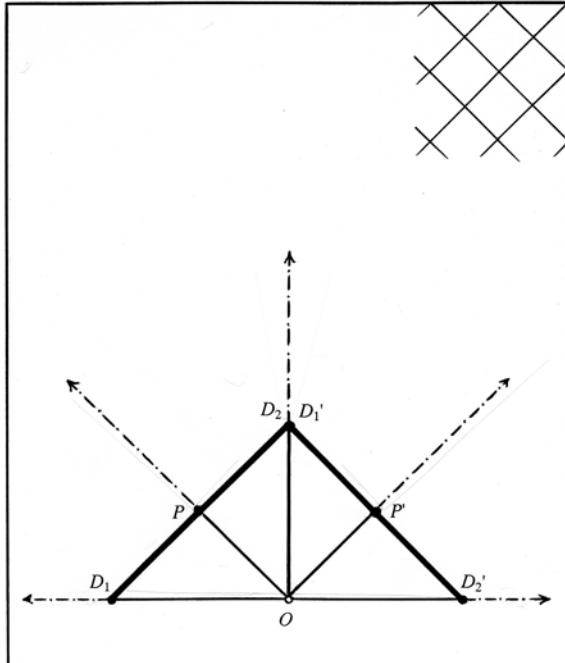


fig. 10 Boven-aanzicht van de situatie van figuur 9, niet in de juiste verhoudingen getekend

Verder blijkt uit figuur 10 dat de vorm van de kast en de plaats van het kijkgat maken dat de punten D_1 en D_2' pre-

cies op de aansluiting van de zijpanelen met de voorzijde van de perspectiefkast liggen, terwijl de punten D_2 en D_1' samenvallen op de aansluiting van de zijpanelen met elkaar. Deze distantiepunten zijn belangrijker voor de perspectief op de zijpanelen dan de oogpunten. Immers, OD_1 en OD_2' zijn niet alleen evenwijdig met diagonalen van vloertegels, maar ook met de horizontale lijnen in de achterwand van het interieur. D_1 is dus op het linkerpaneel en D_2' op het rechterpaneel van de kast het vluchtpunt van deze lijnen. Kijklijn $OD_2 = OD_1'$ is ook evenwijdig met diagonalen van vloertegels, maar bovendien evenwijdig met de horizontale lijnen van de zijwanden van het interieur. Het punt $D_2 = D_1'$ is dus het vluchtpunt van deze lijnen op de zijpanelen van de perspectiefkast.

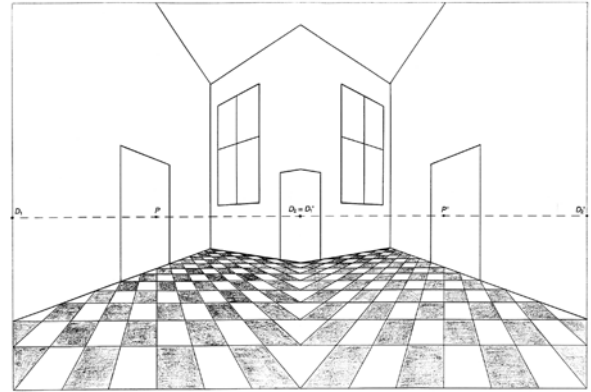


fig. 11 Uitslag van de zijpanelen van de perspectiefkast van Elinga met de hoofdlijnen en belangrijke punten van de perspectief. Schaal 1 : 16

