Tentamen Analyse in meer variabelen 25 juni 2024

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

Opgave 1 (confocale coördinaten). Voor $U =]0,\infty[\times]0,\infty[$ definieer $f : [0,\infty[\times U \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(y,x_1,x_2) \;=\; y^2 \;-\; y(x_1^2+x_2^2+1) \;+\; x_1^2$$

waarbij $y \in [0,\infty[$ en $x \in U$.

(i) Bewijs dat er voor elke $x \in U$ getallen $y_1 = y_1(x) \in \mathbb{R}$ en $y_2 = y_2(x) \in \mathbb{R}$ bestaan zó, dat

$$f(y_1,x) \;=\; 0 = \; f(y_2,x) \quad \text{en} \quad 0 < y_1 < 1 < y_2 \;.$$

Zijn deze oplossingen uniek? *Hint:* gebruik de tussenwaardestelling.

Definieer hiermee

$$\begin{array}{rccc} \Phi \;:\; & U & \longrightarrow & V \\ & x & \mapsto & (y_1(x), y_2(x)) \end{array}$$

waarbij $V = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y_1 < 1 < y_2\}$.

(ii) Toon aan dat $\Phi : U \longrightarrow V$ een bijectieve afbeelding is, door te bewijzen dat voor elke $y \in V$ de vergelijking $\Phi(x) = y$ een unieke oplossing $x = \Psi(y) \in U$ heeft, en dat geldt:

$$\Psi(y) \;=\; \left(\sqrt{y_1y_2}, \sqrt{(1-y_1)(y_2-1)}\right) \;.$$

Hint: de coëfficienten van de kwadratische veelterm f in y geven som en product van de wortels.

(iii) Laat zien dat $\Psi \in C^\infty(V,U)$ en ga na dat voor $\Psi(y) = x$ geldt dat

$$\det D\Psi(y) \;=\; \frac{y_2 - y_1}{4x_1x_2} \;.$$

Leidt hieruit af dat zowel Ψ als Φ een C^∞–diffeomorfisme is.

Voor elke $y \in J = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \neq 1\}$ introduceren we nu $V_y \subseteq \mathbb{R}^2$ en $g_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$V_y \;=\; g_y^{-1}(1) \quad \text{en} \quad g_y(x) \;=\; \frac{x_1^2}{y} + \frac{x_2^2}{y-1} \;\;.$$

Merk op dat V_y voor $0 < y < 1$ een hyperbool is en voor $1 < y$ een ellips.

(*iv*) Ga na dat $\quad x \in V_y \iff f(y,x) = 0$.

(*v*) Bewijs dat elke $x \in U$ op precies één hyperbool en ook op precies één ellips uit de collectie $\{V_y \mid y \in J\}$ ligt. En omgekeerd, dat voor elke $(y_1, y_2) \in V$ de hyperbool V_{y_1} en de ellips V_{y_2} precies één snijpunt in U hebben, nl. $x = \Psi(y_1, y_2)$. *Hint:* gebruik onderdeel (*ii*).

(*vi*) Voor $x = \Psi(y_1, y_2) \in U$ toon aan, dat de hyperbool V_{y_1} en de ellips V_{y_2} in het punt x loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2 (het Lichaam van Viviani). Beschouw de verzameling

$$L \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq \min(1 - x_3^2, x_1) \right\}$$

die ontstaat als doorsnijding van de eenheidsbol in $\mathbb{R}^3$ en van een volle cilinder rond $\{(\frac{1}{2}, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$. Dan wordt de rand $\partial L = V_1 \cup V_2$ gegeven door

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 \,\} \\ V_2 &= \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - x_3^2 \,\} \;\;. \end{aligned}$$

(*i*) Bewijs dat $V_1 \cap V_2 = \operatorname{im} \phi$ het beeld is van

$$\begin{array}{rccl} \phi : &]{-\pi}, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \alpha & \mapsto & (\cos^2\alpha, \cos\alpha \sin\alpha, \sin\alpha) \end{array} \;\;.$$

(*ii*) Ga na dat de restricties van ϕ tot $]{-\pi}, 0[$ en tot $]0, \pi[$ gladde inbeddingen zijn. Wat gebeurt er in de randpunten?

(*iii*) Toon aan dat de lengte van $V_1 \cap V_2$ gelijk is aan $\quad 4\sqrt{2} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha}\, d\alpha$ (een elliptische integraal die niet te primitiveren is).

(*iv*) Laat zien dat de loodrechte projectie van V_1 op het (x_1, x_2)–vlak $\{x_3 = 0\}$ gelijk is aan de verzameling $D \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ met

$$\begin{aligned} D &= \{\, y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq y_1 \,\} \\ &= \{\, r(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq \cos\alpha \,\} \end{aligned}$$

en ga na dat $\quad L \;=\; \left\{ (y, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in D,\, |x_3| \leq \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \right\}$.

(*v*) Verifieer dat $\quad \operatorname{vol}(L) \;=\; \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{8}{9}$. $\quad$ *Hint:* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3}$.

(*vi*) Bewijs dat de oppervlakte van het deel V_1 van de sfeer gelijk is aan $2\pi - 4$.

(*vii*) Toon aan dat de oppervlakte van het deel V_2 van de cilinder gelijk is aan 4.

De oppervlakte van de rand ∂L is dus gelijk aan 2π.