Tentamen Complexe functies 27 Juni 2019

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en en dictaten), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 15 deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Definieer de bogen $\gamma_R(t) = t$ op $[-R, R]$ en $\eta_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ op $[0, \pi]$ en de functie

$$f(z) \quad := \quad \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}}{z^2 + 2\mathrm{i}} \ .$$

   (*i*) Bepaal de singulariteiten van f op $\mathbb{C}$ en bereken de bijbehorende residuen.

   (*ii*) Laat zien dat $\lim_{R\to\infty} \int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Geldt dit ook voor $\bar{\eta}_R(t) = R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$?

   (*iii*) Bereken de oneigenlijke Riemann-integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + 4}\,\mathrm{d}x$. *Hint:* bekijk juist het imaginaire gedeelte van f.

2. Zij $V := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq 1\} = [0,1]^2$ het vierkant met hoekpunten $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$, $\mathrm{i} = (0,1)$ en $1 + \mathrm{i} = (1,1)$, waarbij we $\mathbb{C}$ op de gebruikelijke wijze $z = (x, y)$ met $\mathbb{R}^2$ identificeren.

   (*i*) Toon aan dat de op het inwendige van V harmonische, continue functie $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ met $g(x, 0) \equiv \sin \pi x$, $g(0, y) \equiv 0$, $g(1, y) \equiv 0$ en $g(x, 1) \equiv \frac{\sin \pi x}{\exp \pi}$ een product $g(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ is.

(*ii*) Bepaal het maximum van deze g op de compacte verzameling V.

(*iii*) Construeer een functie $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $f(z) = g(z) + \mathrm{i}h(z)$ holomorf is.

(*iv*) Maak een plaatje van het beeld $f'(V)$ van V onder de afgeleide f' van f (met daarin de beelden van de hoekpunten van V gemarkeerd) en geef een open omgeving U van V waarop de analytische voortzetting $f' : U \longrightarrow f'(U)$ een analytische isomorfisme is.

3. Beschouw de functie

$$f(z) \quad = \quad \frac{\exp \frac{1}{z^2}}{z^2+4} \quad = \quad \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}}{4}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}} \quad - \quad \frac{\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right) \quad .$$

(*i*) Bereken de residuen van f waar deze niet 0 zijn.

(*ii*) Is f meromorf op $\mathbb{C}$? Beredeneer je antwoord.

(*iii*) Bepaal de coëfficiënt a_0 in de Laurent-reeks van f rond $z = 2\mathrm{i}$.

4. Voor een 2π–periodieke functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi]$ integreerbaar is, zijn de Fourier-coëfficiënten c_k, $k \in \mathbb{Z}$ gedefinieerd door middel van

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Verder definiëren we $\mathbb{R}_{\mathrm{i}\eta} := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \eta\}$ voor gegeven $\eta > 0$.

(*i*) Veronderstel dat $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ naast 2π–periodiek ook reëel analytisch is. Laat zien dat er een $\eta > 0$ bestaat en een holomorfe functie $F : \mathbb{R}_{\mathrm{i}\eta} \longrightarrow \mathbb{C}$ met $F_{|\mathbb{R}} = f$.

(*ii*) In hoeverre is de analytische voortzetting F van f eenduidig bepaald? Bewijs dat $F(z) = F(z + 2\pi)$ voor alle $z \in \mathbb{R}_{\mathrm{i}\eta}$.

(*iii*) Toon aan dat de rij $(c_k)_k$ van Fourier-coëfficiënten van f exponentieel snel afnemend is: er bestaat $\Gamma > 0$ met de eigenschap, dat $|c_k| \leq \Gamma \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|k|\eta}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Geldt ook $|c_k| \leq \Gamma \cdot \mathrm{e}^{-|k|\eta}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$, eventueel met een aangepaste $\Gamma > 0$?

(*iv*) Zij nu 'omgekeerd' $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ een exponentieel snel afnemend rijtje: er bestaan $\Gamma, \eta > 0$ met de eigenschap, dat $|c_k| \leq \Gamma \cdot \mathrm{e}^{-|k|\eta}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Ga na dat de Fourier-reeks $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ uniform convergent is.

(*v*) Verifieer dat de zo gedefinieerde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ reëel analytisch is en holomorf tot $\mathbb{R}_{\mathrm{i}\eta}$ kan worden voortgezet.