Figuur 11 geeft een verkleinde uitslag van de zijpanelen van de perspectiefkast met een schets van de hoofdlijnen van hun beschikking. In de figuur zijn ook de horizon en de bovengenoemde oogpunten en distantiepunten aangegeven. Ga aan de hand van deze figuur na dat de constructie van Elinga's diagonaal tweepunts perspectief in overeenstemming is met wat hierboven over de vluchtpunten van de kenmerkende horizontale lijnen van de wanden en de vloer van het interieur gezegd is. Zo blijken de verlengden van de boven- en de onderzijde van het linker-raam door D_1 te gaan, terwijl de verlengden van de boven- en de onderzijde van de linkerdeur door D_2 gaan. Figuur 11 kunt u ook gebruiken om – zonder naar Den Haag te hoeven gaan – het effect te ervaren dat de perspectief van de zijwanden van de kast van Museum Bredius bij de goede manier van kijken geeft. Vergroot hier-toe de figuur¹¹, liefst tot ongeveer A3-formaat, en druk de vergrote figuur af op stevig papier of dun karton. Vouw de afdruk dubbel langs de as van symmetrie. Vouw het resultaat weer half open zo dat de beide helften, net als de zijwanden van de perspectiefkast, een hoek van 90° met elkaar maken. Houd het opgevouwen blad verticaal voor u en kijk met één oog op de hoogte van de getekende horizon, vanuit wat op dat moment het midden van het verbindingslijnstuk tussen de punten D_1 en D_2' is.

