Ringen en Galoistheorie, Herkansing 4 juli 2018

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

1. Stel $P(X) = X^4 - 5X + 4$.
   (a) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dat het polynoom $X^n + Y^n - Y$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(X^3 - 2)$ een lichaam is.

2. Zij R een ring en I een ideaal ongelijk aan R. Geef het natuurlijke homomorfisme $R \to R/I$ aan met ϕ.
   (a) (1/2 pt) Zij J een ideaal in R/I. Bewijs dat $\phi^{-1}(J)$ een ideaal in R is.
   (b) (1/2 pt) Stel dat R een hoofdideaalring is. Bewijs dat R/I een hoofdideaalring is.
   (c) (1/2 pt) Geef een voorbeeld van R, I waarin R/I een hoofdideaalring is en R niet.
   (d) (1 pt) Bewijs dat J een priemideaal in R/I is precies dan als $\phi^{-1}(J)$ een priemideaal in R is.

3. Beschouw de deelring R van de rationale functies $\mathbb{Q}(X)$ van de vorm $P(X)/Q(X)$ met $P(X), Q(X)$ polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ en $Q(-1) \neq 0$.
   (a) (1/2 pt) Bepaal de éénheden in R.
   (b) (1/2 pt) Bewijs dat, op vermenigvuldiging met éénheden na, $X - 1$ het enige irreducibele element in R is.
   (c) (1/2 pt) Bepaal alle idealen in R.

4. Beschouw het irreducibele polynoom $f = X^6 - 3X^3 - 27 \in \mathbb{Q}[X]$ en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat f minstens één reëel nulpunt heeft.
   (b) (1/2 pt) Stel dat $\alpha \in L$ een nulpunt is van f, dat wil zeggen: $\alpha^6 - 27\alpha^3 - 27 = 0$. Laat zien dat $\omega\alpha$ en $-3/\alpha$ ook nulpunten van f zijn (met $\omega = e^{2\pi i/3}$ primitieve derde eenheidswortel).

   Van nu af aan laten we α een reëel nulpunt van f zijn.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ en concludeer hieruit dat $[L : \mathbb{Q}] = 12$.

Z.O.Z.

(e) (1/2 pt) Noem $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Laat zien dat er elementen $\sigma, \tau, \rho \in G$ zijn die als volgt werken:

$$\sigma : \alpha \mapsto \omega\alpha, \omega \mapsto \omega, \quad \tau : \alpha \mapsto -3/\alpha, \omega \mapsto \omega, \quad \rho : \alpha \mapsto \alpha, \omega \mapsto \omega^2.$$

(f) (1 pt) Bepaal de orde van deze elementen en hun relaties.

(g) (1/2 pt) Zij H de ondergroep van G voortgebracht door σ en ρ. Bepaal het fixlichaam van H.