Ringen en Galoistheorie, 29 juni 2020, 9:00 – 12:00

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
In totaal zijn er 90 punten te behalen. Je mag gebruik maken van het dictaat, eigen aantekeningen en uitwerkingen van opgaven en oude tentamens.
Veel succes!

1. Bepaal voor elk van de volgende idealen of het een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is.

   (a) (**5 pt**) (X^2+1, X^3+1, X^4+1) in $\mathbb{F}_2[X]$.

   (b) (**5 pt**) (X^2+1, X^3+1, X^4+1) in $\mathbb{F}_3[X]$.

   (c) (**5 pt**) (X^2+1, X^4+1) in $\mathbb{Z}[X]$.

2. Bepaal de eenheden en de nuldelers van elk van de volgende ringen.

   (a) (**5 pt**) $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$.

   (b) (**5 pt**) $\mathbb{F}_3[X]/(X^2+X+1)$.

   (c) (**5 pt**) $\mathbb{F}_4[X]/(X^2+X+1)$.

3. Laat $f \in \mathbb{F}_3[X]$ een monisch irreducibel polynoom van graad 3 zijn en zij K het eindige lichaam $\mathbb{F}_3[X]/(f)$. Schrijf $\overline{X}$ voor $X + (f) \in K$.

   (a) (**6 pt**) Bewijs dat $\overline{X}$ of $-\overline{X}$ een voortbrenger is van de multiplicatieve groep K^* van K.

   (b) (**6 pt**) Bepaal een f zó dat $\overline{X}$ een voortbrenger is. (Hint: de berekeningen worden eenvoudiger als je het Frobenius-automorfisme handig gebruikt.)

Z.O.Z. voor opgave 4

4. Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) (**6 pt**) Bewijs dat $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

(b) (**6 pt**) Bewijs dat K een Galois-uitbreiding is van $\mathbb{Q}$.

(c) (**6 pt**) Zij $\pi \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ het element met $\pi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ en zij $\rho \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ het element met $\rho(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Laat

$$\beta = (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3}) \in K.$$

Bewijs dat $\pi(\beta) = (1-\sqrt{2})^2\beta$ en dat $\rho(\beta) = ((1-\sqrt{3})/\sqrt{2})^2\beta$.

(d) (**6 pt**) Zij $\alpha = \sqrt{\beta} = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})} \in \mathbb{R}_{>0}$. Bewijs dat $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$. (Hint: neem aan dat $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$; laat zien dat $\pi(\alpha) = (1-\sqrt{2})\alpha$ of $\pi(\alpha) = -(1-\sqrt{2})\alpha$; bereken dan $\pi^2(\alpha)$ en leid een tegenspraak af.)

(e) (**6 pt**) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\beta) = K$ en concludeer dat $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 8$.

(f) (**6 pt**) Bepaal de nulpunten van het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}$ en bewijs dat $\mathbb{Q}(\alpha)$ een Galois-uitbreiding is van $\mathbb{Q}$. (Let op: het is mogelijk de nulpunten te vinden zonder het minimumpolynoom zelf te bepalen.)

(g) (**6 pt**) Bewijs dat er een automorfisme τ van $\mathbb{Q}(\alpha)$ bestaat met $\tau(\alpha) = (1-\sqrt{2})\alpha$ en zo dat de beperking van τ tot $\mathbb{Q}(\beta)$ gelijk is aan π. Bewijs ook dat er een automorfisme σ van $\mathbb{Q}(\alpha)$ bestaat met $\sigma(\alpha) = ((1-\sqrt{3})/\sqrt{2})\alpha$ en zo dat de beperking van σ tot $\mathbb{Q}(\beta)$ gelijk is aan ρ.

(h) (**6 pt**) Bewijs dat $\sigma\tau = -\tau\sigma$ en bepaal de Galoisgroep van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$.

BELANGRIJK: Vergeet niet de ondertekende verklaring op pagina 3 mee te sturen met je uitwerkingen van het tentamen.

Zie pagina 3 voor de verklaring die je moet invullen en ondertekenen en meesturen met je uitwerkingen.

BELANGRIJK: Onderteken de volgende verklaring en retourneer die samen met je uitwerkingen van het tentamen, in één pdf-bestand:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat, eigen aantekeningen en uitwerkingen van opgaven en oude tentamens.

Naam (in blokletters):

Studentnummer:

Datum:

Handtekening: