Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 2 januari 2020, 13:30 - 16:30

Docenten: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie. **The English exam follows below.**
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we de volgende twee beweringen:

$$A: \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad 2^x \leq n.$$

$$B: \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad 2^x \leq n.$$

(a). ($2\frac{1}{2}$ *punt*) Herformuleer de ontkenning van bewering A zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(b). ($2\frac{1}{2}$ *punt*) Herformuleer de ontkenning van bewering B zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(c). ($2\frac{1}{2}$ *punt*) Bewijs of weerleg bewering A.

(d). ($2\frac{1}{2}$ *punt*) Bewijs of weerleg bewering B.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij getallen gedefinieerd door

$$a_n = \begin{cases} 17 & \text{als } n \leq 4; \\ \frac{2n+1}{n-4} & \text{als } n > 4 \end{cases}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Beslis of deze rij convergeert of divergeert. Geef vervolgens een ε - N bewijs voor je antwoord.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Laat A, B en C drie verzamelingen zijn.

(a). (*4 punten*) Bewijs dat

$$A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$$

dan en slechts dan als

$$A = B = C.$$

(b). (*6 punten*) Bewijs dat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

dan en slechts dan als

$$A \subseteq C.$$

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Een rijtje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wordt recursief gedefinieerd door $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ en

$$a_n = (a_{n-1} - 1)a_{n-2}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven is;} \\ (-1)^{n/2} & \text{als } n \text{ even is.} \end{cases}$$

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Definieer de relatie R op $\mathbb{Z}$, zodanig dat $k\,R\,\ell$ wanneer $k^2 \equiv \ell^2 \pmod 4$.

(a). (*3 punten*) Laat zien dat R een equivalentierelatie is.

Definieer vervolgens de relatie S op $\mathbb{Z}$, zodanig dat $k\,S\,\ell$ wanneer $k + \ell \equiv 0 \pmod 2$.

(b). (*3 punten*) Laat zien dat S een equivalentierelatie is.

(c). (*4 punten*) Hebben R en S dezelfde equivalentieklassen? Denk eraan om duidelijk te laten zien hoe je aan je antwoord komt en al je beweringen te bewijzen.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

In deze opgave zijn A en B niet-lege verzamelingen met dezelfde kardinaliteit (dus $|A| = |B|$). Het doel van deze opgave is om te bewijzen dat

$$|A - \{a\}| = |B - \{b\}|, \qquad \text{voor alle } a \in A \text{ en } b \in B. \tag{1}$$

(a). (*1 punt*) Laat allereerst zien dat bewering (1) waar is, wanneer $|A| = 1$ en $|B| = 1$.

(b). (*1 punt*) Laat vervolgens zien dat bewering (1) waar is, wanneer $|A| = 2$ en $|B| = 2$.

Neem voor het vervolg aan dat $|A| > 2$, dat a_1 en a_2 twee verschillende elementen van A zijn en dat $f\colon A \to B$ een bijectie is van A naar B. Definieer dan de afbeelding $f_{a_1,a_2}\colon A \to B$ door

$$f_{a_1,a_2}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \neq a_1 \text{ en } x \neq a_2, \\ f(a_2) & \text{als } x = a_1, \\ f(a_1) & \text{als } x = a_2. \end{cases}$$

(c). (*4 punten*) Toon aan dat deze afbeelding f_{a_1,a_2} opnieuw een bijectie is.

(d). (*4 punten*) Laat tenslotte zien dat bewering (1) waar is, wanneer $|A| = |B| > 2$. In het bijzonder kunnen A en B nu oneindige verzamelingen zijn.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

THE ENGLISH EXAM FOLLOWS BELOW

Z.O.Z. / P.T.O.

Exam “Bewijzen in de Wiskunde” (WISB102)
Thursday, November 7, 2019, 13:30 - 16:30

Instructors: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of six exercises, each worth 10 points.
- Write your name and student number on each sheet of paper.
- The use of phones, computers, calculators, books or notes is not allowed.
- Do not only give answers, but for each (sub)exercise show clearly how you obtain your answers and prove all your claims.
- Even if you don’t succeed in proving part of an exercise, you may use the result in the remainder of the exercise.

Exercise 1 (new sheet of paper)

In this exercise we consider the following two statements:

$$A\colon \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}\colon \quad 2^x \leq n.$$

$$B\colon \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad 2^x \leq n.$$

(a). ($2\frac{1}{2}$ *points*) Reformulate the negation of statement A such that it does not contain an explicit negation any more.

(b). ($2\frac{1}{2}$ *points*) Reformulate the negation of statement B such that it does not contain an explicit negation any more.

(c). ($2\frac{1}{2}$ *points*) Prove or disprove statement A.

(d). ($2\frac{1}{2}$ *points*) Prove or disprove statement B.

Exercise 2 (new sheet of paper)

(*10 points*) Let $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of numbers defined by

$$a_n = \begin{cases} 17 & \text{if } n \leq 4; \\ \frac{2n+1}{n-4} & \text{if } n > 4 \end{cases}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Decide whether this sequence converges or diverges. Next, give an ε - N proof for your answer.

Exercise 3 (new sheet of paper)

Let A, B, and C be three sets.

(a). (*4 points*) Prove that

$$A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$$

if and only if

$$A = B = C.$$

(b). (*6 points*) Prove that

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

if and only if

$$A \subseteq C.$$

Exercise 4 (new sheet of paper)

(*10 points*) A sequence $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is defined recursively by $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, and

$$a_n = (a_{n-1} - 1)a_{n-2}$$

for all $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq 3$. Prove that for all $n \in \mathbb{N}$ the following holds:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd;} \\ (-1)^{n/2} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

Exercise 5 (new sheet of paper)

Define the relation R on $\mathbb{Z}$, such that $k \, R \, \ell$ whenever $k^2 \equiv \ell^2 \pmod 4$.

(a). (*3 points*) Show that R is an equivalence relation.

Next, define the relation S on $\mathbb{Z}$, such that $k \, S \, \ell$ whenever $k + \ell \equiv 0 \pmod 2$.

(b). (*3 points*) Show that S is an equivalence relation.

(c). (*4 points*) Do R and S have the same equivalence classes? Reminder: show clearly how you obtain your answer and prove all your claims.

Z.O.Z. / P.T.O.

Exercise 6 (new sheet of paper)

In this exercise, A and B are nonempty sets with the same cardinality (so $|A| = |B|$). The goal of this exercise is to prove that

$$|A - \{a\}| = |B - \{b\}|, \qquad \text{for all } a \in A \text{ and } b \in B. \tag{2}$$

(a). (*1 point*) Show first that statement (2) is true when $|A| = 1$ and $|B| = 1$.

(b). (*1 point*) Next, show that statement (2) is true when $|A| = 2$ and $|B| = 2$.

In the remainder of this exercise, assume that $|A| > 2$, that a_1 and a_2 are two distinct elements of A, and that $f\colon A \to B$ is a bijection from A to B. Define the function $f_{a_1,a_2}\colon A \to B$ by

$$f_{a_1,a_2}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq a_1 \text{ and } x \neq a_2, \\ f(a_2) & \text{if } x = a_1, \\ f(a_1) & \text{if } x = a_2. \end{cases}$$

(c). (*4 points*) Prove that this function f_{a_1,a_2} is again a bijection.

(d). (*4 points*) Finally, show that statement (2) is true when $|A| = |B| > 2$. In particular, A and B may now be infinite sets.