

Chaos, voorspelbaarheid, en bemonstering

Jason Frank
Centrum Wiskunde & Informatica
e-mail: jason@cwi.nl

In dit college behandelen we lange-tijd simulaties van chaotische dynamische systemen, met als doel de bemonstering van zulke systemen voor statistische analyse. We onderzoeken de mate waarin men nog kan spreken van voorspelbaarheid van dergelijke systemen. Onze primaire motivatie is weers- en klimaatvoorspelling, maar de begrippen worden geïllustreerd aan de hand van simpele voorbeelden uit ook andere toepassingsgebieden.

1 Differentievergelijkingen

Voorspellingsproblemen worden doorgaans omschreven als dynamische systemen. De belangrijkste ingrediënten zijn een variabele die de toestand van het systeem beschrijft op een gegeven tijdstip, en een voorschrift voor het propageren van de toestand op één tijdstip naar de volgende.

Bijvoorbeeld, in het logistische model voor bevolkingsgroei (met beperkte capaciteit), is de oorspronkelijke populatie aangeduid met P_0 . Het voorschrift voor het propageren van de oplossing is

$$P_{n+1} = P_n + \Delta t R P_n (1 - P_n) \quad (1)$$

waarbij $R > 0$ een parameter is die de snelheid van de bevolkingsgroei bepaalt en P_n uitgedrukt wordt als een percentage van de maximale populatie. Duidelijk is dat, gegeven P_0 , we deze formule kunnen gebruiken (met $n = 0$) om P_1 te berekenen, en dat gegeven P_1 de formule (met $n = 1$) P_2 geeft, enzovoort. Deze recursie genereert een reeks

$$P_0, P_1, P_2, \dots$$

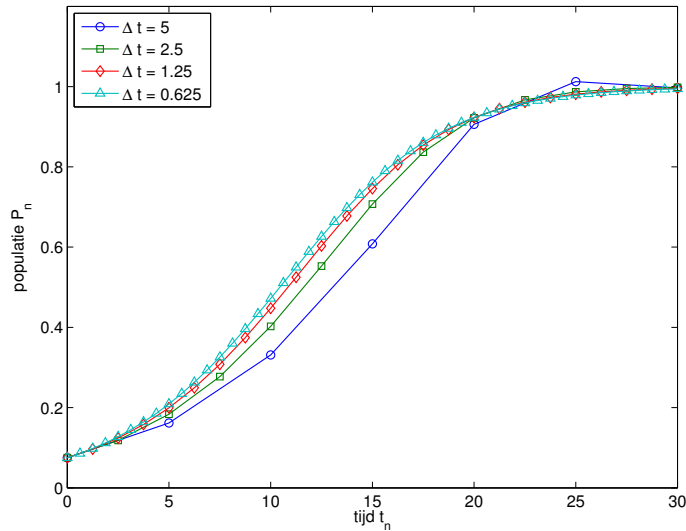
waarvan we hopen dat het de omvang van de bevolking weergeeft op de tijdstippen

$$t_0, t_1, t_2, \dots$$

waarbij $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Met andere woorden, we willen dat P_n een betrouwbare schatting is van de exacte omvang (als percentage) van de maximale populatie. Een voorschrift als (1) voor het propageren van de oplossing van tijdstip t_n naar tijdstip t_{n+1} wordt een *differentievergelijking* genoemd.

Beschouw vervolgens een interval, $t \in [0, T]$, waarin we de oplossing willen weten. We verdelen het interval in N stappen van grootte $\Delta t = T/N$ en passen (1) N keer toe om een reeks te genereren. We kunnen een grafiek maken van de punten (t_n, P_n) om de bevolkingsgroei te visualiseren (zie Figuur 1). Vervolgens nemen we $\Delta t = T/(2N)$ en nemen nu $2N$ stappen om een tweede reeks te

genereren. Wij zetten de punten (t_n, P_n) van deze nieuwe reeks in dezelfde grafiek. Als we dit proces herhalen, elke keer het aantal stappen verdubbelen, en tegelijk de stapgrootte halveren, en elke keer de reeks uitzetten in de grafiek, constateren we dat de resultaten uiteindelijk niet te onderscheiden zijn — het proces convergeert naar een continue functie.



Figuur 1: Convergentie van het logistische model voor steeds kleinere tijdstappen.

