

Nederlands Tijdschrift voor

Natuurkunde

oktober 2014-jaargang 80-nummer 10



Rimpels in het
gelaat van God

Het wonderendje
Een fysicus in de politiek

Het Zutphense kwadrant

April vorig jaar vonden archeologen bij opgravingen in Zutphen een kwadrant van rond het jaar 1300. We onderzoeken de werking en nauwkeurigheid van dit tijdmeetinstrument. Op jacht naar de grootste foutenbron. Eric Kirchner

Bij het planten van een reeks bomen op de Houtmarkt in Zutphen werd in april 2013 een bijzondere vondst gedaan. Een bij de opgraving betrokken amateurarcheoloog haalde de afgegraven grond door een metaaldetector en vond een klein groen uitgeslagen instrumentje van messing [1]. Uit nader onderzoek bleek het om een zogenaamd kwadrant te gaan, een Middeleeuws instrument om de tijd te meten. Het is in feite een vereenvoudigde versie van een ander instrument, het astrolabium, waarvan we de werking en nauwkeurigheid eerder in dit tijdschrift bespraken [2] [3].

Hoe werkt het kwadrant?

Figuur 1 en 2 laten een foto en archeologische tekening zien van het kwadrant. Op het eerste gezicht zien we een intimiderende hoeveelheid cirkels – het is niet meteen duidelijk hoe hiermee de tijd kan worden afgelezen. Enkele maanden geleden hebben we in het wiskundetijdschrift *Pythagoras*

al de interessante wiskunde achter het kwadrant besproken [4]. Het kwadrant is gebaseerd op een vergelijking die in de zevende eeuw in India werd afgeleid. Daarmee kan de hoogte van de zon boven de horizon bij benadering worden omgezet in een tijdsmeting [5]. Deze vergelijking werd twee eeuwen later in Bagdad gematerialiseerd tot een nieuw instrument. De Pers al-Khwarizmi, beroemd als schrijver van het allereerste leerboek algebra (en naamgever van het woord algoritme) schreef ook de alleroudste verhandeling over kwadranten.

In de Islamitische wereld werden kwadranten eeuwenlang veel gebruikt. Het instrument dook in Christelijk Europa voor het eerst op in de twaalfde eeuw, en zou er tot aan de zeventiende gebruikt worden. Helaas zijn in Europa maar enkele exemplaren bewaard gebleven. Alle reden om het Zutphense exemplaar goed te onderzoeken.

Op grond van de belettering en de bodemstratificatie waarin het kwa-

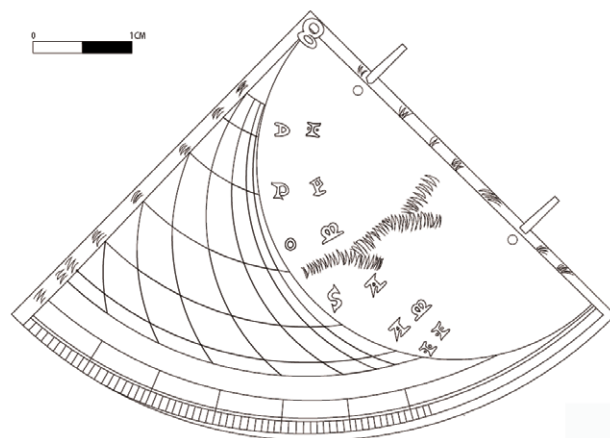
drant is gevonden dateren Zutphense archeologen de vondst rond het jaar 1300. Deze datering is belangrijk, want omstreeks deze periode ging Europa over van een tijdrekenstelsel met ongelijke uren naar een stelsel van gelijke uren. Voorheen deelde men de tijd van zonsopkomst tot zonsondergang op in twaalf 'uren'. Omdat op die manier de uren 's zomers langer duren dan 's winters, worden dit tegenwoordig 'ongelijke uren' genoemd. Rond het jaar 1300 werd overgegaan op het ook nu nog gebruikte stelsel van gelijke uren.

