Complexe functies 2021

Extra opgaves

Opgave A

Laat zien dat $\mathbb{R}^2$ voorzien van de bewerkingen

$$\begin{aligned} a + b &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ a \cdot b &:= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

isomorf is met $\mathbb{C}$. Wat is i in deze representatie?

Opgave B

Ga na dat $\{0\} \cup \,]0, \infty[\, \times \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ voorzien van de bewerkingen

$$\begin{aligned} (r_1, \theta_1) + (r_2, \theta_2) &:= (R, \Theta) \\ \text{met} \qquad R &= \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + r_2^2} \\ \text{en} \qquad \tan\Theta &= \frac{r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2} \\ (r_1, \theta_1) \cdot (r_2, \theta_2) &:= (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

samen met $0 + z := z$ en $0 \cdot z := 0$ voor alle $z \in \{0\} \cup]0, \infty[\, \times \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ isomorf is met $\mathbb{C}$. Wat is i in deze representatie?

Opgave C

Laat zien dat de verzameling

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

van reële 2×2 matrices voorzien van de gebruikelijke bewerkingen optellen en matrixvermenigvuldiging isomorf is met $\mathbb{C}$. Wat is i in deze representatie?

Opgave D

Definieer op de ruimte $\mathbb{R}[x]$ van veeltermen met reële coëfficienten de equivalentierelatie

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \text{er bestaat } h \in \mathbb{R}[x] \text{ met } f - g = (x^2 + 1)h$$

en ga na dat de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen van veeltermen op het quotient $\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)} := \mathbb{R}[x]/\sim$ goed gedefinieerd zijn. Laat zien dat $\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)}$ voorzien van deze bewerkingen isomorf is met $\mathbb{C}$. Wat is i in deze representatie?
Hint (voor wie Ringen en Galoistheorie heeft gevolgd): Wat gebeurt hier eigenlijk?

Opgave E

Laat zien dat $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ een lichaam is waarin ieder element een kwadraat is. Heeft de veeltermvergelijking

$$x^2 - x + 1 = 0$$

een oplossing binnen $\mathbb{Z}_2$?

Opgave F

Zij $f(z) = z^2$. Leg uit hoe f de complexe schijf $\mathbb{C}$ op zichzelf afbeeldt.

Opgave G

Zij $f(z) = \frac{1}{z^2} = z^{-2}$. Leg uit hoe f de gepunkteerde complexe schijf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ op zichzelf afbeeldt.

Opgave H

Doel van deze opgave is om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 1 *Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ open en $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continu complex differentieerbaar met $Df(a) \neq 0$ voor een $a \in D$. Dan bestaan er open deelverzamelingen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ met $a \in U$ en $f(a) \in V$ zodanig, dat $f(U) = V$, de inverse $f^{-1} : V \longrightarrow U$ bestaat en is continu complex differentieerbaar.*

Deze stelling staat bekend als de inverse functie stelling en geldt ook voor continu reëel differentieerbare $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ open, mits (iets sterker) $\det Df(a) \neq 0$ — ook voor $n = 2$ — en de conclusie is dat f^{-1} continu reëel differentieerbaar is.

(i) Ga na dat zonder verlies van algemeenheid $a = 0$.

(ii) Toon aan dat zonder verlies van algemeenheid $Df(0) = \mathrm{id}$.

(iii) Definieer $g(x) := f(x) - x$ voor alle $x \in D$ en laat zien dat er $\delta > 0$ bestaat met

$$\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{voor alle } x \in \overline{B(0;\delta)}.$$

(iv) Gebruik dit voor

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \text{voor alle } x, y \in \overline{B(0;\delta)}$$

en concludeer dat

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \text{voor alle } x, y \in \overline{B(0;\delta)}.$$

(v) Verifieer dat f injectief is op $\overline{B(0;\delta)}$ met continue inverse $f^{-1} : f(\overline{B(0;\delta)}) \longrightarrow \overline{B(0;\delta)}$.

(vi) Ga na dat er $\gamma > 0$ bestaat met $\det Df(x) \neq 0$ voor alle $x \in B(0;\gamma)$.

(vii) Definieer $\varepsilon := \min\{\delta, \gamma\}$ en laat zien dat het beeld $f(\{\|x\| = \varepsilon\})$ van de rand van $B(0;\varepsilon)$ tot $f(0)$ een positieve afstand

$$d \;:=\; \mathrm{dist}(f(0), f(\{\|x\| = \varepsilon\})) \;=\; \min\{\|f(0) - f(x)\| \mid \|x\| = \varepsilon\} \;>\; 0$$

heeft. *Hint:* $\{\|x\| = \varepsilon\}$ *is compact.*

(viii) Definieer $V := B(f(0); \frac{1}{2}d)$ en voor $y \in V$ willekeurig maar vast definieer

$$h(x) \;:=\; |f(x) - y|^2 \;=\; (f(x) - y) \cdot \left(\overline{f(x) - y}\right)$$

en ga na dat er een $z \in B(0;\varepsilon)$ bestaat met $Dh(z) = 0$.

