Ringen en Galoistheorie, 11 april 2018, 13:30-16:30 uur

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

OPGAVEN

1. Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Geef een tegenvoorbeeld of een bewijs.
   (a) (1/2 pt) Het product van twee hoofdidealen in een ring is weer een hoofdideaal.
   (b) (1/2 pt) Het polynoom $10X^6 - 15X^2 + 7$ is irreducibel in $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) (1/2 pt) In $\mathbb{Z}[X, Y]$ is $(X - 2, Y - X^2)$ een maximaal ideaal.
   (d) (1/2 pt) De graad $[L : K]$ van het splijtlichaam van een irreducibel polynoom $f \in K[X]$ is altijd deelbaar door de graad van f.
   (e) (1/2 pt) Als $K \subset M \subset L$ lichamen zijn, en L/K is Galois, dan is M/K Galois.
2. Beschouw het polynoom $P(X) = X^4 + 3X^3 + X^2 - 5$
   (a) (1 pt) Ontbindt $P(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
3. Bewijs de volgende twee beweringen:
   (a) (1 pt) Elk ideaal in de productring $R_1 \times R_2$ kan geschreven worden als $I_1 \times I_2$, met I_1, I_2 idealen in respectievelijk R_1 en R_2.
   (b) (1/2 pt) Zij R een ring en $R_1 \subset R$ een deelring. Zij $I \subset R$ een priemideaal. Dan is $I \cap R_1$ een priemideaal in R_1.
4. (a) (1 pt) Bepaal de éénheden van de polynoomring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.
   (b) (1 pt) Zij R een ring en $a \in R$ een nilpotent element (dat wil zeggen: er is een $n \geq 1$ zó dat $a^n = 0$). Zij $x \in R^*$ een éénheid. Bewijs dat $x - a$ een éénheid in R is (hint: begin met $x = 1$ en $n = 2$).

Z.O.Z.

5. Beschouw het polynoom $f = X^6 + 3X^3 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}$. Zij ω een primitieve derde éénheidswortel (dat wil zeggen, $\omega^3 = 1$ en $\omega \neq 1$).

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat f irreducibel in $\mathbb{Q}[X]$ is.

   (b) (1/2 pt) Stel dat $\alpha \in L$ een nulpunt is van f. Laat zien dat $\omega^k\alpha$ voor $k = 1, 2$ ook een nulpunt van f is, evenals $\sqrt[3]{3}/\alpha$.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $\alpha^3 \in \mathbb{Q}(\omega)$.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt[3]{3})$.

   (e) (1/2 pt) Er is gegeven dat $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. Bepaal $|L : \mathbb{Q}|$.

   (f) (1 pt) Laat zien dat $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\omega))$ isomorf is met $C_3 \times C_3$ (direct product van twee cyclische groepen van orde 3).