Het Zutphense kwadrant dateert dus uit de overgangperiode tussen de beide systemen. Het ontwerp van de cirkels in figuur 1 en 2 laat zien dat de ontwerper van dit kwadrant heeft geprobeerd om met het nieuwe systeem van gelijke uren te werken [4]. Hier zullen we onderzoeken in hoeverre dit gelukt is.

Figuur 3 illustreert hoe met het kwadrant een tijdsmeting wordt uitgevoerd. Op een willekeurig moment



Figuur 1 Foto van het Zutphense kwadrant. Het kijkgat van het onderste vizier is rechtsonder zichtbaar. Foto: Gemeente Zutphen.



Figuur 2 Archeologische tekening van het Zutphense kwadrant, met maancirkels ('horizontale bogen') en uircirkels ('vertikale bogen'). Illustratie: Gemeente Zutphen.

wordt met behulp van de twee kijkgaten (vizieren) aan de zijkant van het instrument de hoogte van de zon boven de horizon gemeten. Dat gaat het makkelijkst door de schaduw van de vizieren op een wit vlak te laten vallen (zie figuur 4). Als de zonneprojecties van de gaten in beide vizieren over elkaar heen vallen, dan kan de zonnehoogte afgelezen worden met het schietlood.

We gebruiken nu de maandcirkels, die in figuur 3 in paars zijn aangegeven. De letters in de archeologische tekening (figuur 2) laten zien welke maanden de verschillende cirkels aangeven. Zo staat bovenaan D, I voor december/januari, en daaronder N, F voor november/februari.

Op de verticale loodlijn voor de zojuist gemeten zonnehoogte wordt de datum gezocht met behulp van de maandcirkels. Met een kraal wordt deze positie gemarkeerd (zie figuur 3). De plaats waar die markering een uurcirkel snijdt (in rood aangegeven in figuur 3) bepaalt de uuraflezing. Deze uuraflezing is altijd ten opzichte van het tijdstip T waarop de zon het hoogste punt aan de hemel bereikt. Zoals we eerder al lieten zien [3] [4], geldt voor alle plaatsen in de tijdzone van Nederland dat bij benadering

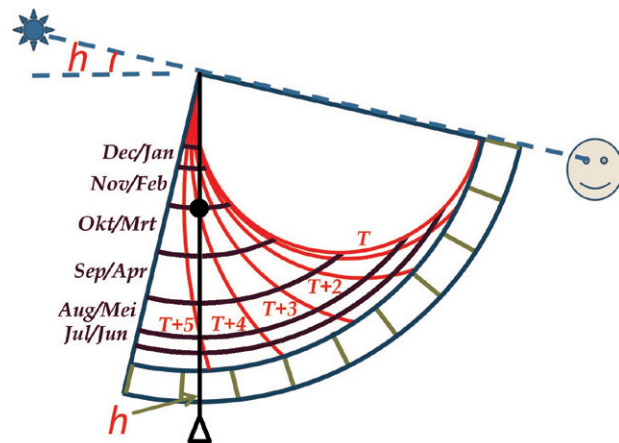
$$T = 13 : 00 - \phi_{OL} / 15^\circ \text{ uur} \quad (1)$$

waarbij ϕ_{OL} de geografische oosterlengte is van de lokatie van waarneming. Bij zomertijd moet hier uiteraard een extra uur bij worden geteld.

Ontworpen voor Zutphen?

Maar de hoogte van de zon boven de horizon hangt niet alleen af van datum, tijdstip en geografische lengtegraad. Ook de geografische breedtegraad θ_{NB} is van belang. Omdat de rotatie-as van de aarde een hoek $\varepsilon = 23,4^\circ$ maakt met de normaalvector op het vlak van de aardbaan, bereikt de zon bijvoorbeeld 's zomers een maximale hoogte van $90^\circ + 23,4^\circ \theta_{NB}$ en 's winters $90^\circ - 23,4^\circ \theta_{NB}$.

