Tentamen Complexe functies 1 Juli 2021

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en en dictaten), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Het voorschrift $f(z) = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ definieert een automorfisme op $\mathbb{CP}^1$, waarbij $f(\infty) = +1$ en $f(-\mathrm{i}) = \infty$. Uit stelling VII.3.1 weten we dat f het bovenhalfvlak $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ naar de open schijf $D = \{|z| < 1\}$ stuurt.

   (*i*) Ga na dat f een homeomorfisme van $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ met de eenheidscirkel $\{|z| = 1\}$ oplevert.

   (*ii*) Laat zien dat het onderhalfvlak $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ en het gebied
   $$G \;:=\; \{|z| > 1\} \cup \{\infty\} \;\subseteq\; \mathbb{CP}^1$$
   biholomorf equivalent zijn.

   (*iii*) Wat zijn de automorfismes op het gebied G ?

2. Definieer de bogen $\gamma_R(t) = t$ op $[-R, R]$ en $\eta_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ op $[0, \pi]$ en de functie
   $$f(z) \;:=\; \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})^2}\;.$$

   (*i*) Bepaal de singulariteiten van f op $\mathbb{C}$ en bereken de bijbehorende residuen.

   (*ii*) Laat zien dat $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{\eta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(*iii*) Bereken de oneigenlijke Riemann-integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)\cos 2\pi x \;-\; 2x\sin 2\pi x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \quad .$$

3. Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ open en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van holomorfe functies op U. Veronderstel dat deze rij op elke compacte verzameling $K \subseteq U$ uniform convergent is, dan weten we al dat $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ eveneens holomorf is.

   (*i*) Ga na dat er voor $K \subseteq U$ compact $\delta > 0$ en eindig vele punten $z_1, \ldots, z_n \in K$ bestaan met

   $$K \;\subseteq\; \bigcup_{k=1}^{n} D(z_k;\delta) \quad \text{en} \quad \bigcup_{k=1}^{n} D(z_k;3\delta) \;\subseteq\; U$$

   en construeer een compacte deelverzameling $L \subseteq U$ met $\overline{D(z_k;\delta)} \subseteq L$ voor $k = 1, \ldots, n$.

   (*ii*) Bewijs voor de $k$de afgeleide $f^{(k)}$ de afschatting

   $$\|f^{(k)}\|_K \;\leq\; \frac{k!}{\delta^k}\|f\|_L$$

   waarbij $\|..\|_K$ en $\|..\|_L$ de supremumnorm $\|..\|_\infty$ op K danwel L.

   (*iii*) Toon aan dat $f^{(k)} = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}$ uniform op compacte verzamelingen.

4. Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ open, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorf en $w \in \partial U$ met $|w| \leq |z|$ voor alle $z \notin U$. Veronderstel verder $0 \in U$, ontwikkel f in een machtreeks

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

   rond 0 en schrijf ρ voor de convergentiestraal van (1).

   (*i*) Ga na dat $\rho \geq |w|$.

   (*ii*) Voor het geval dat w een niet ophefbare geïsoleerde singulariteit is, laat zien dat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $z_n \in U \cap D(w;\frac{1}{n})$ bestaat met $|f(z_n)| \geq n$ en toon aan dat $\rho = |w|$.

   (*iii*) Stel dat f naar elke $z \in \partial D(0;|w|) = \{|z| = |w|\}$ een analytische voortzetting heeft en verifieer dat dan $\rho > |w|$.

   (*iv*) Bewijs dat een op heel $\mathbb{C}$ gedefinieerde holomorfe functie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ rond elk punt $z_0 \in \mathbb{C}$ in een machtreeks

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

   kan worden ontwikkeld die op heel $\mathbb{C}$ convergent is.