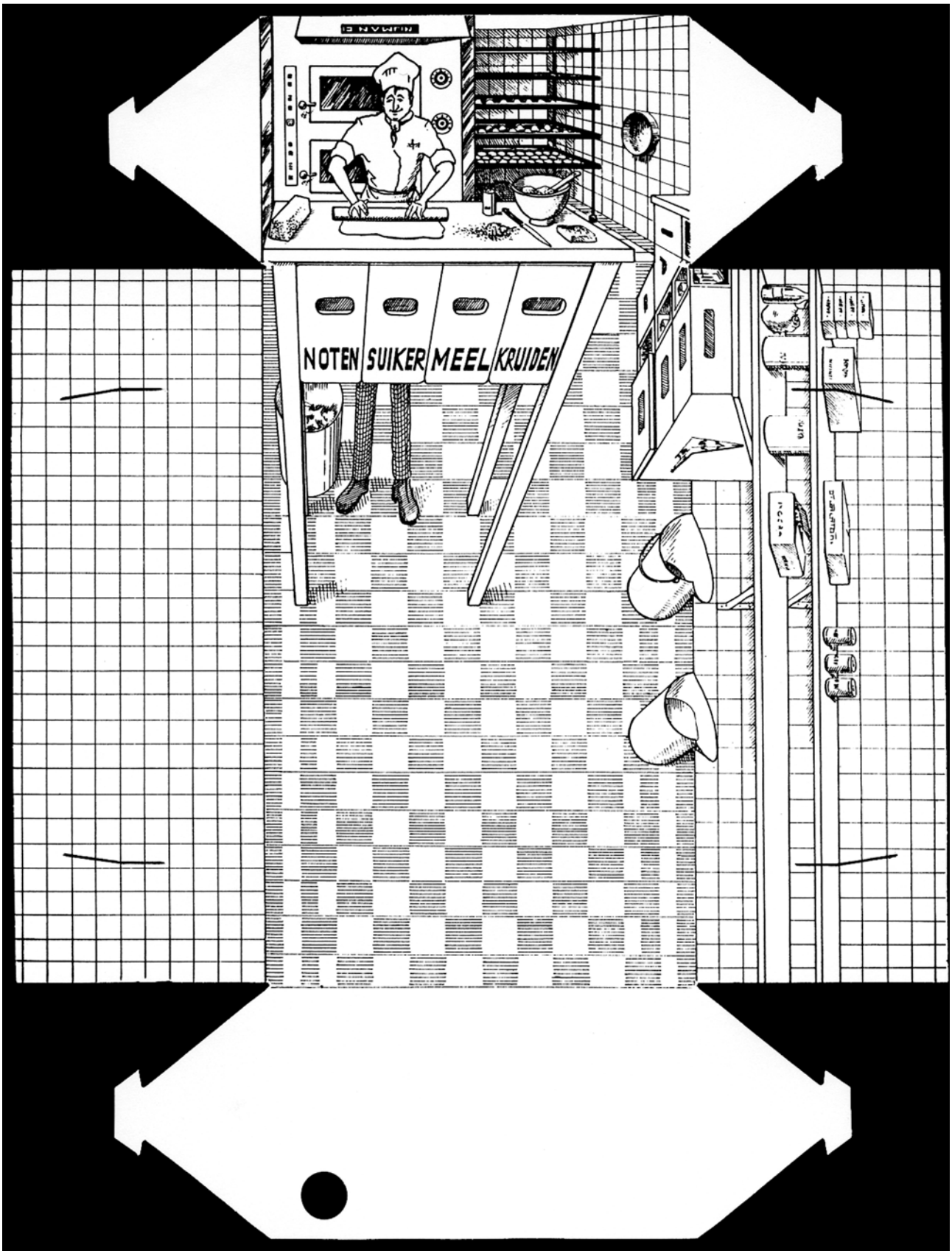


fig. 13 Uitslag van het bakkersdoosje. Schaal 1 : 1.6

Als u een bril draagt, moet u misschien van iets dichterbij of van iets verder weg kijken. Even proberen, totdat u echt een rechthoekig interieur met een vloer van diagonaal gelegde vierkante tegels ziet.

De kasten met kerkinterieurs

De in dit artikel als eerste genoemde perspectiefkast met het interieur van een protestantse kerk, zie figuur 1 en figuur 2, is net als de kast in Museum Bredius driehoekig, maar heeft minder 'mooie' hoeken. Alleen de twee zijpanelen zijn beschilderd. Deze panelen zijn 119 cm hoog en 75 cm breed, het voorpaneel is 68 cm breed, wat betekent dat de zijpanelen een hoek van 54° met elkaar en een hoek van 63° met de voorzijde maken. De kast is tot stand gekomen in de periode 1655 tot 1660, de schilder is onbekend. Hetzelfde geldt voor de pendant van deze kast met het interieur van een katholieke kerk, die zich eveneens in het Nationalmuseum van Kopenhagen bevindt. Zoals gezegd, zijn de twee driehoekige perspectiefkasten in Kopenhagen wat de perspectief op hun zijpanelen betreft uniek binnen de zeventiende-eeuwse Hollandse interieurschilderkunst. Hierin zijn namelijk noch de oogpunten, noch de distantiepunten op de horizon het vluchtpunt van belangrijke horizontale lijnen van het afgebeelde interieur. Dit blijkt uit figuur 12, waarin het bovenaanzicht is geschetst van een glazen kast van dezelfde vorm die in een rechthoekige ruimte geplaatst is zo dat het bovenaanzicht symmetrisch is. Net als in de kerkinterieurs hebben we de tegelvloer nu niet diagonaal gelegd.

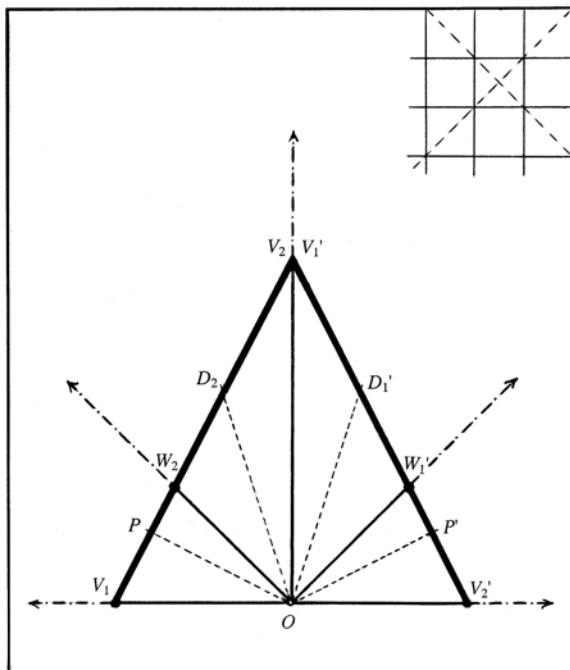


fig. 12 Boven-aanzicht van de situatie van een perspectiefkast zoals die van figuur 1 in een rechthoekig interieur met vierkante vloertegels

