Tentamen differentiaalvergelijkingen 16 april 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Ori Yudilevich (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Thom Klaasse (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 14 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^3$ het lineaire systeem $\dot{y} = Ay$ met

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Bereken de eigenwaarden van A.

(ii) Geef de Jordan-normaalvorm van A en een basis ten opzichte waarvan A in deze Jordan-normaalvorm is.

(iii) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van $\dot{y} = Ay$.

(iv) Voor welke beginvoorwaarden $y^0 \in \mathbb{R}^3$ geldt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0$?

(v) Ga na dat

$$\left\{ y^0 \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} .$$

2. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $H(q,p) = 3p^2 q - q^3 + 3(p^2 + q^2)$ gegeven Hamiltoniaanse vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} .$$

(*i*) Geef alle evenwichtspunten (q_0, p_0).

(*ii*) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(*iii*) Bepaal de types van de evenwichtspunten en voor de zadels ook de bijbehorende eigenruimten.

(*iv*) Ga na dat de rechte lijn $\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid q = -1\}$ onder de stroming invariant is.

(*v*) Gebaseerd op je bevindingen in (*i*), (*iii*) en (*iv*) begin een schets van het faseportret, maak een gok welke twee rechte lijnen eveneens invariant zijn en maak daarmee het faseportet af.

3. We noemen een stroming

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & (t,x,y) & \mapsto & \varphi_t(x,y) \end{array}$$

reversibel ten opzichte van de spiegeling

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & (x,y) & \mapsto & (-x,y) \end{array}$$

als $\varphi_{-t}(-x,y) = \rho(\varphi_t(x,y))$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ en $t \in \mathbb{R}$.

(*i*) Controleer dat het systeem

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x \end{array}$$

van differentiaalvergelijkingen op $\mathbb{R}^2$ een reversibele stroming heeft.

(*ii*) Zij $\alpha(t) = \varphi_t(\alpha(0))$ een stroomlijn met baan $\operatorname{im}\alpha$ die

$$\operatorname{Fix}\rho \quad = \quad \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; x = 0 \right\}$$

niet snijdt. Ga na dat $\rho(\operatorname{im}\alpha)$ eveneens een baan is. In welke richting wordt deze doorlopen, bv. wanneer α (onder variatie van t) dichter bij $\operatorname{Fix}\rho$ komt? *Hint:* neem $n = 1$ en schets $\operatorname{Fix}\rho$, $\operatorname{im}\alpha$, $\rho(\operatorname{im}\alpha)$ en de tijdsrichting.

(*iii*) Zij $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ een stroomlijn die $\operatorname{Fix}\rho$ snijdt. In welke stroomlijn wordt α getransformeerd als we de spiegeling ρ toepassen en de tijd omkeren?

(*iv*) Beargumenteer dat elke baan die $\operatorname{Fix}\rho$ twee keer snijdt een periodieke baan is.