(ix) Toon aan dat $f(z) = y$ en bewijs hiermee dat $V \subseteq f(B(0;\varepsilon))$. *Hint:* bereken $Dh(z)v$, $v \in \mathbb{C}$ in termen van $Df(z)v$, $f(z)$ en y.

(x) Concludeer dat de beperking $f : U \longrightarrow V$ van f tot $U := f^{-1}(V)$ ook surjectief is, dus bijectief.

(xi) Toon aan dat $f^{-1} : V \longrightarrow U$ continu reëel differentieerbaar is.

(xii) Bewijs dat $f^{-1} : V \longrightarrow U$ continu complex differentieerbaar is.

Opgave I

Zij H het bovenhalfvlak $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ en $D = \{|z| < 1\}$. Ga na dat de Möbius-transformatie

$$z \;\mapsto\; \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

een analytisch isomorfisme van H met D is. Laat zien dat er geen analytisch isomorfisme van H met $\mathbb{C}$ bestaat. *(Gebruik voor dit laatste de Stelling van Liouville.)*

Opgave J

Zij $G \subseteq \mathbb{C}$ een gebied met $0 \in G$ en $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Veronderstel

$$|f(\frac{1}{n})| \;<\; \frac{1}{2^n} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}$$

en toon aan dat dan $f = 0$.

Opgave K

Definieer $f(z) := \ln|z|$ op $\mathbb{R}^{\setminus\{0\}} =]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$ zoals gebruikelijk als verketting van $z \mapsto |z|$ met de inverse van de exponentiaalfunctie op $]0, +\infty[$. Bepaal een 'zo groot mogelijke' analytische uitbreiding van f.

Opgave L

Zij $D = D(0; 1) \subseteq \mathbb{C}$ de eenheidsschijf.

(*i*) Voor een continue functie $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ op de cirkel met straal 1 definieer $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ d.m.v.

$$F(z) \;\; := \;\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

en ga na dat F op D in een convergente machtreeks rond de oorsprong kan worden ontwikkeld. *Hint:* gebruik het bewijs van Stelling III.7.3.

(*ii*) Laat zien dat $f \mapsto F$ een lineaire afbeelding tussen de complexe vectorruimten van continue functies $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ en holomorfe functies $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definieert, de zogenaamde Cauchy-transformatie.

(*iii*) Toon aan dat de Cauchy-transformatie niet injectief is. *Hint:* beschouw $f(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta}$.

Opgave M

Een meromorfe functie op $U \subseteq \mathbb{C}$ open is een holomorfe functie op $U^{\setminus S}$, $S \subset U$ discreet, waarvoor de niet ophefbare singulariteiten in de $z_0 \in S$ allemaal polen zijn. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ van meromorfe functies f_n op U is compact convergent in U als er voor elke compacte verzameling $K \subset U$ een $m = m(K) \in \mathbb{N}$ bestaat met de volgende eigenschappen.

(*i*) Voor $n \geq m$ heeft f_n geen polen in K.

(*ii*) De reeks $\sum_{n=m}^{\infty} f_{n|K}$ convergeert uniform op K.

Laat zien dat er dan precies één meromorfe functie g op U bestaat waarvoor het volgende geldt. Voor $V \subseteq U$ open en $m \in \mathbb{N}$ zodanig, dat f_n voor alle $n \geq m$ geen polen in V heeft is de reeks $\sum_{n=m}^{\infty} f_{n|V}$ van holomorfe funties compact convergent in V met als limiet een holomorfe functie h op V waarvoor

$$g_{|V} \;\; = \;\; f_{1|V} \; + \; \ldots \; + \; f_{m-1|V} \; + \; h \;\; .$$

In het bijzonder is g holomorf op het complement in U van alle poolverzamelingen van de f_n. Schrijf dan ook $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Opgave N

Zij $f : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ een analytisch automorfisme. Toon aan dat f een Möbius-transformatie is.

Opgave O

Zij h holomorf op $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$ met $|h(z)| < 1$ voor alle $|z| = 1$. Toon aan dat h op D een uniek dekpunt z_0 heeft. Wat kun je zeggen over $h'(z_0)$? *Hint:* een dekpunt van h is een nulpunt van $z \mapsto h(z) - z$.

Opgave P

Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda > 1$.

(*i*) Ga na dat $f(x) = \lambda - x - \mathrm{e}^{-x}$ op $\mathbb{R}$ precies 2 nulpunten heeft.

(*ii*) Laat zien dat $f(z) = \lambda - z - \mathrm{e}^{-z}$ verder geen complexe nulpunten $z = x + \mathrm{i}y$ met reëel gedeelte $x \geq 0$ heeft.

(*iii*) Teken de niveaukrommen $\mathrm{Re}\, f = 0$ en $\mathrm{Im}\, f = 0$ voor een aantal keuzes van λ, bv. met de computer.

(*iv*) Wat kun je zeggen over de complexe nulpunten $z = x + \mathrm{i}y$ van f met reëel gedeelte $x < 0$?