Tentamen Analyse in meer variabelen 23 juni 2026

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

Opgave 1 Bereken van het vectorveld $X : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ met de componenten

$$\begin{aligned} X_1(z) &= z_2 z_3 z_4 \\ X_2(z) &= z_1 z_3 z_4 \\ X_3(z) &= z_1 z_2 z_4 \\ X_4(z) &= z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

de flux door $S^3 = \{z \in \mathbb{R}^4 \mid \|z\| = 1\}$.

Opgave 2 Zij $M \subseteq \mathbb{R}^3$ het omwentelingslichaam

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 < z < 1\,,\, x^2 + y^2 < z^2(1-z) \right\} .$$

(*i*) In welk punt $(x_0, y_0, z_0) \in \partial M$ heeft M geen C^1–rand?

(*ii*) Laat zien dat $\Sigma := \partial M^{\backslash\{(x_0,y_0,z_0)\}}$ een gladde variëteit is.

(*iii*) Bereken het volume van M.

Opgave 3 (*i*) Zij $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ een samenhangende gesloten deelvariëteit en M het 'inwendige' van Γ — ofwel $M \subseteq \mathbb{R}^2$ is open en $\Gamma = \partial M$. Bewijs dat Γ niet alleen de topologische rand van M is, maar ook de rand van M beschouwd als een variëteit met rand.

(*ii*) Zij $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ een differentiaalvorm van orde 1. Bepaal de componenten van het vectorveld $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ met de eigenschap dat $\alpha(Z) = \langle Y \mid Z \rangle$ voor elk vectorveld $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ — hier staat $\langle .. \mid .. \rangle$ voor het inproduct op $\mathbb{R}^2$. Verifieer dat je constructie een bijectie tussen $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ oplevert.

(*iii*) De differentiaalvergelijkingen van de harmonische oscillator zijn

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x \end{array} \tag{1}$$

en bepalen het vectorveld $Y = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$. Bereken de volgens (*ii*) hierdoor vastgelegde differentiaalvorm $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Zij $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ een beginwaarde en Γ diens baan onder (1). Ga na da Γ gesloten is en laat zien dat

$$-\frac{1}{2}\int_\Gamma \alpha \;=\; \mathrm{vol}_2(M)$$

de oppervlakte is van het 'inwendige' M van Γ. Hoe moet je Γ hiervoor oriënteren?

Opgave 4 De Astroïde is de kromme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$A \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \right\} .$$

(*i*) Ga na dat

$$(x,y) \;\in\; A \iff 1 - x^2 - y^2 \;=\; 3(\sqrt[3]{xy})^2 \tag{2}$$

en concludeer dat $\|(x,y)\| \leq 1$ als $(x,y) \in A$. *Hint:* bewijs door $(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^3$ uit te schrijven dat de rechter gelijkheid in (2) met

$$(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1)(x^2 \,+\, y^2 \,+\, (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^2 \,+\, x^{\frac{2}{3}} \,+\, y^{\frac{2}{3}}) \;=\; 0$$

equivalent is — op $(x,y) = (0,0)$ na.

(*ii*) Bewijs dat $A^{\setminus\{(-1,0)\}} = \mathrm{im}\,\phi$, waarbij

$$\begin{array}{rccc} \phi \;:\; &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \;. \end{array}$$

Definieer

$$D \;=\;]-\pi,\pi[^{\setminus\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\}} \;\subseteq\; \mathbb{R} \quad \text{en} \quad S \;=\; \{(1,0),(0,1),(0,-1),(-1,0)\} \;\subseteq\; A \;.$$

(*iii*) Ga na dat $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ een C^∞–inbedding is. Toon aan dat A een C^∞–deelvariëteit in $\mathbb{R}^2$ van dimensie 1 is, behalve in de punten van S.

(*iv*) Ga na dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan A in $\phi(t)$ gelijk is aan $-\tan t$, als $t \in D$. Concludeer nu met onderdeel (*i*) dat A in de punten van S een spits (of cuspe, engels: cusp) heeft. Maak een schets van A. *Hint:* substitueer $(x,y) = (\xi - 1, \eta)$ in (2) en bepaal aan elke kant de term van laagste orde.

(*v*) Verifieer dat de lengte van A gelijk is aan 6.

(*vi*) Bereken de oppervlakte van de begrensde verzameling $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ met $\partial\Omega = A$.