In figuur 12 hebben we op beide zijpanelen van de per-

spectiefkast het oogpunt en een van de distantiepunten aangegeven: links P en D_2 , rechts P' en D_1' . De kijklijnen naar deze punten zijn nu *niet* evenwijdig met zijden of diagonalen van de vierkante vloertegels of met horizontale lijnen op de zijwanden van de afgebeelde ruimte en deze punten fungeren daarom *niet* als vluchtpunten van die lijnen. De vluchtpunten van de horizontale lijnen op de achterwand van de afgebeelde ruimte en de daarmee evenwijdige zijden van de vloertegels hebben we in de figuur aangeduid met V_1 en V_2' , en de vluchtpunten van de horizontale lijnen op de zijwanden van de ruimte en de overige zijden van de tegels met $V_2 = V_1'$. Merk op dat deze vluchtpunten weer op de randen van de panelen van de perspectiefkast liggen. De vluchtpunten van de diagonalen van de vloertegels hebben we W_2 en W_1' genoemd. Uit figuur 12 blijkt dat deze punten *niet* de middens van de lijnstukken V_1V_2 en $V_1'V_2'$ zijn. Overigens zal de onbekende schilder van de perspectiefkasten in Kopenhagen zich geen zorgen gemaakt hebben over de plaats van W_2 en W_1' . Hij lijkt namelijk niet geprobeerd te hebben de tegelvloer precies te construeren, zie figuur 2.

Een twintigste-eeuws perspectiefdoosje

Aan het eind van de zeventiende eeuw raakte het publiek uitgekeken op de perspectiefkastjes. Ze werden dan ook niet meer gemaakt. Maar in de twintigste eeuw werd het idee nog een keer gebruikt, ook weer in Nederland. Hans ter Heege (Stichting Leerplan Ontwikkeling, Enschede) werd er omstreeks 1980 door verrast bij het uitpakken van de twee slagroombollen die hij in een banketbakkerswinkel in Rossum gekocht had. De bollen waren verpakt in een doosje dat bij nadere inspectie een perspectiefdoosje bleek te zijn. Hans ging terug naar de winkel, vroeg en kreeg een paar schone exemplaren en bewaarde deze om ze af en toe in workshops te (laten) gebruiken. Sommige lezers van dit artikel zullen het 'bakkersdoosje', waar Heleen Verhage (Freudenthal Instituut) me vorig jaar op attent maakte, dan ook weleens gezien hebben. Enkele drukkers van gebaksdozen en medewerkers van bakkersorganisaties herkenden het doosje ook, maar zij hebben ons – ondanks dat op de achterwand, ondersteboven, duidelijk 'NIJMAN CI' te lezen is – niet op het spoor van de tekenaar kunnen brengen. Omdat dit artikel zonder een bespreking van deze moderne variant van het zeventiende-eeuwse perspectiefkastje onvolledig zou zijn, hebben we een 'origineel' van Hans ter Heege nog maar eens uitgevouwen en zonder medeweten van, maar met veel dank aan de tekenaar (en aan Hans!) gekopieerd, zie figuur 13. Als u deze figuur met een factor 1.6 vergroot, op stevig papier of dun karton afdrukt, netjes uitknipt of -snijdt (vergeet de sleufjes links en rechts en het kijkgat niet) en in elkaar vouwt, heeft u een kopie van het bakkersdoosje op ware grootte. Door het kijkgat bekeken, zijn de benen van de bakker niet meer zo raar lang en blijkt het ladenkastje tegen de rechterzijwand gewoon rechthoekig te zijn.

Om te begrijpen hoe de perspectief van het doosje is opgezet, stellen we ons weer voor dat hiervoor een glazen doosje van dezelfde vorm en grootte gebruikt is. Dit glazen doosje heeft dan, op pootjes, in een werkelijk bestaande, rechthoekige bakkerij gestaan zo dat de opstaande wanden en de bodem van het doosje evenwijdig waren met de wanden en de vloer van de bakkerij. Dit verklaart dat de op de bodem van het doosje afgebeelde vierkante vloertegels en de op de zijwanden en het linkerdeel van de achterwand van het doosje afgebeelde vierkante wandtegeltjes hun vorm behouden hebben. De tekening op de achterwand, waarop ook gedeelten van de rechterzijwand en de vloer van de bakkerij zijn afgebeeld, is in eenpunts perspectief gemaakt. Omdat de afbeelding van de vloer van de bakkerij niet doorloopt op de zijwanden van het doosje, terwijl omgekeerd de zijwanden van de bakkerij ook niet gedeeltelijk op de bodem van het doosje zijn afgebeeld, spelen andere oogpunten dan dat op de achterwand geen rol als vluchtpunt van kenmerkende lijnen van de bakkerij zelf. Wél fungeren de oogpunten op de rechterzijwand en de bodem van het doosje als vluchtpunt voor lijnstukken van in de bakkerij aanwezige objecten zoals de doosjes op de planken, het ladenkastje, de emmers en de tafel.

