Tentamen Distributies 11 April 2018

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Voor $F : A \longrightarrow B$ en $C \subseteq A$ is $F : C \longrightarrow B$ een afkorting voor $F_{|C} : C \longrightarrow B$. Waar $F : C \longrightarrow D$ staat moet wel $F(C) \subseteq D$ aangetoond (zijn danwel worden).
- Boek(en en dictaten), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 15 deelopgaven tellen even zwaar, de bonusopgave iets minder.
- *SUCCES!*

1. De veelterm $4 + 6x - x^3$ definieert een functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   (a) Leg uit waarom f ondanks $f \notin L^1(\mathbb{R})$ een Fourier-getransformeerde $\hat{f}$ heeft.

   (b) Ga na dat $\hat{f} = 8\pi\delta + 12\pi\mathrm{i}\delta' + 2\pi\mathrm{i}\delta'''$.

   (c) Verifieer $\mathscr{F} \circ T_a = \mathrm{e}_{-\mathrm{i}a} \cdot \mathscr{F}$ door $\mathscr{F}(T_2 f)$ en $\mathrm{e}_{-2\mathrm{i}} \cdot \hat{f}$ te berekenen.

2. Beschouw voor $\phi \in \mathscr{D}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, de limiet

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{I \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x^{5/3}} \, \mathrm{d}x \ . \tag{1}$$

   (a) Ga na dat (1) op $I =]0, \infty[$ een distributie van orde 0 definieert.

   (b) Laat zien dat (1) op $I = \mathbb{R}$ een distributie van orde 1 definieert.

3. Gegeven zijn $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ open met $U \subset V$ waarvoor gesloten verzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ bestaan met $U \subset A \subset B \subset V$ en een C^∞–functie $\chi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ met $\mathrm{supp}\chi \subseteq B$ en $\chi \equiv 1$ op A.

   (a) Verifieer $\iota_{VU}(\phi) = \varrho_{V\mathbb{R}^n}(\chi \cdot \phi)$ voor alle $\phi \in \mathscr{D}(U) \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

   (b) Bewijs $\iota_{VU}(u) = \varrho_{V\mathbb{R}^n}(\chi \cdot u)$ voor alle $u \in \mathscr{E}'(U) \subseteq \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, waar $\iota_{VU} = \varrho_{UV}^{\mathrm{T}}$ en $\varrho_{UV} : \mathscr{E}(V) \longrightarrow \mathscr{E}(U)$ de restrictie van $\varrho_{UV} = \iota_{VU}^{\mathrm{T}} : \mathscr{D}'(V) \longrightarrow \mathscr{D}'(U)$ is.

4. Schrijf $f \in C^m(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ indien $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ in elke variabele 2π–periodiek is en $L^p(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ voor de ruimte van (equivalentieklassen van bijna overal) in elke variabele 2π–periodieke meetbare functies f met

$$\|f\|_p \;:=\; \left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \;<\; \infty\;.$$

   (a) Voor $f \in L^1(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ definieer

$$\hat{f}_k \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle k|x\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   voor alle $k \in \mathbb{Z}^n$ en ga na dat $\mathscr{F}(f) := \hat{f} = (\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ begrensd is.

   (b) Toon aan dat

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\;\bigvee_{M>0}\;\bigwedge_{|k|\geq M}\; |\hat{f}_k| \;<\; \varepsilon$$

   (waarbij $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$), d.w.z. $\lim\limits_{|k|\to\infty} \hat{f}_k = 0$.

   (c) Laat zien dat

$$\hat{f} \;\in\; \mathscr{s}(\mathbb{Z}^n) \;:=\; \left\{ (c_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |k^\beta c_k| < \infty \text{ voor alle } \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}$$

   voor alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$.

   (d) Voorzie $C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ van de semi-normen

$$\|f\|_{C^m} \;:=\; \max_{|\alpha|\leq m}\,\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|\;, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

   (dit zijn uiteraard allemaal normen, maar de topologie op $C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ wordt niet door één van hen gegeven) en voorzie $\mathscr{s}(\mathbb{Z}^n)$ van de semi-normen

$$\|(c_k)_k\|_{\mathscr{s}(R)} \;:=\; \max_{|\beta|\leq R}\,\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |k^\beta c_k|\;, \quad R > 0$$

(ook dit zijn allemaal normen). Vindt voor elke $R > 0$ een $C > 0$ en een $m \in \mathbb{N}_0$ met

$$\|\hat{f}\|_{\mathscr{s}(R)} \quad \leq \quad C\,\|f\|_{C^m} \quad \text{voor alle } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \tag{2}$$

(d.w.z. bewijs dat $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathscr{s}(\mathbb{Z}^n)$ continu is).

(e) Reken na dat $(\mathscr{F} \circ \mathscr{G})((c_k)_k) = (c_k)_k$, waarbij

$$\mathscr{G}((c_k)_k)(x) \quad := \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k|x\rangle} \tag{3}$$

voor alle $(c_k)_k$ waarvoor (3) absoluut uniform convergent is. *Toelichting:* In het geval van absoluut uniforme convergentie levert elke aftelling van $\mathbb{Z}^n$ dezelfde limiet (3) op en is $\mathscr{G}$ dus goed gedefinieerd.

(f) Toon aan dat $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathscr{s}(\mathbb{Z}^n)$ surjectief is.

(g) Verifieer dat

$$\mathscr{F} \;:\; C(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \;\longrightarrow\; \ell_0^\infty(\mathbb{Z}^n) \;:=\; \left\{ (c_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \;\middle|\; \lim_{|k|\to\infty} c_k = 0 \right\}$$

injectief is. *Hint:* Schrijf

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle k|x\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1} F(x_1, k_2, \ldots, k_n)\,\mathrm{d}x_1$$

met

$$F(x_1, k_2, \ldots, k_n) \quad := \quad \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{[-\pi,\pi]^{n-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2x_2+\ldots+k_nx_n)} f(x)\,\mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)$$

en gebruik dat het resultaat voor $n = 1$ al bekend is.

(h) Concludeer dat $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathscr{s}(\mathbb{Z}^n)$ bijectief is met inverse gegeven door (3) en bewijs dat $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{s}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n)$ continu is.

(*bonus*) Ga voor absoluut uniform convergente (3) de gelijkheid van Parseval

$$\|f\|_2^2 \quad = \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}_k|^2 \quad = \quad \|(\hat{f}_k)_k\|_2^2$$

na en laat zien dat de Fouriertransformatie een unitaire operator

$$\mathscr{F} \;:\; L^2(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \;\longrightarrow\; \ell^2(\mathbb{Z}^n) \;:=\; \left\{ (c_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \;\middle|\; \|(c_k)_k\|_2 < \infty \right\}$$

definieert.