Tentamen Distributies 29 juni 2023

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook nagaan dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken. Voorkomende integralen hoeven niet te worden uitgewerkt.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar, de bonusopgave iets minder.
- *SUCCES!*

1. De elementen van $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zijn de gematigde distributies.

   (*i*) Voor welke $a \in \mathbb{C}^n$ kan men $\mathrm{e}_a(x) = \mathrm{e}^{\langle a|x\rangle}$ als een gematigde distributie opvatten?

   (*ii*) Onder welke (noodzakelijke en voldoende) voorwaarde aan het rijtje $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ is

   $$u \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_k$$

   een gematigde distributie op $\mathbb{R}$?

   (*iii*) Toon aan dat elke gematigde distributie een distributie van eindige orde is.

(*iv*) Geef voor $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$ een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking

$$\partial_x^4 u + \partial_y^4 u + u = f \ .$$

Lukt dit ook voor $f(x,y) = \mathrm{e}^{+(x^2+y^2)/2}$?

2. Beschouw voor vaste $t \geq 0$ de afbeelding

$$\begin{array}{rccc} \Phi_t : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-t}x \end{array} .$$

(*i*) Ga na dat het terugtrekken van Φ_t voor elke $t \geq 0$ twee afbeeldingen

$$\Phi_t^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

en

$$\Phi_t^* : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

op de ruimtes $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ van testfuncties en $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ definieert en dat het vooruitduwen voor elke $t \geq 0$ twee afbeeldingen

$$(\Phi_t)_* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R})$$

en

$$(\Phi_t)_* : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

op de ruimtes $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ van distributies met compacte drager en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ van alle distributies definieert.

(*ii*) Zij $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ willekeurig, maar vast. Laat zien dat $\Phi_t^*\psi$ voor $t \to \infty$ binnen $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ convergeert en bepaal de limiet.

(*iii*) Zij $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ een testfunctie. Is ook dan $\Phi_t^*\phi$ voor $t \to \infty$ binnen $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergent?

(*iv*) Zij $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ een distributie met compacte drager. Toon aan dat $(\Phi_t)_* v$ voor $t \to \infty$ binnen $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ convergeert en bepaal de limiet.

(*bonus*) Zij $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ een willekeurige, maar vaste distributie. Is dan $(\Phi_t)_* u$ voor $t \to \infty$ binnen $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ convergent?

3. In deze opgave werken de distributies op testfuncties $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ in $n+1$ variabelen.

   (*i*) Ga na dat voor $n = 0$

$$E(t) \quad = \quad \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ & \text{als} \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

   de fundamentele oplossing is van de differentiaal-operator $Pu = u + \partial_t u$.

   Definieer nu voor $n \geq 1$

$$E_t(x) \quad = \quad E(t,x) \quad = \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) & t > 0 \\ & \text{als} \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

   en beschouw de warmte-operator $\partial_t - \Delta_x$ op $\mathbb{R}^{n+1}$, waarbij $\Delta_x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ de Laplace-operator in de x–variabelen.

   (*ii*) Laat zien dat $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ en dat E buiten de oorsprong $(t,x) = (0,0)$ willekeurig vaak differentieerbaar is.

   (*iii*) Bereken de (partiële) Fourier-transformatie $\mathcal{F}_x E(t,\xi) = \hat{E}_t(\xi)$ in de x–variabelen.

   (*iv*) Bewijs dat E de fundamentale oplossing van de warmte-operator is.

   (*v*) Concludeer dat de warmte-operator hypo-elliptisch is. Bereken het symbool en het hoofdsymbool van de warmte-operator en verifieer dat de warmte-operator niet elliptisch is.