In de archeologische tekening van het Zutphense kwadrant lezen we nu eenvoudig af dat de ontwerper er van uit



Figuur 3 Schets van een tijdsmeting op 1 november. De zwarte kraal is geplaatst ter hoogte van de juiste maandcirkel (in paars aangegeven). Door de zonnehoogte h te meten, komt de kraal over de rode uurcirkel voor $T+4$ uur te liggen. De af te lezen tijd is dan ook vier uur na het tijdstip waarop de zon haar hoogste punt bereikt in Zutphen (12:42 uur). De tijd is dan ook 16:42 uur.

ging dat de maximale zonnehoogte 's zomers $64,5^\circ$ bedroeg. Dit is immers de hoek h op het moment dat de zon langs de onderste maandcirkel (gemarkeerd met de symbolen I.I voor juni/juli) de uurcirkel T (zie figuur 3) snijdt. Op dezelfde manier lezen we af dat de ontwerper voor de maximale zonnehoogte in de winter uitging van 14° . Als we uit deze twee gegevens de noorderbreedte bepalen, dan leveren de winterse en zomerse maandcirkel respectievelijk $\theta_{NB} = 52,6^\circ$ en $48,9^\circ$. Zutphen ligt op een noorderbreedte van $52,1^\circ$, dus de winterwaarde klopt aardig maar de zomerwaarde zit er flink naast.

Met wat nader onderzoek ontdekten we de reden voor deze discrepantie. De gradenverdeling onder aan het kwadrant blijkt namelijk niet erg nauwkeurig. Voor hoeken onder de 50° blijft de afwijking kleiner dan $0,4^\circ$ en is dus wel acceptabel. Voor winterse waarnemingen volstaan deze hoeken. Voor grotere hoeken wijkt de gradenboog op het kwadrant verder af van een moderne gradenboog en ontstaat er een fout van circa $1,5^\circ$. De plek waar de onderste maandcirkel de uurcirkel T snijdt komt dan ook niet overeen met een zonnehoogte van $64,5^\circ$, zoals de gradenboog van het kwadrant lijkt aan te geven, maar van $62,8^\circ$. Volgens de eerder gegeven vergelijking komt dat overeen met een locatie op $50,6^\circ$ Noorderbreedte. Op dezelfde manier levert het nameten van de winterboog een Noorderbreedte op van $52,9^\circ$. Beide waarden liggen behoorlijk dicht bij de werkelijke

breedtegraad van Zutphen, $52,1^\circ$. De plaatsing van de maandcirkels op het kwadrant laat daarmee zien dat het instrument inderdaad voor een plaats in Nederland is ontworpen (of voor andere plaatsen op gelijke breedtegraad).

De genoemde afwijking in de gradenboog van het kwadrant zou veroorzaakt kunnen worden doordat het hele kwadrant enigszins verbogen uit de grond te voorschijn is gekomen. Of het kwadrant na die verbuiging nog gebruikt is voor tijdmetingen is niet bekend, maar als dat het geval is dan zal dat hebben bijgedragen

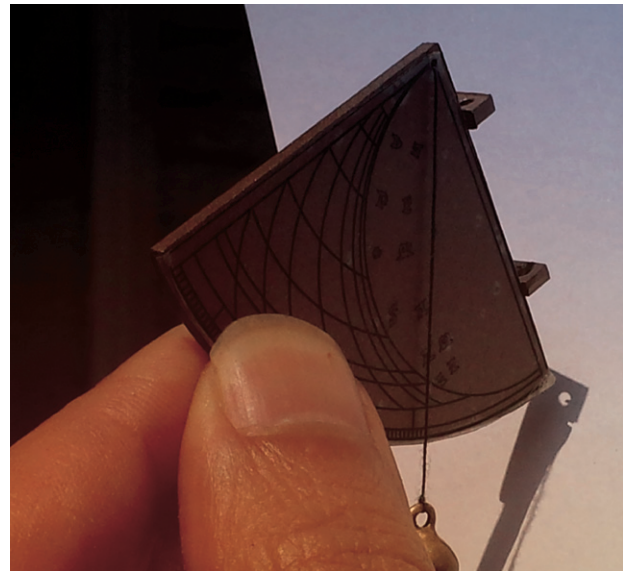
tot fouten in de tijdmeting.

