Ringen en Galoistheorie, Herkansing 5 juli 2017

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

OPGAVEN

1. Stel $P(X) = X^4 + 6X + 3$.
   (a) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs voor elke $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dat het polynoom $X^n + Y^m - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + X^2 + 2)$ een lichaam is.

2. Zij R een domein en $f \in R[X]$ een monisch polynoom van graad 2. We willen bewijzen dat $R[X]/(f(X)) \cong R \times R$ precies dan als er verschillende $a, b \in R$ bestaan, zó dat $f(X) = (X - a)(X - b)$ en $a - b \in R^\times$.

   Eerst nemen we aan dat $a, b \in R$ en $a - b$ een éénheid is in R.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat $(X - a, X - b) = (1) = R[X]$.
   (b) (1 pt) Kies $f(X) = (X - a)(X - b)$. Bewijs dat $R[X]/(f) \cong R \times R$.

   Nu nemen we aan dat $f \in R[X]$ een monisch polynoom is zó dat er een isomorfisme $\phi : R[X]/(f) \to^{\cong} R \times R$ bestaat.
   (c) (1/2 pt) Stel $\phi(X) = (a, b) \in R \times R$. Bewijs dat $f(a) = f(b) = 0$.
   (d) (1 pt) De afbeelding ϕ is surjectief. Dus bestaat er $p(X) \in R[X]$ zó dat $\phi(p(X)) = (1, 0)$. Bewijs dat $p(a) = 1, p(b) = 0$ en laat zien dat hieruit volgt dat $a - b \in R^\times$.

3. Beschouw de ring R bestaande uit de rationale getallen met oneven noemer.
   (c) (1/2 pt) Bepaal de éénheden in R.
   (d) (1/2 pt) Bepaal de irreducibele elementen in R.
   (e) (1/2 pt) Bepaal de maximale idealen in R.
   (f) (1/2 pt) Bewijs dat R een hoofdideaalring is.

Z.O.Z.

4. Beschouw het polynoom $f = X^6 - 2tX^3 + 1 \in \mathbb{Q}(t)[X]$ in de variabelen X, t en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}(t)$.

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat f irreducibel in $\mathbb{Q}(t)[X]$ is.

   (b) (1/2 pt) Stel dat $\alpha \in L$ een nulpunt is van f, dat wil zeggen: $\alpha^6 - 2t\alpha^3 + 1 = 0$. Laat zien dat $\omega\alpha$ en $1/\alpha$ ook nulpunten van f zijn (hierin is $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$.

   (d) (1/2 pt) Je mag aannemen dat $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}(t)] = 12$.

   (e) (1 pt) Noem $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(t))$. Geef expliciet een element van orde 6 aan in G. Bepaal vervolgens G.