

Tentamen Analyse in meer variabelen 24 juni 2025

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, elektronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

Opgave 1 (deelvariëteiten) Zij $M \subseteq E$ een deelvariëteit en $\Phi : E \rightarrow E$ een diffeomorfisme. Ga na dat ook $\Phi(M)$ een deelvariëteit is.

Opgave 2 (simplex) Zij $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$ de open deelverzameling gegeven door

$$\Delta_n := \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z_i > 0 \text{ voor } i = 1, \dots, n \text{ en } \sum_{i=1}^n z_i < 1 \right\}$$

en

$$\Sigma_{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \text{ voor } i = 1, \dots, n \text{ en } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

het $(n-1)$ -simplex zonder rand.

(i) Voor $n = 2$ bereken de Jacobi-determinant $\det D\Psi(y)$ van

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto z := (y_1 y_2, (1 - y_1) y_2) \end{aligned} \tag{1}$$

en bewijs dat de beperking van (1) tot $]0, 1[^2$ een diffeomorfisme is met beeld $\Psi(]0, 1[^2) = \Delta_2$.

Definieer $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ recursief als volgt. Voor $y \in \mathbb{R}^n$ en gegeven $Z_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ zij

$$Y_n = (Z_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (2a)$$

$$X_n = Y_n + (1 - y_{n-1})E_n \quad (2b)$$

$$Z_n = y_n X_n \quad (2c)$$

met

$$E_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

een kanonieke basisvector van $\mathbb{R}^n$.

(ii) Verifieer dat dan

$$\Psi(y) = z := Z_n$$

voor $Z_1 = y_1 \in \mathbb{R}^1$ in het geval $n = 2$ bovenstaande (1) reproduceert en dat in het algemeen

$$z_j = (1 - y_{j-1}) \prod_{i=j}^n y_i \quad (\text{voor } j = 1, \dots, n \text{ met } y_0 := 0)$$

de componenten van $z = \Psi(y)$ zijn, ofwel

$$z = (y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n, (1 - y_1) y_2 \cdots y_{n-1} y_n, \dots, (1 - y_{n-2}) y_{n-1} y_n, (1 - y_{n-1}) y_n) .$$

(iii) Bereken de Jacobi-matrix van Ψ in y en bewijs voor $y \in]0, 1[^n$ dat

$$\det D\Psi(y) = y_2 y_3^2 \cdots y_{n-1}^{n-2} y_n^{n-1} .$$

Hint: tel bij elke rij in de Jacobi-matrix steeds al de voorgaande rijen op.

(iv) Laat zien dat $\Psi :]0, 1[^n \longrightarrow \Delta_n$ een diffeomorfisme is. *Hint:* voor $z \in \Delta_n$ geldt dat $y_i \in]0, 1[$, $i = 1, \dots, n$ als

$$\begin{aligned} y_n &= z_1 + \dots + z_n \\ y_{n-1} y_n &= z_1 + \dots + z_{n-1} \\ y_{n-2} y_{n-1} y_n &= z_1 + \dots + z_{n-2} \\ &\vdots \\ y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n &= z_1 . \end{aligned}$$

(v) Gebruik de recursie (2) om

$$\begin{aligned}\phi : \quad]0, 1[^{n-1} &\longrightarrow \Sigma_{n-1} \\ (y_1, \dots, y_{n-1}) &\mapsto X_n\end{aligned}$$

te definiëren — met X_n uit (2b) — $x = \phi(y)$ heeft componenten

$$x_j = (1 - y_{j-1}) \prod_{i=j}^{n-1} y_i \quad (\text{voor } j = 1, \dots, n \text{ met } y_0 = 0)$$

en voldoet dus aan $z = y_n x$, ofwel

$$x = (y_1 y_2 \cdots y_{n-1}, (1 - y_1) y_2 \cdots y_{n-1}, \dots, (1 - y_{n-2}) y_{n-1}, (1 - y_{n-1})) .$$

Ga na dat ϕ surjectief is en een inbedding van $]0, 1[^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ oplevert.

De vector

$$\nu := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

staat in elk punt van Σ_{n-1} loodrecht op Σ_{n-1} en heeft lengte 1, ofwel

$$\omega_\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

voor de Euclidische $(n-1)$ -dimensionale dichtheid ω op Σ_{n-1} .

(vi) Verifieer

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} = n y_2 y_3^2 \cdots y_{n-1}^{n-2}$$

voor alle $y \in]0, 1[^{n-1}$.

(vii) Concludeer dat

$$\det D\Psi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = \frac{y_n^{n-1}}{\sqrt{n}} \omega_\phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

voor alle $y \in]0, 1[^n$.

(viii) Laat voor alle $f \in K([0, \infty[^n)$ — d.w.z. $f \in C([0, \infty[^n)$ met compacte draager $\text{supp } f$ — zien dat

$$\int_{[0, \infty[^n} f(z) \, dz = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty t^{n-1} \left[\int_{\Sigma_{n-1}} f(tx) \omega(x) \, dx \right] dt . \quad (3)$$

(ix) Ga na dat (3) ook van toepassing is op

$$\begin{aligned} f : [0, \infty[^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \exp\left(-\sum_{i=1}^n z_i\right) \end{aligned}$$

en dat

$$\text{vol}_{n-1}(\Sigma_{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$$

vanwege $\Gamma(n) = (n-1)!$ onmiddellijk volgt.

Opgave 3 (stuksgewijs gladde rand). Zij

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, \sin x < y < 2 \right\}$$

een open gebied in $\mathbb{R}^2$ en $Y = (f, g)$ een vectorveld op $\mathbb{R}^2$ met componenten

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -y^2 \\ g(x, y) &= x^2 . \end{aligned}$$

(i) Bereken direct

$$\int_M \text{rot } Y \, d\mu .$$

(ii) Bereken direct

$$\int_{\partial M} \langle Y \mid d\gamma \rangle .$$

(iii) Ga na dat M dat geen C^1 -domein is (niet “een C^1 -rand heeft en aan één kant van ∂M ligt”) en verifieer dat de vergelijking

$$\int_M \text{rot } Y \, d\mu = \int_{\partial M} \langle Y \mid d\gamma \rangle$$

uit de integraalstelling van Green desondanks klopt.