

Verslag 1 - Hertenpopulatie

WISB134 - Modellen en Simulatie

Inleverdatum: 28 februari 2014

Op een groot landgoed leeft een populatie herten. Het aantal herten aan het einde het n -de jaar geven we aan met N_n . Het blijkt dat de grootte van de hertenpopulatie in een bepaald jaar afhangt van de populatie in het voorgaande jaar volgens een recursie van de vorm

$$N_{n+1} = \kappa \left(1 - \frac{N_n}{1000}\right) N_n, \quad (1)$$

waarin κ een nader aan te geven constante is. Als we in een zeker jaar n op $N_n \leq 0$ terecht zouden komen, dan zeggen we dat de populatie is uitgestorven. Dit wil zeggen dat $N_k = 0$ voor alle $k \geq n$.

We normeren de recursie door de nieuwe variabele $x_n = N_n/1000$ in te voeren.

(a) Laat zien dat de getallen x_n voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \kappa(1 - x_n)x_n. \quad (2)$$

Omdat x_n en N_n een factor 1000 schelen, is het, als we x_n weten, makkelijk te zien hoeveel herten er zijn in jaar n . Zo betekent $x_n = 0.14$ dat er 140 herten zijn.

We bekijken nu eerst de recursie (2) zelf, zonder daarbij aan herten- of zelfs maar dierpopulaties te denken.

(b) Bepaal voor elke waarde van κ met $0 \leq \kappa \leq 4$ de dekpunten van (2) en ga na of deze stabiel zijn of niet. Maak een grafiek waarin κ op de horizontale as is uitgezet tegen het/de (evt.) dekpunt(en) op de verticale as. Geef in het plaatje ook aan welke dekpunten stabiel zijn en welke niet.

Uit onderzoek is gebleken dat voor onze hertenpopulatie geldt dat $\kappa = 3/2$.

(c) Is er een stabiel dekpunt bij $\kappa = 3/2$ en zo ja, wat is de waarde?

Ons landgoed is niet zo vreedzaam als wij aanvankelijk dachten, de eigenaar en zijn vrienden jagen er namelijk op herten, deels uit populatieonderhoud, deels uit morbide vermaak. De eigenaar besluit dat er jaarlijks een vast aantal herten, zeg

J , kunnen worden afgeschoten. Dit betekent dat de populatie zich nu ontwikkelt volgens de formule

$$N_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{N_n}{1000} \right) N_n - J. \quad (3)$$

Hier nemen we aan dat de factor $3/2$ niet is afgenomen door de grotere stress op de dieren.

- (d) Laat zien dat de getallen $x_n = N_n/1000$ nu voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n(1 - x_n) - b, \quad (4)$$

waarin $b = J/1000$.

- (e) De eigenaar van het landgoed besluit dat een constant aantal herten van 200 op zijn landgoed wenselijk zou zijn. Is het mogelijk om J , en dus b , zo kiezen dat er ieder jaar 200 herten zijn? Is dit aantal stabiel?
- (f) Beantwoord deze vragen nogmaals voor een aantal van 100 herten.
- (g) Onderzoek nu voor $0 \leq b \leq 0.05$ de recursie (4) op dekpunten. Onderzoek of deze stabiel zijn. Zet ten slotte in een grafiek de dekpunten uit tegen de waarden van b tussen 0 en 0.05 en geef aan waar we te maken hebben met stabiliteit en waar met instabiliteit.