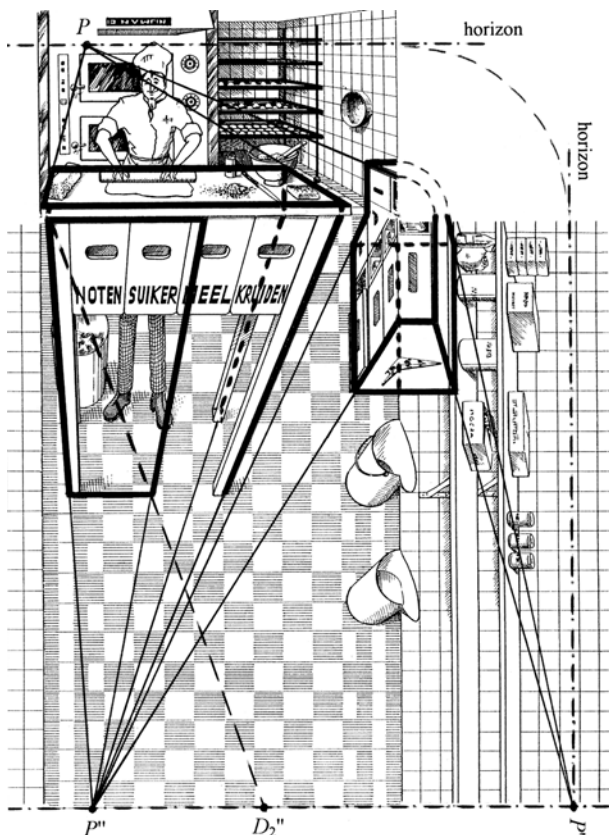


fig. 14 Een deel van de uitslag van het bakkersdoosje met vluchtpunten en hulplijnen die van belang zijn voor de perspectief

In figuur 14 is een verkleinde uitslag van de achterwand, de rechterzijwand en de bodem van het bakkersdoosje te

zien met de oogpunten P , P' en P'' . Deze punten zijn de loodrechte projecties van het middelpunt O van het kijkgat op die wanden als het doosje in elkaar gevouwen is. In de figuur hebben we door het accentueren van een aantal lijnstukken en het tekenen van verlengden van sommige van die lijnstukken laten zien dat de tekenaar op een goede manier met de perspectief is omgegaan. De lijnstukken die in werkelijkheid loodrecht op de achterwand, de rechterzijwand of de bodem van het glazen doosje stonden, heeft hij – voor zover zij op de betreffende wand afgebeeld zijn – zo getekend dat hun verlengden door P , P' of P'' gaan. En voor zover zij op een andere wand getekend zijn, heeft hij deze lijnstukken hun richting laten behouden. Dit verklaart bijvoorbeeld de knik in de rechterachterpoot van de tafel.

Verhoudingen in het bakkersdoosje

Misschien heeft de tekenaar bij de constructie van de perspectief wel uitsluitend oogpunten – en geen distantiepunten – als vluchtpunten gebruikt. Uit figuur 14 blijkt dat hij voor de constructie van de perspectief van het ladenkastje tegen de rechterwand van de bakkerij geen andere vluchtpunten nodig had, ook als hij de afmetingen van het kastje in de juiste verhoudingen wilde weergeven. Hij heeft namelijk eerst op het grondvlak van het doosje de bodem van het kastje 'op ware grootte' kunnen tekenen: vijf vloertegels breed en anderhalve tegel diep, en op het rechterzijvlak van het doosje het achtervlak van het kastje: vijf vloertegels, dat is vijf maal anderhalf wandtegeltje breed en drie wandtegeltjes hoog. De tekenaar hoefde vervolgens alleen maar lijnstukken evenwijdig aan andere lijnstukken en lijnstukken met een verlengde door P , P' of P'' te tekenen en enkele afstanden van de rechterwand van het doosje naar de achterwand over te brengen.

