Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 7 november 2019, 13:30 - 16:30

Docenten: *Martin Bootsma* & *Carel Faber* & *Heinz Hanßmann* & *Jan-Willem van Ittersum* & *Johan van de Leur* & *Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie. **The English exam follows below.**
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*2 punten*) Laat P en Q twee beweringen zijn. Laat zien dat de beweringen $\sim (P \wedge Q)$ en $(\sim P) \vee (\sim Q)$ logisch equivalent zijn. (Je mag hierbij (uiteraard) geen gebruik maken van de rekenregels voor beweringen; dit is immers zelf één van de rekenregels.)

Voor het vervolg van de opgave beschouwen we de volgende twee beweringen:

$$A\colon \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{Z}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

$$B\colon \qquad \exists\, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

(b). (*2 punten*) Herformuleer de ontkenning van bewering A zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(c). (*2 punten*) Herformuleer de ontkenning van bewering B zodanig dat er geen expliciete ontkenning meer in voorkomt.

(d). (*2 punten*) Bewijs of weerleg bewering A.

(e). (*2 punten*) Bewijs of weerleg bewering B.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

In deze opgave beschouwen we de volgende vier functies:

$$\begin{array}{lll} f\colon & \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon & f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex] g\colon & \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\colon & g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex] h\colon & \mathbb{R} \to [0,1)\colon & h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex] k\colon & \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)\colon & k(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,. \end{array}$$

Hierin is $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ de verzameling van alle niet-negatieve reële getallen.

(a). (*4 punten*) Welke van deze vier functies zijn injectief?

(b). (*4 punten*) Welke van deze vier functies zijn surjectief?

(c). (*2 punten*) Welke van deze vier functies zijn bijectief?

Ter herinnering: laat duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

De rij a_n wordt recursief gedefinieerd voor alle $n \in \mathbb{N}$ door $a_1 = 5$, $a_2 = 55$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$, door

$$a_n = 11a_{n-1} - 24a_{n-2}\,.$$

(a). (*5 punten*) Bewijs voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat

$$a_n = 8^n - 3^n.$$

(b). (*4 punten*) Bewijs dat $a_n \equiv 5 \pmod{10}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c). (*1 punt*) Wat is het laatste cijfer van a_{2019} (in het tientallig stelsel) ?

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Neem aan dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in het punt $x = a$ met afgeleide $f'(a)$ en $g'(a)$, respectievelijk. Definieer de functie h als de som van de functies f en g. Oftewel, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefiniëerd door $h(x) = f(x) + g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a). (*1 punt*) Geef de definitie van differentieerbaarheid van f in a in termen van een limiet.

(b). (*2 punten*) Geef de definitie van differentieerbaarheid van f in a in termen van ε en δ.

(c). (*7 punten*) Bewijs, gebruik makend van de ε-δ definities van differentieerbaarheid, dat de functie h differentieerbaar is in het punt $x = a$ en laat zien dat de afgeleide in het punt $x = a$ wordt gegeven door $h'(a) = f'(a) + g'(a)$. Je mag hierbij geen gebruik maken van de rekenregels voor limieten.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

In deze opgave gebruiken we de notatie $\mathbb{R}^2$ voor het Cartesisch product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vervolgens definiëren we de relatie R op $\mathbb{R}^2$ door

$$(a,b)\,R\,(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - c^2 = d - b.$$

(a). (*4 punten*) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Voor elke $h \in \mathbb{R}$ definiëren we de verzameling $A_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = h\}$.

(b). (*3 punten*) Bewijs dat de collectie verzamelingen $\{A_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ een partitie is van $\mathbb{R}^2$.

(c). (*3 punten*) Bewijs voor alle $h \in \mathbb{R}$ dat

$$A_h = \big[(0,h)\big]\ .$$

Hierin is $\big[(0,h)\big]$ de equivalentieklasse van $(0,h)$ ten opzichte van de relatie R.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

In deze opgave zijn A en B deelverzamelingen van een overaftelbare verzameling U.

(a). (*4 punten*) Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is als A en B aftelbaar zijn en hun doorsnede $A \cap B$ leeg is.

(b). (*3 punten*) Bewijs:

$$A \text{ is aftelbaar} \implies U - A \text{ is overaftelbaar.}$$

(c). (*3 punten*) Bewijs of weerleg:

$$B \text{ is overaftelbaar} \implies U - B \text{ is aftelbaar.}$$

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

THE ENGLISH EXAM FOLLOWS BELOW

Z.O.Z. / P.T.O.