Praktijktests

Om de nauwkeurigheid van het Zutphense kwadrant te testen, hebben we het instrument op ware grootte nabgebouwd. Van plastic maakten we de kwadrantvorm, compleet met de twee vizieren. We kozen hiervoor polycarbonaat (Lexan) uit, omdat dat goed verlijmbaar en ook nauwkeurig te zagen is. Op het kwadrant brachten we een transparante sticker aan, waarop de archeologische tekening van het Zutphense kwadrant (figuur 2) was afgedrukt. Met garen en kraal maakten we een schietlood. Het resultaat is afgebeeld in figuur 4.

Met deze replica voerden we een reeks tijdmetingen uit. Omdat de tijdmeting afhankelijk is van datum en tijdstip, hebben we geprobeerd door het jaar heen dagen te selecteren waarop de zon zo veel mogelijk uren zichtbaar was. Op de dag van een waarneming werd bij voorkeur elk uur, soms zelfs elk half uur een tijdmeting uitgevoerd. De lettermarkeringen in figuur 2 lijken aan te geven dat de maandcirkels van het kwadrant steeds overeenkomen met de overgang naar een nieuwe maand. Daarom hebben we onze tijdsmeting steeds op de eerste dag van de maand proberen te doen. Alleen de datum waarop de zon de maximale en minimale hoogte bereikt (ongeveer op 21 juni en 21 december) vormden hierop een uitzondering.

Als de zon op een geselecteerde dag niet zichtbaar was, dan stonden we onszelf toe om de meting hooguit



Figuur 4 Foto's van onze replica van het Zutphense kwadrant. De zonneprojectie van het bovenste vizier (links) valt op het onderste vizier, of (rechts) valt samen met die van het onderste vizier, zoals de schaduw op een wit vel papier hier laat zien.

twee dagen later of eerder uit te voeren om op deze manier data te completeren. Op deze manier werden meetdata verkregen voor 22 en 23 juni, 1 augustus, 1 en 2 september, 29 september en 1 en 2 december. Door bewolking was het niet mogelijk om rond 1 november te meten.

Op deze acht meetdagen werden in totaal 81 tijdmetingen uitgevoerd. Alle tijdmetingen werden gedaan in Leiden Noord. Omdat deze locatie vrijwel dezelfde breedtegraad heeft als Zutphen ($\Delta\theta_{NB} < 0,1^\circ$) was het mogelijk het kwadrant hiervoor ongewijzigd te gebruiken. Het verschil in lengtegraad tussen Zutphen en Leiden-Noord zorgt er natuurlijk wel voor dat het tijdstip T waarop de zon overdag het hoogste punt bereikt, verschilt. Voor de bepaling van de meetnauwkeurigheid van het kwadrant speelt dat echter geen rol.

Waar zit de meetfout?

Voor de tijdmeting vinden we een gemiddelde absolute fout van 31 minuten. Dat is veel. Twintig procent van de metingen leverde zelfs een fout op van meer dan 46 minuten.

Waarom is die meetfout zo groot? We hebben een paar mogelijke verklaringen getest.

Meting van de zonnehoogte

Omdat het Zutphense kwadrant behoorlijk klein is, zou de meting van de zonnehoogte een belangrijke foutenbron kunnen vormen. We hebben dit onderzocht door voor alle metingen ook te berekenen wat de zonne-

hoogte theoretisch zou moeten zijn. De benodigde wiskundige vergelijkingen zijn met enige vasthoudendheid trigonometrisch af te leiden [6]. Om rekenfouten te vermijden hebben we de berekeningen geverifieerd met de website van de astronomische afdeling van de Amerikaanse marine [7].

Uit deze verificatie bleek dat de gemiddelde absolute fout in de bepaling van de zonnehoogte $1,0^\circ$ bedraagt. Dit veroorzaakt een bijdrage aan de fout in de tijdmeting van gemiddeld tien minuten. De totale meetfout is echter bijna altijd veel groter. Bovendien is er nauwelijks een correlatie tussen de fout in de tijdmeting en die in de zonnehoogte. Het meten van de zonnehoogte is dan ook weliswaar een significante, maar niet de dominante foutenbron in de tijdmeting met een kwadrant.