Meestal is meer dan één variabele nodig om de toestand van een systeem weer te geven. Bijvoorbeeld, de toestand van een slinger in het vlak wordt bepaald door de hoek θ ten opzichte van de zwaartekrichting en de hoeksnelheid v . Een geschikte differentievergelijking voor een slinger van lengte ℓ met zwaartekracht parameter g is:

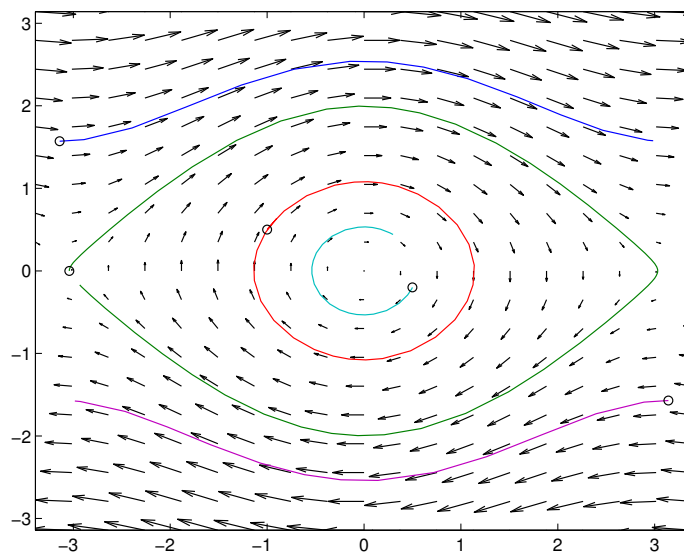
$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t v_n \quad (2)$$

$$v_{n+1} = v_n - \Delta t \frac{g}{\ell} \sin \theta_{n+1}. \quad (3)$$

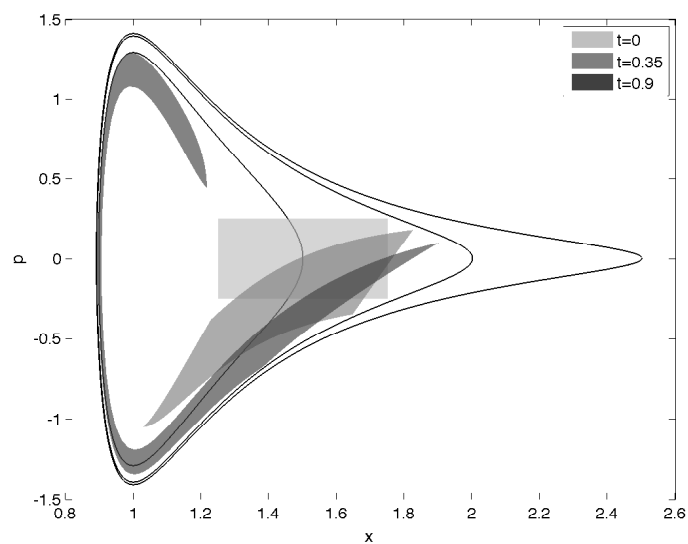
We kunnen de grafiek van de reeksen (t_n, θ_n) en (t_n, v_n) apart uitzetten als tijdsreeksen. Maar we kunnen ook de punten (θ_n, v_n) beschouwen als coördinaten in de ruimte van de toestandsvariabelen die het systeem beschrijven, dat wil zeggen de *faseruimte*. Elk punt (θ, v) in de faseruimte definieert een mogelijke toestand van het systeem. De reeks punten die gegenereerd worden via de differentievergelijkingen (2)–(3), markeren een pad of traject in de faseruimte.

Als we van een andere begintoestand (θ_0, v_0) beginnen, krijgen we een andere traject in de faseruimte. Door een aantal karakteristieke oplossingen uit te zetten krijgen we een beeld van de structuur van de faseruimte (zie Figuur 2). Soms zijn we geïnteresseerd in een hele verzameling van beginvoorwaarden. Bijvoorbeeld, soms weten we de exacte begintoestand niet, maar weten we alleen een kansverdeling op een bepaalde verzameling van mogelijke begintoestanden. Een verzameling van oplossingstrajecten wordt een *ensemble* genoemd. Een

continue verzameling van begintoestanden zal meestal worden vervormd als het ensemble evolueert (zie Figuur 3).



Figuur 2: Een aantal trajecten in de faseruimte van de slinger. De begintoestanden worden aangeduid met een cirkel.



Figuur 3: Evolutie van een ensemble.

2 Voorspelbaarheid

Sommige modellen zijn vergevingsgezind. Een kleine fout in de begintoestand zal uiteindelijk verdwijnen, en oplossingen die in de buurt van elkaar liggen convergeren naar elkaar. Dit is echter eerder uitzondering dan regel. Complexe niet-lineaire systemen vertonen meestal een zekere mate van *chaos* - nabijgelegen trajecten divergeren exponentieel.