Lastiger is het geweest om de los van de wanden staande tafel met de bakker erachter in de juiste verhoudingen in perspectief te tekenen. Jammer genoeg hebben we niet aan de tekenaar kunnen vragen hoe hij dit aangepakt heeft. Misschien heeft hij gedeeltelijk 'op het oog' gewerkt, kijkend door het kijkgat. Als dat zo is heeft hij een goed gevoel voor verhoudingen gehad. We zullen dat aantonen door uit figuur 14 het nodige af te leiden over de lengte van de afgebeelde bakker en de afmetingen van zijn werktafel.

In de figuur hebben we op de achterwand en de rechterzijwand van het doosje de horizon getekend, door het oogpunt P respectievelijk het oogpunt P' . We zien dat de horizon bijna negen wandtegeltjes hoog is en dat dit ook geldt voor de bovenkant van de muts van de bakker. Als we aannemen dat de wandtegeltjes 20 cm bij 20 cm zijn, dan heeft de tekenaar dus een bakker getekend die in werkelijkheid, inclusief muts, zo'n 175 cm lang is en die zonder muts dus nog geen 160 cm meet. De werktafel van de bakker is, gelet op onderkanten van de poten zoals die op de bodem van het doosje getekend zijn en het iets grotere

bovenblad, ruim vijf vloertegels breed en iets meer dan drie vloertegels diep. Als de wandtegeltjes inderdaad 20 cm bij 20 cm zijn, zijn de vloertegels 30 cm bij 30 cm en dan heeft de werktafel dus een breedte van circa 160 cm en een diepte van circa 100 cm.

Om nu ook iets over de hoogte van de tafel te weten te komen, hebben we het punt D_2 op de bodem van het doosje getekend. D_2 is distantiepunt op dit horizontale tafereel, want de afstand van dit punt tot het oogpunt P is gelijk aan de afstand van O tot P en deze is, als het doosje in elkaar gevouwen is, juist de afstand – de *distantie* – van O tot de bodem van het doosje. Zie nu de dik getekende vierhoek tegen de voorkant van de tafel. Deze hebben we als volgt geconstrueerd. Eerst is de linkerzijde langs een tafelpoot, en even lang als die tafelpoot, getekend. Daarna is vanuit het bovenste punt van die zijde een hulplijn naar D_2 getrokken. Vanuit het onderste punt van de linkerzijde is vervolgens een horizontaal lijnstuk getekend dat eindigt op de hulplijn. De vierhoek heeft ten slotte een horizontale bovenzijde gekregen en een rechterzijde waarvan een verlengde door P gaat. De vierhoek is dus het beeld van een verticale rechthoek waarvan de hoogte gelijk is aan de hoogte van de tafel tot aan het werkblad. Een diagonaal van deze rechthoek gaat in de tekening na verlenging door distantiepunt D_2 . Dit betekent dat die diagonaal D_2 als vluchtpunt heeft en dus in de situatie met het glazen doosje in de bakkerij evenwijdig was met de kijklijn OD_2 . Die kijklijn maakte in die situatie – evenals nu, als het kartonnen doosje in elkaar gevouwen is – een hoek van 45° met de verticale kijklijn OP . Dus de diagonaal van de rechthoek maakte in werkelijkheid een hoek van 45° met de verticale zijde van de rechthoek. Hieruit volgt dat de rechthoek een vierkant was. Door dit vierkant te tekenen, zijn we erin geslaagd de hoogte van de tafel tot aan het werkblad op de bodem van het doosje zichtbaar te maken. Daar zien we dat het vierkant zijden heeft die ongeveer twee plus viervijfde vloertegels lang zijn, wat bij vloertegels van 30 cm bij 30 cm neerkomt op zo'n 84 cm. We concluderen dat de werktafel van de bakker – gelet op de dikte van het werkblad – een hoogte heeft van circa 90 cm. Dit is een normale werkhoogte voor een bakker die bijna 160 cm lang is.

