Extraaufgaben Distributionen

E.1 Definiere

$$\phi_{a,b}(x) \quad := \quad \psi(x-a)\,\psi(b-x) \ ,$$

wobei ψ die C^∞–Funktion mit $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ für $x > 0$ aus Lemma 2.7 ist.

- a). Zeige $\phi_{a,b} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \phi_{a,b} = [a,b]$ und skizziere den Graphen.
- b). Konstruiere mittels $\phi_{a,b}$ eine monoton wachsende Funktion $\Psi_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\Psi_{a,b}(x) = 0$ wenn $x \leq a$ und $\Psi_{a,b}(x) = 1$ wenn $x \geq b$. *Hinweis:* integrieren!
- c). Definiere $\Phi(x) := \Psi_{-2,-1}(x)\,(1 - \Psi_{1,2}(x))$ und gehe $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ nach. Welche Eigenschaften hat Φ ? Skizziere den Graphen.

E.2 Die Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ habe, als Distribution, eine Ableitung $g \in C(\mathbb{R})$. Zeige $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $f' = g$ auch für die ‘normale’ Ableitung.