Het meest bekende voorbeeld van een chaotisch systeem is wellicht het systeem dat voorgesteld werd door E.N. Lorenz in 1963 [2]. Het Lorenz-systeem, geschreven in de vorm van een differentievergelijking in de drie variabelen x_n , y_n en z_n , luidt

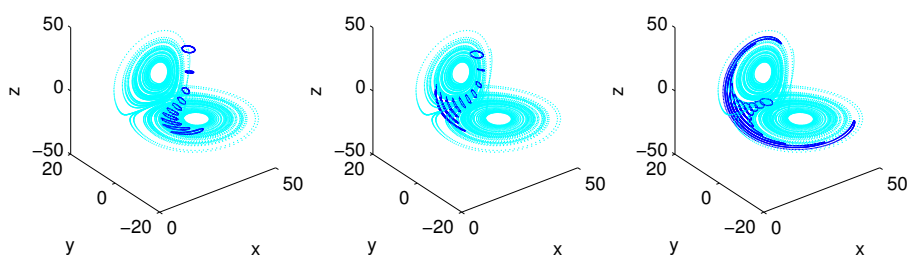
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t (-\beta x_n + y_n z_n) \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t (-\sigma y_n + \sigma z_n) \quad (5)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t (-x_n y_n + \rho y_n - z_n) \quad (6)$$

waarbij $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ en $\rho = 28$.

Om te zien hoe nabijgelegen oplossingen divergeren, beschouwen we ensemble simulaties, zoals weergegeven in Figuur 4. Deze afbeelding is geleend van [3]. Een verzameling van 1000 begintoestanden worden geselecteerd, die oorspronkelijk op een cirkel in de faseruimte liggen. Voor elk van deze toestanden, worden er 100 stappen van de differentievergelijking (4)–(6) uitgevoerd, met tijdstap $\Delta t = 0.06$. De oplossingen worden uitgezet in Figuur 4 op een achtergrond van een enkel, zeer lang traject, die de Lorenz attractor weergeeft. Ensemble simulaties kunnen worden uitgevoerd voor een grote, maar eindige verzameling van nabijgelegen beginwaarden, om de voorspelbaarheid van het probleem te onderzoeken. Afhankelijk van waar in de faseruimte de trajecten afkomstig zijn, blijven ze ofwel in de buurt van elkaar of hebben ze de neiging af te wijken, mogelijk sterk. Echte weersvoorspelling is vergelijkbaar. Relatief stabiele weerpatronen zijn veel beter te voorspellen dan onstabiele.

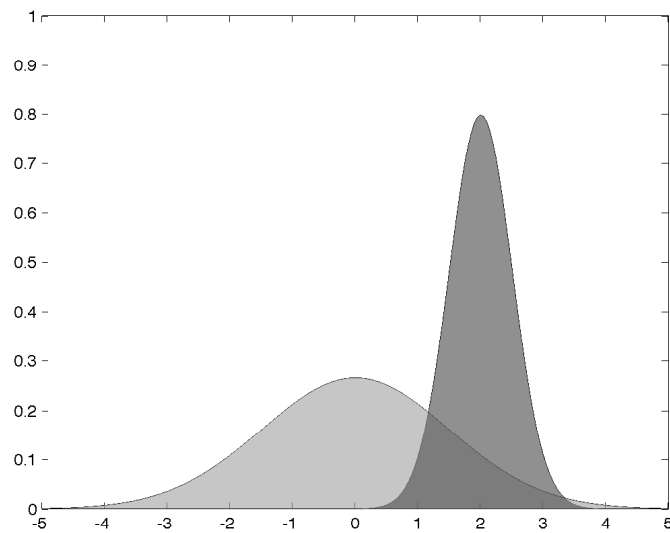


Figuur 4: Ensemble simulaties met het Lorenz-model illustreren dat sommige begintoestanden betere voorspelbaarheid hebben dan anderen. Het licht grijze traject weergeeft de Lorenz Attractor, de zwarte punten zijn de ensemble trajecten.

Ensemble simulaties vormen een nuttige instrument voor het schatten van de waarschijnlijkheid van verschillende weersscenario's. Uitgaande van de huidige toestand van de atmosfeer, worden een groot aantal simulaties gedraaid, elk

vanuit een iets verstoorde begintoestand. Hieruit kan men bepalen met behulp van statistische analyses wat de meest waarschijnlijke uitkomsten zijn (bv. “een 70% kans op regen”). Ook minder waarschijnlijke, maar potentieel gevaarlijke, scenario’s kunnen worden berekend (bv. “een 1% kans op noodweer”).

Het doel van ensemble simulaties is om een kansdichtheidsfunctie te bepalen voor de waarschijnlijkheid van een specifieke gebeurtenis. De mate waarin een bepaalde simulatie ons daadwerkelijk nieuwe informatie geeft wordt aangeduid als de *voorspellende kracht* van de simulatie. Uit één zeer lange simulatie is het mogelijk een kansverdeling te bepalen die onafhankelijk is van de begintoestand. Dit is de klimatologisch-gemiddelde distributie, geïllustreerd door het licht grijze gebied in Figuur 5. De voorspellende kracht van een ensemble simulatie is de mate waarin een voorspelde ensemble (donker grijs gebied) verschilt van de klimatologische gemiddelde. Voor meer informatie hierover, zie [3].