Uitlijning

We vonden een gemiddelde (niet-absolute) fout in de meting van de zonnehoogte van $-0,7^\circ$. Deze fout moet ontstaan zijn bij de constructie van de replica, waarbij we op het oog en met een waterpas uitlijnden. Ook deze uitlijnfout is te klein om de gevonden meetfout te verklaren.

Metingen rond het middaguur

Van de zeventien metingen met de grootste meetfout waren er acht uitgevoerd rond het middaguur, dat wil zeggen minder dan een uur voor of na het punt van grootste zonnehoogte. In die periode kun je een relatief grote

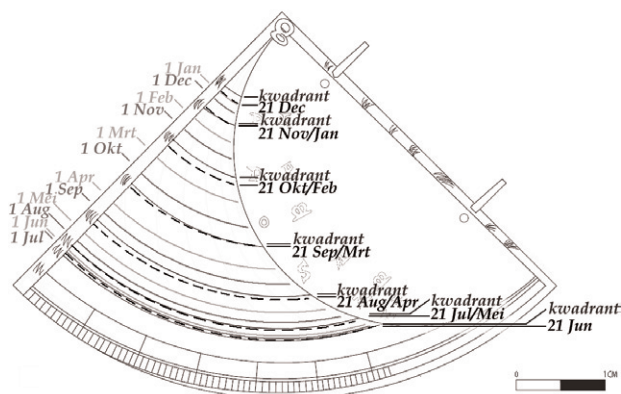
meetfout verwachten, omdat de zon dan nauwelijks van hoogte verandert. Als we deze metingen buiten beschouwing laten dan vinden we met het Zutphense kwadrant nog steeds een meetfout van gemiddeld 27 minuten.

Interpretatie van maandcirkels

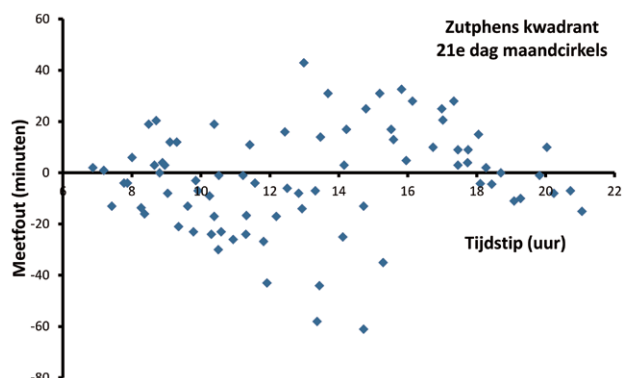
Ten slotte bedachten we een andere mogelijke foutenbron. We waren er in onze interpretatie van de meetgegevens van uitgegaan dat de scheidslijn die op het kwadrant getekend wordt tussen de maanden verwijst naar de eerste dag van de maand. Zo lijkt het logisch dat de maandlijn tussen M (voor mei) en I (voor juni) de zon-eposities voor 1 juni aangeeft. Maar klopt deze aanname wel?

Een eerste aanwijzing dat dit niet het geval is vormen de uiterste maandcirkels, die de gang van de zon beschrijven op de kortste dag van het jaar (de bovenste maandcirkel) en de langste dag van het jaar (de onderste maandcirkel). Die dagen vallen elk jaar ongeveer op 21 december en 21 juni. Stel eens dat ook alle andere maandcirkels zouden gelden voor de 21^e dag van de maand, in plaats van de eerste dag?

Om dit idee te testen hebben we met de eerdergenoemde moderne astronomische algoritmes de maandcirkels berekend voor zowel de eerste als de 21^e dag van elke maand. In figuur 5 vergelijken we deze berekende cirkelbogen met de bogen op het Zutphense kwadrant. Wat opvalt is dat de bogen op het Zutphense kwadrant goed overeenkomen met de berekende bo-



Figuur 5 Uurcirkels zoals aangetroffen op het Zutphense kwadrant (bogen gemarkeerd met het woord kwadrant), en zoals berekend voor de eerste en de 21^e van elke maand.



