Hertentamen differentiaalvergelijkingen 27 mei 2015

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^3$ het lineaire systeem $\dot{y} = Ay$ gegeven door

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_1 + y_2 \ . \end{aligned}$$

   (i) Bereken de eigenwaarden van A.

   (ii) Geef de Jordan-normaalvorm van A en een basis ten opzichte waarvan A in deze Jordan-normaalvorm is.

   (iii) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van $\dot{y} = Ay$.

2. We bestuderen lineaire $n$de orde differentiaaloperatoren L met constante coëfficiënten.

   (i) Beschouw eerst het speciale geval $Ly = y^{(n)}$. Herschrijf de homogene vergelijking $Ly = 0$ in de vorm van het bijbehorende 1ste orde systeem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z = Az$$

   met $z_1 = y$ en bereken voor de matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de algebraïsche en de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 0.

(ii) Zij nu L een willekeurige lineaire $n$de orde differentiaaloperator met constante coëfficiënten en λ een eigenwaarde van het bijbehorende 1ste orde systeem met algebraïsche multipliciteit $m \geq 2$. Laat zien dat λ meetkundige multipliciteit 1 heeft. *Hint:* gebruik de (al bekende) oplossingen $t^\ell e^{\lambda t}$, $\ell = 0, \ldots, m-1$.

3. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $V(x,y) = x^3y + xy^3 - 4xy$ gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

(i) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0).

(ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit.

(iv) Ga na dat $(0,0) + E_\lambda$ voor de twee eigenruimten E_λ van $D^2V(0,0)$ onder de stroming invariant is. *Opmerking:* in feite zijn zelfs voor alle zadelpunten (x_0, y_0) en hun eigenruimten E_λ de verzamelingen $(x_0, y_0) + E_\lambda$ onder de stroming invariant, en daar mag je in het vervolg ook gebruik van maken.

(v) Schets het faseplaatje.

4. Beschouw de lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + t^3\dot{y} + 3t^2y = 0 \tag{1}$$

met variabele coëfficiënten.

(i) Schrijf $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ voor een oplossing van (1) en geef een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

(ii) Bereken de machtreeks voor de oplossing $y^1(t)$ met beginwaarden $y^1(0) = 1$ en $\dot{y}^1(0) = 0$. Geef een expliciete uitdrukking voor de coëfficienten (los de recurrente betrekking op).

(iii) Geef de oplossing $y^2(t)$ met beginwaarden $y^2(0) = 0$ en $\dot{y}^2(0) = 1$.