Probeer nu zelf te bedenken hoe de tekenaar te werk gegaan zou kunnen zijn om, gegeven deze afmetingen, met behulp van de oogpunten én distantiepunt D_2 de perspectieftekening van de bakker en zijn werktafel op te zetten.

Het perspectiefdoosje als opdracht voor leerlingen

Het maken van een perspectiefdoosje kan een mooie, motiverende opdracht zijn voor leerlingen in het voortgezet onderwijs. Dat geldt in het bijzonder voor leerlingen die het Zebra-boekje *Perspectief, hoe moet je dat zien?*¹² ten minste tot en met diagonaal tweepunts perspectief, dat is tot en met op pagina 27, hebben doorgewerkt. Ter voor-

bereiding zouden zij dan nog een of twee lessen over perspectiefkastjes moeten krijgen en/of dit artikel moeten lezen. De tijd die verder voor zo'n opdracht nodig is, hangt af van de vorm van het doosje, de complexiteit van de erin aangebrachte perspectieftekeningen en de eisen die aan de vorm en de inhoud van de presentatie gesteld worden.

Een kant-en-klare schoenendoos kan als basis dienen voor een product dat wat perspectief betreft vergelijkbaar is met het bakkersdoosje. Sommige schoenendozen zijn zelfs al voorzien van een gat en kunnen zonder problemen herhaaldelijk uit en in elkaar gevouwen worden. Dit laatste is heel handig bij het tekenen, controleren, gummen en weer overtekenen. Maar wie de uitdaging aandurft om een driehoekig doosje te maken met een rechte hoek, zoals de zeventiende-eeuwse perspectiefkast in Den Haag, of misschien zelfs scherphoekig, zoals de twee perspectiefkasten met kerkinterieurs in Kopenhagen, kan zoiets natuurlijk gemakkelijk zelf uit karton snijden en vouwen.

Een groot voordeel van deze opdracht, zowel voor de leerling als voor de leraar, is dat altijd in één oogopslag duidelijk is of de hoofdzaken van de perspectief in het doosje kloppen.

Agnes Verweij, TU Delft

Dit artikel is een bewerking van de gelijknamige plenaire vrijdagmiddagvoordracht die door de auteur gehouden is tijdens de Nationale Wiskunde Dagen van februari 2001.

Noten

- [1] Meer gegevens over en afbeeldingen van de bewaard gebleven perspectiefkastjes dan in dit artikel, maar helaas geen (goede) bespreking van de constructie van de perspectief in deze kastjes, zijn te vinden in:
Blankert, Albert (1980). *Museum Bredius, Catalogus van de schilderijen en tekeningen, tweede, herziene en bijgewerkte druk*. Den Haag: Dienst voor Schone kunsten der Gemeente 's-Gravenhage, zie pp. 56-57.
Koslow, Susan (1967). 'De wonderlijke Perspectiefkast: An Aspect of Seventeenth Century Dutch Painting', *Oud Holland*, 82, 35-56.
Leeman, Fred (1975). *Anamorfosen, Een spel met waarneming, schijn en werkelijkheid*. Amsterdam: Andreas Landshoff Productions, 82-83 en 88-104.
- [2] Vredeman de Vries, Hans (1979). *Perspective, deel I (1604) en deel II (1605), toegelicht door Peter Karstkarel*. Mijdrecht: Tableau BV. Uit de beschrijving die Vredeman de Vries van zijn perspectieftekeningen geeft, blijkt dat hij niet op de hoogte was van de achtergronden van de constructieregels die hij toepaste. Constructies waarbij alleen het oogpunt en enkele distantiepunten als vluchtpunt ge-