Figuur 6 Meetfout met het Zutphense kwadrant. Het originele ontwerp van het Zutphense kwadrant is gebruikt. We gaan ervan uit dat de maandcirkels betrekking hebben op de 21^e dag van elke maand (zie tekst).

gen van de 21^e dag van elke maand. De berekende bogen van de eerste dag van elke maand wijken behoorlijk ver af van de maandbogen op het Zutphense kwadrant. Bovendien vallen de berekende bogen niet samen in paren: op bijvoorbeeld 1 maart en 1 oktober bereikt de zon niet dezelfde maximale hoogte boven de horizon, omdat deze data niet hetzelfde aantal dagen verwijderd zijn vanaf de zonnnewendes rond 21 juni en 21 december. Maandbogen voor de 21^e van elke maand vallen wél samen in paren. Zo zijn 21 maart en 21 september beide drie volle maanden verwijderd van een zonnnewende. Overigens gold rond het jaar 1300 nog niet de huidige Gregoriaanse kalender en was het begin van elke maand verschoven ten opzichte van onze kalender. Maar die verschuiving bedraagt geen 21 dagen.

Nieuwe resultaten

We bekijken nu onze meetgegevens met het Zutphense kwadrant nog eens en nemen ditmaal aan dat de maandcirkels de 21^e dag van elke maand aangeven. We vinden dan dat

de gemiddelde meetfout zakt van 31 naar 15 minuten: een aanzienlijke verbetering! De meetnauwkeurigheid is vrijwel hetzelfde als de beste resultaten die we eerder vonden voor een ander Middeleeuws tijdinstrument, het astrolabium. Bovendien zagen we hierboven al dat de onnauwkeurigheid in de meting van de zonneshoogte al gauw tot een fout in de tijdmeting van tien minuten leidt. Een kwadrant van dit formaat kan dan ook niet veel nauwkeuriger worden dan wat we met het Zutphense ontwerp vinden.

De meetfouten die we nu vinden zijn in figuur 6 uitgezet tegen het tijdstip van de meting. We zien dat de grootste meetfouten nog steeds optreden rond het middaguur. In de verzamelde meetdata worden de twintig procent grootste afwijkingen, die allemaal een meetfout hebben van minstens 25 minuten, voor bijna de helft veroorzaakt door metingen die werden gedaan hooguit een uur voordat of nadat de zon zijn hoogste punt bereikt. We zagen hierboven al dat het logisch is dat de meetfout midden op de dag het grootst is.

Figuur 6 bevat alle meetgegevens van het hele jaar. De meetfout in de winter is echter groter dan in de zomer. In de wintermaanden komt de zon maar weinig boven de horizon. Voor de maanden december en januari staan de uurcirkels op het kwadrant dan ook erg dicht op elkaar en is een afleesfout van een half uur makkelijk gemaakt.

Dank

De auteur dankt Arthur van Rooijen voor het maken van de plastic basisvorm van het kwadrant.

Eric Kirchner (1966) studeerde theoretische natuurkunde in Utrecht, en promoveerde in de quantumchemie aan de Vrije Universiteit Amsterdam.

Sinds 1996 werkt hij als scientist voor een chemische onderneming en onderzoekt de optica en kleur van autolakken.

ekirchnr@xs4all.nl



Referenties

- 1 B. Fermin en D. Kastelein, *Het Zutphense kwadrant*. Zutphense Archeologische Publicaties 80, 2013.
- 2 E. Kirchner, *Hoe werkt een astrolabium?*, *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, mei 2013, 140-144.
- 3 E. Kirchner, *Metten met een astrolabium*, *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, juli 2013, 300-303.
- 4 E. Kirchner, *Het Zutphense kwadrant: een Middeleeuws polshorloge*, *Pythagoras*, september 2013, 20-23.
- 5 G. van Bemmelen, *The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry*, blz. 210 en 211.
- 6 A. Goddijn, *De Ster van de dag gaat op en onder*, Epsilon uitgaven, 2012.
- 7 Website Amerikaanse Navy. <http://aa.usno.navy.mil/data/docs/AltAz.php>.