Tentamen Distributies 30 juni 2022

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar, de bonusopgave iets minder.
- *SUCCES!*

1. Zij $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ lokaal integreerbaar. Definieer voor $a \in \mathbb{R}$ de getransleerde functie $h_a := T_a h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, d.w.z. $h_a(x) = h(x-a)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en beschouw al deze functies als elementen van de ruimte $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ van distributies op $\mathbb{R}$.

   (a) Toon aan dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de limiet $u_h := \lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{a}(h_a - h)$ bestaat. *Hint:* substitutie.

   (b) Geef een voldoende voorwaarde op h opdat u_h van orde nul is en geef een bovengrens voor de orde van u_h die geldig is voor alle lokaal integreerbare functies h.

   (c) Geef een <u>scherpe</u> bovengrens voor de orde van u_h, d.w.z. geef zowel een bovengrens als een voorbeeld van een lokaal integreerbare functie h waarvoor de orde van u_h gelijk is aan deze bovengrens.

   (d) Bereken u_g voor

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & & x<0 \\ 0 & \text{als} & x=0 \\ x-1 & & x>0 \end{cases} \tag{1}$$

   en verifieer $u_g = -\partial g$.

(*e*) Voor de in (1) gedefinieerde g bepaal zowel de drager als de singuliere drager van zowel g als van u_g.

(*f*) Met nog steeds de g uit (1), welke van de distributies g, u_g en de afgeleide $u'_g = \partial u_g$ zijn positief?

2. Zij $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Definieer $A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ d.m.v.

$$(A\phi)(x) \quad = \quad Sv \, * \, \phi(x)$$

voor alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(*a*) Laat zien dat A lineair en continu is.

(*b*) Ga na dat $A\phi$ een compacte drager heeft, dus dat $\operatorname{im} A \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en in feite $A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(*c*) Toon aan dat

$$(A\phi)(x) \quad = \quad v(y \mapsto \phi(x+y)) \ .$$

(*d*) Bewijs dat voor de getransponeerde afbeelding $A^{\mathrm{T}} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ geldt dat $A^{\mathrm{T}}u = u * v$.

3. Beschouw de lineaire partiële differentiaaloperator ∂_1 op de ruimte $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ van gematigde distributies; doel van deze opgave is om een fundamentele oplossing te vinden.

(*a*) Pas formeel Fouriertransformatie toe op $\partial_1 u = \delta$.

(*b*) Ga na dat, als de Fouriergetransformeerde $\hat{u}$ het product is van een functie van ξ_1 en een functie van ξ_2, dat dan de distributie u een tensorproduct is.

(*c*) Gebruik je kennis van één-dimensionale problemen en verifieer dat dit inderdaad een fundamentele oplossing oplevert.

(*bonus*) Beschouw tot slot de lineaire partiële differentiaaloperator $\partial_1 + \partial_2$ op $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ en vind ook hiervoor een fundamentele oplossing.