Figuur 5: Waarschijnlijkheids dichtheid van een bepaalde voorspelling (donker grijs) vergeleken met de klimatologische gemiddelde verdeling (licht grijs). Een dergelijke verdeling heeft voorspellende kracht.

3 Rol van het model

De differentievergelijkingen die gebruikt worden in de voorbeelden hierboven zijn niet uniek. Bijvoorbeeld, een alternatief model voor de slinger is

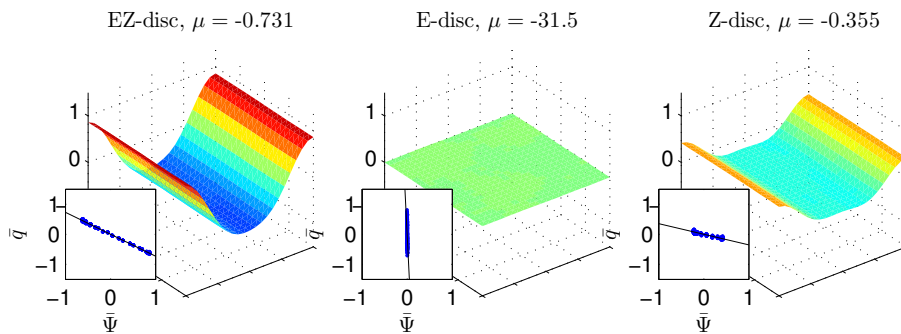
$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t v_n \tag{7}$$

$$v_{n+1} = v_n - \Delta t \frac{g}{\ell} \sin \theta_n. \tag{8}$$

Het enige verschil is dat in dit geval $\sin \theta$ wordt geëvalueerd op tijdstip n in de tweede vergelijking. Hoewel beide modellen convergeren naar dezelfde continue functie voor Δt naar nul op een vast interval $[0, T]$, geven ze zeer verschillend

gedrag voor vaste Δt wanneer een simulatie wordt gedraaid door vele oscillaties van de slinger. In het bijzonder lijkt het model (2)–(3) de periodieke beweging van de slinger goed weer te geven, terwijl de oscillaties van het nieuwe model een monotoon stijgende amplitude tonen. Het is duidelijk dat wanneer men geïnteresseerd is in het berekenen van statistische gemiddelden, het model met toenemende amplitude statistisch vertekende resultaten zal weergeven. Het cruciale verschil tussen de modellen is het behoud van energie door de eerste.

Vergelijkbaar gedrag kan worden gezien in de modellen die worden gebruikt voor weer- en klimaatsimulaties. Als voorbeeld, Figuur 6 toont het resultaat van lange simulaties met drie verschillende modellen voor een windstroming over topografie. De vlakken in de Figuur illustreren de gemiddelde windvelden in een vallei. De steilheid van het oppervlak representeert de relatieve sterkte van het windveld, dat waait langs contourlijnen van de getoonde oppervlakken. Het actuele windveld op elk moment t_n is meestal vrij complex, maar door te middelen over lange tijd wordt dit gladgestreken. Het meest opvallende van het figuur is dat de drie verschillende methoden (differentievergelijkingen) die gebruikt zijn, heel andere voorspellingen voor de heersende wind geven. In het eerste geval zijn de gemiddelde winden vrij sterk, zoals aangeduid door de steile trog. In het tweede geval, is de gemiddelde toestand windstil, en in het laatste geval matig. De verschillen in de methoden zijn te wijten aan hun verschillende behoud van fysische wetten. Huidig onderzoek richt zich op de betrouwbaarheid van numerieke simulaties voor statistische voorspelling en de constructie van statistisch nauwkeurige modellen [1].



Figuur 6: Niveau van de gemiddelde windsnelheid in een vereenvoudigd atmosferisch model, berekend op basis van drie verschillende methoden.

Referenties

- [1] S. DUBINKINA & J. FRANK, “Statistical mechanics of Arakawa’s discretizations”, *Journal of Computational Physics* **227** (2007) 1286–1305.
- [2] E. N. LORENZ, “Deterministic non-periodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** (1963) 130–148.
- [3] T. N. PALMER, F. J. DOBLAS-REYES, R. HAGEDORN & A. WEISHEIMER, “Probabilistic prediction of climate using multi-model ensembles: from ba-

sics to applications”, *Philosophical Transactions of the Royal Society B* **360**
(2005) 1991–1998.