Exam "Bewijzen in de Wiskunde" (WISB102)
Thursday, November 7, 2019, 13:30 - 16:30

Instructors: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of six exercises, each worth 10 points.
- Write your name and student number on each sheet of paper.
- The use of phones, computers, calculators, books or notes is not allowed.
- Do not only give answers, but for each (sub)exercise show clearly how you obtain your answers and prove all your claims.
- Even if you don't succeed in proving part of an exercise, you may use the result in the remainder of the exercise.

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*2 points*) Consider two statements P and Q. Show that the statements $\sim (P \wedge Q)$ and $(\sim P) \vee (\sim Q)$ are logically equivalent. (You are not allowed to make use of the basic laws for logical equivalence for this; it is one of those laws by itself, after all.)

In the remainder of this exercise we consider the following two statements:

$$A\colon \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{Z}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

$$B\colon \qquad \exists\, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad x \leq n \leq x+1.$$

(b). (*2 points*) Reformulate the negation of statement A such that it does not contain an explicit negation any more.

(c). (*2 points*) Reformulate the negation of statement B such that it does not contain an explicit negation any more.

(d). (*2 points*) Prove or disprove statement A.

(e). (*2 points*) Prove or disprove statement B.

Exercise 2 (new sheet of paper)

In this exercise we consider the following four functions:

$$
\begin{array}{lll}
f\colon & \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon & f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex]
g\colon & \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\colon & g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex]
h\colon & \mathbb{R} \to [0,1)\colon & h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,, \\[2ex]
k\colon & \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)\colon & k(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\,.
\end{array}
$$

Here we use $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ to denote the set of all non-negative real numbers.

(a). (*4 points*) Which of these four functions are injective?

(b). (*4 points*) Which of these four functions are surjective?

(c). (*2 points*) Which of these four functions are bijective?

Reminder: show clearly how you obtain your answers and prove all your claims.

Exercise 3 (new sheet of paper)

The sequence a_n is defined recursively for all $n \in \mathbb{N}$ by $a_1 = 5$, $a_2 = 55$ and, for all $n \in \mathbb{N}$ for which $n \geq 3$, by

$$a_n = 11a_{n-1} - 24a_{n-2}\,.$$

(a). (*5 points*) For all $n \in \mathbb{N}$, prove that

$$a_n = 8^n - 3^n.$$

(b). (*4 points*) Prove that $a_n \equiv 5 \pmod{10}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(c). (*1 point*) What is the final digit of a_{2019} (in the decimal number system) ?

Exercise 4 (new sheet of paper)

Assume that the two functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are differentiable in the point $x = a$ with derivatives $f'(a)$ and $g'(a)$, respectively. Define the function h as the sum of the functions f and g. In other words, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $h(x) = f(x) + g(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

(a). (*1 point*) Give the definition of differentiability of f in $x = a$ in terms of a limit.

(b). (*2 points*) Give the definition of differentiability of f in $x = a$ in terms of ε and δ.

(c). (*7 points*) Prove, using the ε - δ definitions of differentiability, that the function h is differentiable in the point $x = a$ and show that the derivative in the point $x = a$ is given by $h'(a) = f'(a) + g'(a)$. You are not allowed to use the standard properties of limits in this exercise.

Exercise 5 (new sheet of paper)

In this exercise we use $\mathbb{R}^2$ to denote the Cartesian product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. We define the relation R on $\mathbb{R}^2$ by

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - c^2 = d - b.$$

(a). (*4 points*) Prove that R is an equivalence relation.

For every $h \in \mathbb{R}$ we define the set $A_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = h\}$.

(b). (*3 points*) Prove that the collection $\{A_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ is a partition of $\mathbb{R}^2$.

(c). (*3 points*) For all $h \in \mathbb{R}$, prove that

$$A_h = \big[(0, h)\big]\ ,$$

in which $\big[(0, h)\big]$ denotes the equivalence class of $(0, h)$ with respect to the relation R.

Exercise 6 (new sheet of paper)

In this exercise, A and B are subsets of an uncountable set U.

(a). (*4 points*) Prove that $A \cup B$ is countable if A and B are countable and their intersection $A \cap B$ is empty.

(b). (*3 points*) Prove:

$$A \text{ is countable} \implies U - A \text{ is uncountable.}$$

(c). (*3 points*) Prove or disprove:

$$B \text{ is uncountable} \implies U - B \text{ is countable.}$$