Hertentamen Complexe functies 18 Juli 2019

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en en dictaten), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 14 deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Gegeven is een continu differentieerbare gesloten kromme $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ met $\gamma(t) \neq 0$ voor alle $t \in [0, 2\pi]$ en $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = k$.

   (i) Geef aan waarom γ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ homoloog is met de kromme $\eta(t) = \gamma(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (ii) Schrijf $\gamma(t) = r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ in poolcoördinaten — met $r, \theta : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar — en definieer

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & [0, 2\pi] \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ & & (t, s) & \mapsto & r(t, s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t,s)} \end{array}$$

   waarbij $r(t, s) = s \cdot r(0) + (1 - s)r(t)$ en $\theta(t, s) = s(\theta(0) + kt) + (1 - s)\theta(t)$. Verifieer dat $\psi(2\pi, s) = \psi(0, s)$ voor alle $s \in [0, 1]$.

(*iii*) Concludeer dat η homotoop is met γ.

(*iv*) Is een nul-homologe *cykel* op $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ook nul-homotoop? Bewijs dit of geef een tegenvoorbeeld.

2. Definieer de bogen $\gamma_R(t) = t$ op $[-R, R]$ en $\eta_R^{\pm}(t) = R\mathrm{e}^{\pm it}$ op $[0, \pi]$ en de functie

$$f(z) \quad := \quad \frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z}}{z^3 + \mathrm{i}} \quad .$$

(*i*) Bepaal de singulariteiten van f op $\mathbb{C}$ en bereken de bijbehorende residuen.

(*ii*) Laat zien dat $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\eta_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ en dat $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\eta_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$.

(*iii*) Geef aan waarom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos 2\pi x - \sin 2\pi x}{x^6 + 1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad 0$$

en bereken de oneigenlijke Riemann-integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x + x^3 \sin 2\pi x}{x^6 + 1}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Hint: werk $f(z)$ uit voor $z = x \in \mathbb{R}$.

3. Zij $G \subseteq \mathbb{C}$ een gebied met $z \in G \Rightarrow \bar{z} \in G$, dus symmetrisch t.o.v. de reële as. Zij verder f holomorf op G en $z_0 \in G \cap \mathbb{R}$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

(*i*) Voor alle $z \in G \cap \mathbb{R}$ is $f(z) \in \mathbb{R}$.

(*ii*) Voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ is $f^{(n)}(z_0) \in \mathbb{R}$.

(*iii*) Voor alle $z \in G$ geldt $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Elke van de drie nodige bewijsrichtingen is een deelopgave. *Hint voor* (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)*:* ga eerst na dat de functie g, gedefinieerd door $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, $z \in G$ holomorf is op G.

4. In een veelterm $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ met complexe coëfficiënten $a_k \in \mathbb{C}$ kunnen we ook vierkante matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ invullen, met als resultaat de matrix $p(A) = a_0 + a_1 A + \ldots + a_m A^m$. Net zo voor reeksen. Je mag ervan gebruik maken dat het majorantie-criterium voor complexe reeksen ook geldig is voor matrix-reeksen en convergentie van matrix-reeksen zo terugspelen naar absolute convergentie. Als $M(\zeta)$ een $(n \times n)$–matrix is waarvan de elementen $M_{ij}(\zeta)$ functies zijn, dan schrijven we $\int M(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ voor de matrix met elementen $\int M_{ij}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$. Verder is I de eenheidsmatrix met elementen δ_{ij} en $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ de norm van een matrix A.

   (*i*) Verifieer dat

   $$(\zeta I - A)(\frac{1}{\zeta} I + \frac{1}{\zeta^2} A + \ldots + \frac{1}{\zeta^{m+1}} A^m) \quad = \quad I \; - \; \frac{1}{\zeta^{m+1}} A^{m+1} \quad .$$

   (*ii*) Ga na dat $\zeta I - A$ voor $|\zeta| > \|A\|$ inverteerbaar is met

   $$(\zeta I - A)^{-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{k+1}} A^k$$

   waarbij $A^0 = I$.

   (*iii*) Voor $\ell \in \mathbb{N}_0$, $r > \|A\|$ en γ_r de positief doorlopen rand van $D(0; r)$ bereken

   $$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \zeta^\ell (\zeta I - A)^{-1} \,\mathrm{d}\zeta \quad = \quad \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \zeta^{\ell-k-1} \,\mathrm{d}\zeta \; A^k$$

   en concludeer dat $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} p(\zeta)(\zeta I - A)^{-1} \,\mathrm{d}\zeta = p(A)$ voor veeltermen $p \in \mathbb{C}[\zeta]$.

   (*iv*) Neem $p(\zeta) = \det(\zeta I - A)$ de karakteristieke veelterm van A en bewijs de stelling van Cayley–Hamilton: $p(A) = 0$ als we A in haar eigen karakteristieke veelterm invullen. *Hint:* gebruik de formule van Cramer dat de inverse M^{-1} gegeven wordt door

   $$M^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det M} \, \widetilde{M}^T$$

   waarbij $\widetilde{M}$ de elementen

   $$(\widetilde{M})_{ij} \quad = \quad (-1)^{(i+j)} \det M^{ij}$$

   heeft, met M^{ij} de $(n-1) \times (n-1)$ matrix die uit M ontstaat als de $i$de rij en de $j$de kolom worden verwijderd.