- bruikt hoefden te worden, voerde hij wel goed uit, maar in andere gevallen maakte hij nogal eens grove fouten.
- Zie bijvoorbeeld <http://www.kfki.hu/~arthp/html/v/vermeer/index.html> en klik op 'Paintings between 1661-1670' en 'Paintings after 1670'.
- [3] Zie bijvoorbeeld <http://www.kfki.hu/~arthp/html/s/saenreda/index.html>
- [4] Afbeeldingen van en gegevens over dit perspectiefkastje zijn ook te vinden via:
<http://www.nationalgallery.org.uk/collection>
 Klik 'search' aan, vul vervolgens onder 'Search the Collection on-Line' en Artist Name in: Hoogstraten, klik ten slotte op 'Search'. Klik ook op 'show reverse' onder de eerste figuur.
- [5] Zie bijvoorbeeld <http://www.kfki.hu/~arthp/html/h/houckgee/index.html> en klik ook op 'i' onder 'Comment'.
- [6] Zie <http://www.diamondial.org/cgi-local/Dialma-ge.cgi?acc=35.101>
- [7] Het adres en de openingstijden van het museum zijn te vinden via:
<http://www.museumbredius.nl/contacts.htm>
- [8] Zie voor de werken van Elinga in de collectie van Museum Bredius, waaronder de perspectiefkast: <http://www.museumbredius.nl/schilders/elinga.htm>
- [9] In alle literatuur over deze kast, ook in de catalogus en op de website van Museum Bredius, zijn de gegevens over de hoogte en de breedte verwisseld.
- [10] Zie noot 10. Twee andere werken van Elinga zijn te vinden via:
<http://www.kfki.hu/~arthp/html/e/elinga/index.html>
- [11] De werkbladen zijn te downloaden van www.fi.uu.nl/wiskrant
- [12] Verweij, Agnes en Martin Kindt (1999). *Perspectief, hoe moet je dat zien?* Zebra-reeks deel 2. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op de eerste zaterdag in het kalenderjaar haar Wintersymposium. Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.

De bedoeling van het Wintersymposium is om het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema. Het symposium op 5 januari 2002 zal worden gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort en heeft als thema 'Winnen met Wiskunde': kan de wiskunde helpen inzicht te krijgen in situaties waar sprake is van verlies danwel winst?

In de eerste voordracht worden grafen gebruikt om interacties tussen entiteiten te representeren: samenwerking tussen bedrijven, links tussen websites, winst in een directe confrontatie in een toernooi. Ordeningsmethoden op grafen geven antwoord op vragen als: met welk bedrijf moet een alliantie worden gesloten en wie is de winnaar van het toernooi. Er zal een overzicht worden gegeven van een aantal van deze ordeningsmethoden.

Iedere coach zal uit de beschikbare groep kandidaten zijn keus zo willen maken, dat de doelstellingen zo goed mogelijk worden gerealiseerd. In de tweede lezing wordt een relatie gelegd tussen het probleem een optimaal team samen te stellen en een transportprobleem in een netwerk en wordt er aangetoond dat dit een probleem is waarvoor er een efficiënt algoritme bestaat. In de afsluitende lezing

leren we dat de wiskunde kan helpen zaken eerlijk te verdelen, ook als de waarde niet objectief is vast te stellen. Sterker nog: er zijn verdelingsprocedures waarbij iedereen meer krijgt dan waar hij in alle eerlijkheid op had kunnen rekenen. Twee van dergelijke procedures worden behandeld.

Programma

9.30-10.00	Ontvangst met koffie en thee
10.00-11.00	<i>Van sociale naar strategische netwerken</i> H. Monsuur (KIM)
11.00-11.15	Pauze
11.15-12.15	<i>Teamsamenstelling als logistiek fenomeen</i> G. Sierksma (RuG)
12.15-13.30	Pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30-14.30	<i>Win-Win procedures voor verdelingen</i> R. Bosch (KMA)

Deelname aan het symposium is gratis.

Aanmelding en verdere informatie op de website van het Wiskundig Genootschap:

<http://www.wiskgenoot.nl/wintersymposium>

Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht vóór 25 december 2001 f 17,50 over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker te Marum.

Voor verdere inlichtingen kunt u bellen met 050 3633935 (overdag) of 0594 64 16 36 ('s avonds) of e-mailen naar h.bakker@cs.rug.nl.